COURS

DE

MÉCANIQUE ANALYTIQUE

Gand, imprimerie C. Annoot-Braeckman.

COURS

DE

MÉCANIQUE ANALYTIQUE

PAR

PH. GILBERT

CORRESPONDANT DE L'INSTITUT DE FRANCE (ACADÉMIE DES SCIENCES)
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LOUVAIN

PARTIE ÉLÉMENTAIRE

TROISIÈME ÉDITION

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, LIBRAIRE, QUAI DES AUGUSTINS, 55

1891

Cette nouvelle édition se distingue de la précédente, non seulement par d'assez nombreuses modifications de détail, mais surtout par le développement donné à certaines théories.

Ainsi, j'ai cru devoir, en m'appuyant surtout sur les recherches de M. Darboux, ajouter à la théorie de Poinsot sur la rotation autour d'un point fixe les théorèmes remarquables relatifs à l'herpolhodie et au mouvement d'un solide pesant, dont cette théorie s'est enrichie récemment.

Les équations générales de la dynamique ont été complétées par l'exposé sommaire des méthodes d'Hamilton et de Jacobi.

Le quatrième livre, contenant l'Hydrostatique et l'Hydrodynamique, a reçu également des développements qui en ont doublé l'étendue.

Enfin, j'ai consacré un livre nouveau, le cinquième, à la théorie si importante du potentiel et de l'attraction des ellipsoïdes, car je ne prévois guère le moment où il me sera permis de rédiger le volume complémentaire qui devait renfermer ces problèmes avec beaucoup d'autres.

Ne pouvant indiquer ici tous les ouvrages ou mémoires auquels j'ai fait des emprunts, je signalerai toutefois le tome VII du *Traité de Mécanique générale* de M. Resal qui, par la variété des questions qui y sont traitées et l'élégance des méthodes suivies, m'a été fort utile; les *Vorlesungen über mathematische Physik* de G. Kirchoff (t. I), le *Treatise on Fluid motion* de M. H. Lamb (trad. de Reiff), le *Treatise on Natural Philosophy* de MM. Thomson et Tait, et les nombreux ouvrages publiés depuis quelques années sur la théorie du potentiel (Betti, Mathieu, Neumann, etc....).

Aux exercices, déjà très-nombreux, que renfermait la deuxième édition, j'en ai ajouté quelques-uns, puisés en partie dans les recueils de MM. de Saint-Germain et Villié.

PH. GILBERT.

TABLE DES MATIÈRES.

LIVRE TROISIÈME. — DYNAMIQUE.

LIVRE QUATRIÈME. — HYDROSTATIQUE ET HYDRODYNAMIQUE.

LIVRE CINQUIEME. — THÉORIE DE L'ATTRACTION ET DU POTENTIEL.

ERRATA.

Page	ligne	au lieu de	lisez
50	4 en rem.	O_x, O_y, O_z	Ox, Oy, Oz.
55	5 »	$j = o$	$j_t = o$.
58	14	roulette	courbe.
107	9	*appliquées*	*appliqués.*
114	20	fait OX	fait avec OX.
139	9	$Sy_1 = \frac{1}{2}\int_0^x xy^2dx$	$Sy_1 = \frac{1}{2}\int_0^x y^2dx$.
140	4 en rem.	infinément	infiniment.
146	9	$yds = ads$	$yds = adx$.
167	11 en rem.	pesenteur	pesanteur.
183	6	$\frac{f(v)}{dv}$	$\frac{dv}{f(v)}$.
id.	2 en rem.	*conciliatian*	*conciliation.*
id.	id.	*variable*	*véritable.*
193	6 en rem.	$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}$	$m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)$.
197	7 en rem	effecté	effectué.
241	15	*tous*	*tout.*
246	13	$\eta\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \zeta\frac{d^2\eta}{dt^2}$	$\eta\frac{d^2\zeta}{dt^2} - \zeta\frac{d^2\eta}{dt^2}$.
270	9 en rem.	$\pi\rho a$	$\pi\rho a^3$.
311	5	*résolution*	*révolution.*

COURS DE

MÉCANIQUE ANALYTIQUE.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES SUR LES RÉSULTANTES.

1. Soient (fig. 1) des droites OA, OB, OC, ... OE tirées d'un même point O, ayant chacune une *longueur* et une *direction* déterminées. Si l'on porte bout à bout, à partir du point A, les droites AB', B'C', ..., D'E', respectivement égales, parallèles à OB, OC, ... OE et de même sens, la droite OE', menée du point O à l'extrémité de la dernière droite et qui ferme le polygone OAB'C' ... E', s'appelle la *résultante* ou la *somme géométrique* des droites OA, OB, OC, ... OE. Réciproquement, celles-ci sont dites les *composantes* de la droite OE'.

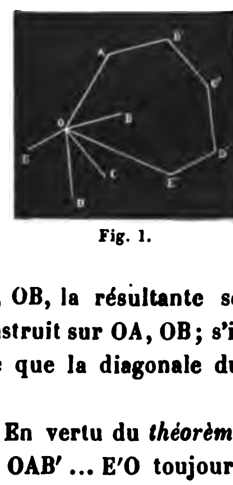


Fig. 1.

Si les composantes se réduisent à deux, OA, OB, la résultante se confond avec la diagonale du parallélogramme construit sur OA, OB; s'il y en a trois OA, OB, OC, la résultante n'est autre que la diagonale du parallélipipède construit sur OA, OB, OC.

Menons par le point O une droite indéfinie OX. En vertu du *théorème des projections*, si l'on parcourt le contour fermé OAB' ... E'O toujours dans le même sens, en multipliant chaque côté par le cosinus de l'angle

qui fait sa direction, prise dans le sens du mouvement, avec la direction donnée OX, la somme de ces produits sera nulle. Si donc nous appelons $P, P', P'', \ldots R$ les longueurs respectives des droites OA, OB, OC, ... et de leur résultante OE'; $\alpha, \alpha', \alpha'' \ldots, a$ les angles de leurs directions avec OX, et si nous observons que la résultante OE' est parcourue dans le sens E'O contraire à sa direction propre, nous aurons

$$P \cos\alpha + P' \cos\alpha' + P'' \cos\alpha'' + \cdots - R\cos a = 0,$$

ou

$$(1) \qquad R\cos a = P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \cdots$$

Donc *la projection de la résultante de plusieurs droites sur une direction quelconque est égale à la somme algébrique des projections des composantes sur cette même direction.*

2. Nous déterminerons la direction d'une droite $OA = P$ au moyen des angles α, β, γ qu'elle forme avec les directions positives de trois axes coordonnés rectangulaires OX, OY, OZ, tirés du point O. Chacun de ces angles peut varier de 0° à 180°, son cosinus de $+1$ à -1. Les trois *cosinus directeurs* d'une droite OA étant donnés en grandeur et en signe, la direction de la droite est donc déterminée sans aucune ambiguité; la direction opposée AO est caractérisée par des cosinus directeurs respectivement égaux et de signes contraires.

Les projections de la droite P sur les axes

$$P\cos\alpha, \quad P\cos\beta, \quad P\cos\gamma,$$

sont, d'après la remarque ci-dessus, égales aux *composantes* de cette droite parallèlement à OX, OY, OZ; de plus, les signes dont elles sont affectées (suivant que les angles α, β, γ sont aigus ou obtus) montrent si ces composantes sont dirigées dans le sens des axes coordonnés positifs ou en sens contraire. Par une convention fort utile, nous regarderons les composantes P_x, P_y, P_z de la droite P comme positives dans le premier cas, comme négatives dans le second. Ainsi nous aurons, *en grandeur et en signe*,

$$P_x = P\cos\alpha, \quad P_y = P\cos\beta, \quad P_z = P\cos\gamma;$$

réciproquement, les composantes d'une droite P suivant trois axes rectangulaires déterminent complètement cette droite en grandeur et en

direction, car on a

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2},$$
$$\cos\alpha = \frac{P_x}{P}, \quad \cos\beta = \frac{P_y}{P}, \quad \cos\gamma = \frac{P_z}{P}.$$

3. Pour déterminer *analytiquement* la résultante R d'un nombre quelconque de droites OA = P, OB = P′, ... partant d'un point O, on décomposera la droite P suivant trois axes rectangulaires OX, OY, OZ menés par ce point. La droite P étant donnée de grandeur et de direction, ses composantes P_x, P_y, P_z seront connues, d'après ce qui précède. Concevons qu'on opère de même pour chacune des droites P′, P″, ... et pour la résultante R. L'équation (1) donne immédiatement la relation

$$R_x = P_x + P'_x + P''_x + \cdots$$

entre les composantes de P, P′, P″, ... R suivant OX, et deux relations semblables pour les axes OY, OZ. Si donc nous indiquons par le symbole Σ une somme de termes semblables qui s'étend à toutes les droites P, P′, P″, ..., nous aurons les égalités

(2) $$R_x = \Sigma P_x, \quad R_y = \Sigma P_y, \quad R_z = \Sigma P_z.$$

Donc, *la résultante* R *d'un nombre quelconque de droites* P, P′, P″, ... *a pour composantes, suivant trois axes rectangulaires, les sommes algébriques des composantes, suivant ces mêmes axes respectivement, de toutes les droites données* P, P′, P″, ...

Réciproquement, et cette remarque nous sera fort utile, toute droite Q qui jouirait de la propriété précédente coïnciderait nécessairement en grandeur et en direction avec la résultante R des droites P. En effet, on a vu plus haut (**2**) qu'une droite est parfaitement déterminée en grandeur et en direction si ses composantes suivant trois axes rectangulaires sont données en grandeur et en signe. Donc les composantes ΣP_x, ΣP_y, ΣP_z, de la droite Q coïncidant avec celles de la résultante R des droites P, les droites Q et R se confondent en grandeur et en direction.

Ainsi, *lorsque les composantes d'une droite* Q *suivant trois axes rectangulaires sont respectivement les sommes algébriques des composantes suivant ces mêmes axes, de droites données* P, P′, P″, ... *en nombre quelconque, on peut affirmer que la droite* Q *est la résultante de* P, P′, P″, ...

Il est toujours entendu qu'il s'agit de droites partant d'un même point O.

4. Les équations (2) conduisent encore aux conséquences suivantes : 1° si a, b, c désignent les angles que fait la résultante R avec OX, OY, OZ, on a les relations

$$R^2 = (\Sigma P_x)^2 + (\Sigma P_y)^2 + (\Sigma P_z)^2,$$

$$\cos a = \frac{\Sigma P_x}{R}, \quad \cos b = \frac{\Sigma P_y}{R}, \quad \cos c = \frac{\Sigma P_z}{R}.$$

2° Quel que soit l'ordre dans lequel on range les composantes P, P′, P″, ... pour effectuer la construction polygonale qui fournit leur résultante R, *pourvu que l'on conserve à chacune sa direction propre,* la résultante R ne change ni de grandeur ni de direction, car cet ordre n'a aucune influence sur la valeur de ΣP_x, ΣP_y, ΣP_z, et par suite de R_x, R_y, R_z.

3° Si les composantes P, P′, P″, ... sont dirigées suivant une même droite, les unes dans un sens, les autres en sens contraire, et que l'on affecte les premières du signe +, les autres du signe —, la résultante R des droites P sera donnée, en grandeur et en direction, par la somme algébrique des composantes. Car, si l'on prend pour axe OX la direction positive des forces P, les équations (2) font voir que R_y, R_z sont nuls; la résultante R tombe sur la droite OX. De plus, en vertu de la convention sur les signes des droites, l'équation $R_x = \Sigma P_x$ se reduit à

$$R = \Sigma P,$$

et le signe de ΣP montre ainsi dans quel sens la résultante R est dirigée.

Dans le cas général, P, P′, P″, ... R sont des quantités absolues, et c'est dans ce sens que l'équation (1) est établie. Néanmoins, cette relation subsiste alors même que P, P′, P″, ... désigneraient des longueurs mesurées suivant certains axes et susceptibles de signes. Par exemple, si P_x, P_y, P_z désignaient les composantes (positives ou négatives) d'une droite P suivant trois directions OX, OY, OZ; α, α', α'', a les angles que font ces directions et celle de P avec une direction OX′, on aurait toujours

$$P \cos a = P_x \cos \alpha + P_y \cos \alpha' + P_z \cos \alpha''.$$

Car si l'une des composantes, P_x par exemple, était négative, c'est-à-dire dirigée en sens contraire de OX, il faudrait, pour appliquer l'équation (1), changer à la fois le signe de P_x et celui de $\cos \alpha$, ce qui ne change pas le signe du produit $P_x \cos \alpha$.

LIVRE PREMIER.

CINÉMATIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

DE LA VITESSE D'UN POINT, DE LA VITESSE RELATIVE ET DE LA COMPOSITION DES VITESSES.

5. La ***Mécanique*** est la science qui a pour objet l'étude du mouvement que prennent les corps dans des conditions déterminées. Pour simplifier cette étude, il est commode d'étudier d'abord le mouvement en lui-même, abstraction faite des causes qui le produisent ou qui le modifient, et l'on nomme *cinématique* la partie de la mécanique qui traite de ces questions.

Tout le monde sait ce qu'on entend par le mot *mouvement*. Quand les distances entre les points de deux corps varient d'une manière continue, nous disons que l'un est en mouvement par rapport à l'autre. Lorsqu'un corps se déplace par rapport à un système d'autres corps, qui conservent les uns relativement aux autres des positions invariables, le premier est dit en mouvement par rapport à ce système de corps. L'idée de mouvement, prise en elle-même, est donc essentiellement *relative*. Mais si nous choisissons un certain système invariable de corps ou de lignes idéales qui en dépendent, tel qu'un système d'axes rectangulaires, et si nous lui attribuons, par une pure détermination de notre esprit, la propriété d'être *fixe*, *immobile* dans l'espace, nous pouvons rapporter à ce système les mouvements des autres corps en étudiant leurs changements de position par rapport à lui. Ces mouvements sont ceux que nous appellerons

mouvements absolus; nous n'attribuerons pas un autre sens à cette expression en cinématique.

6. On fait souvent usage en géométrie de la considération du mouvement; ainsi, on regarde une surface comme engendrée par le déplacement d'une certaine courbe. Mais cette manière de considérer le mouvement se distingue par un caractère essentiel de celle que nous allons examiner : on y fait abstraction du *temps* que la figure mobile met à passer d'une position à une autre. L'objet propre de la cinématique est, au contraire, les relations entre les positions successives d'une même figure et les époques correspondantes.

D'autre part, comme l'indique la définition, la cinématique se distingue de la mécanique proprement dite en ce qu'elle ne s'occupe pas des causes qui produisent le mouvement ou qui le modifient; elle ne voit que les mouvements eux-mêmes, et à raison de ce point de vue où elle se place, elle fait aussi abstraction des qualités matérielles des corps, des différences de nature, de poids, etc., qu'ils peuvent offrir, pour ne voir que leur figure géométrique qui se déplace.

Nous étudierons successivement 1° le mouvement d'un simple *point géométrique;* 2° le mouvement d'un *système de points* conservant une figure invariable, ce que nous appelons, pour abréger, un *solide.*

7. La notion du *temps*, qui entre dans celle du mouvement, est de celles que nous possédons indépendamment de toute définition : elle nous est donnée par la succession des phénomènes qui se passent sous nos yeux. Mais il est nécessaire, pour pouvoir mesurer le temps, de définir d'une manière précise ce qui constitue l'*égalité* des temps.

Nous disons que deux intervalles de temps sont *égaux*, lorsqu'un même corps, placé dans des conditions parfaitement identiques de part et d'autre, exécute pendant ces deux intervalles de temps, des mouvements identiques. Nous n'examinons pas ici les procédés plus ou moins rigoureux à l'aide desquels on réalise en pratique cette comparaison de deux intervalles de temps. De la définition de l'égalité, on passe sans peine à celle d'un rapport entier, fractionnaire, incommensurable entre deux temps, d'où il suit qu'un intervalle de temps déterminé étant choisi pour unité, tout autre intervalle sera représenté par un nombre, mesurant son rapport à l'unité adoptée.

Le choix de cette unité est arbitraire et les théories de la mécanique en sont nécessairement indépendantes. Dans l'usage ordinaire et pour les

applications, on prend comme unité la *seconde de temps moyen*, c'est-à-dire la 86400^{me} partie du jour solaire moyen déterminé par les observations astronomiques. Nous prendrons pour *unité de longueur le mètre*, dont la détermination est bien connue.

8. La ligne que décrit un point dans son mouvement se nomme sa *trajectoire;* elle peut être *rectiligne* ou *curviligne*. Les notions suivantes sont communes à ces deux genres de mouvements. Nous donnerons ensuite celles qui se rapportent exclusivement au mouvement curviligne.

Le mouvement d'un point est *uniforme*, lorsqu'il parcourt des espaces égaux dans des temps égaux, si petits que soient ces temps, en sorte que les arcs décrits par le point mobile sont proportionnels aux temps qu'il met à les décrire. On nomme *vitesse*, dans le mouvement uniforme, ce rapport constant qui existe entre les espaces parcourus et les temps correspondants; — ou encore, l'espace parcouru dans un temps égal à l'unité.

Quand le mouvement d'un point n'est ni uniforme, ni composé d'une suite de mouvements uniformes, il est dit *varié*. La définition de la vitesse, appliquée à un tel mouvement, ne représenterait plus rien de déterminé, mais on la généralise comme il suit pour tous les mouvements.

Désignons par t le temps, compté depuis une époque déterminée que l'on choisit pour origine du temps, jusqu'à l'instant où le point mobile occupe une position M sur la ligne, droite ou courbe, qu'il décrit. Soit M' (fig. 2) la position qu'il occupe à l'époque $t + \Delta t$. Divisant l'arc MM' par Δt, on aura ce qu'on appelle la *vitesse moyenne* du point pendant le temps Δt. Supposons Δt infiniment petit, et par suite MM' : la limite de la vitesse moyenne, ou la limite du rapport



Fig. 2.

$$\frac{\text{arc MM}'}{\Delta t},$$

est ce que l'on nomme la *vitesse* du point à l'époque t.

Pour déterminer le mouvement du point sur sa trajectoire, supposée connue, on prend sur celle-ci une origine fixe A, et l'on désigne par s la longueur de l'arc compris entre cette origine et le point M où se trouve le mobile à l'époque t. Si l'on connaît la relation entre les variables s et t, on connaîtra parfaitement la loi du mouvement, puisque l'on

pourra assigner, pour une époque quelconque, la position qu'occupe le mobile à cet instant. Cela posé, il suit de la définition générale ci-dessus que, si v désigne la vitesse du mobile à l'époque t, on aura *arc* $\text{MM}' = \Delta s$, d'où

$$v = \lim \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \text{ou} \quad v = \frac{ds}{dt}.$$

Ainsi, ***dans un mouvement quelconque, la vitesse est la dérivée de l'espace parcouru par rapport au temps.***

Pour que l'expression de la vitesse fasse connaître en même temps ***dans quel sens*** le point parcourt sa trajectoire, il suffit de compter l'arc s à partir du point A, positivement dans un sens, négativement en sens contraire, et d'attribuer à la vitesse une valeur ***positive*** ou ***négative*** selon que le point se meut dans le premier sens ou dans le second. La dérivée $ds : dt$ étant positive ou négative selon que s croît ou décroît, l'équation ci-dessus sera toujours exacte en grandeur et en signe, et ce signe fera connaître dans quel sens le mouvement a lieu.

9. Le cas du mouvement uniforme est renfermé dans ce cas général; on a $v = a$, a étant une constante. L'expression de la vitesse donne donc

$$\frac{ds}{dt} = a,$$

et par suite, intégrant et désignant par s_0 la valeur de s pour $t = 0$, on obtient

$$s = at + s_0.$$

Cette équation, qui fait connaître la position du point à un instant quelconque, se nomme l'***équation du mouvement uniforme.*** Il faut bien remarquer que s_0, s, a, peuvent y avoir des signes quelconques, en sorte que l'équation convient à toutes les circonstances du mouvement.

Il suffit de connaître les positions occupées par le point à deux instants donnés pour avoir la loi de son mouvement. Car, soient s_1 et s_2 les distances (positives ou négatives) du mobile à l'origine A, aux époques marquées par t_1 et t_2. D'après l'équation ci-dessus, on a

$$s = at + s_0, \quad s_1 = at_1 + s_0, \quad s_2 = at_2 + s_0,$$

d'où

$$s_2 - s_1 = a(t_2 - t_1), \quad a = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}, \quad s - s_1 = a(t - t_1),$$

et, en éliminant a,

$$s - s_1 = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}(t - t_1),$$

équation qui donne s en fonction de t. La vitesse a est égale à

$$\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}.$$

Dans un mouvement varié quelconque, v ne serait plus constant; si sa valeur était donnée en fonction de t, on en déduirait s par l'équation

$$s = s_0 + \int_0^t v\,dt,$$

et le mouvement serait encore connu.

10. ***Mouvement curviligne.*** Ce qui précède est indépendant de la forme de la trajectoire, mais lorsque celle-ci est courbe, on doit considérer en outre la *direction* du mouvement.

Rapportons le mouvement du point à trois axes rectangulaires fixes OX, OY, OZ. Les coordonnées x, y, z du mobile à l'époque t sont des fonctions déterminées du temps t, et si ces fonctions sont données

$$x = f(t), \quad y = f_1(t), \quad z = f_2(t),$$

on saura assigner, pour une valeur quelconque du temps, la position du point, et son mouvement sera parfaitement connu. Ces équations sont celles du mouvement du point. Elles se présentent aussi sous la forme plus générale

$$F(x, y, z, t) = 0, \quad F_1(x, y, z, t) = 0, \quad F_2(x, y, z, t) = 0.$$

L'élimination du temps t entre ces trois équations conduira à deux équations entre les coordonnées x, y, z seulement,

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad \varphi_1(x, y, z) = 0.$$

Ce seront les équations de la trajectoire.

Cela posé, dans un mouvement rectiligne, la direction du mouvement du point à un instant quelconque est naturellement celle de la droite qu'il parcourt, prise dans le sens du mouvement. Mais dans le mouvement curviligne, il faut définir la direction de la vitesse, car la droite MM′ qui joint les positions du mobile à deux époques, t, $t + \Delta t$, varie de direction d'après les valeurs de t, Δt. Or, si Δt est infiniment petit, la

direction MM' tend vers une limite MV (fig. 2), qui n'est autre que celle de la tangente à la trajectoire en M, menée dans le sens où le mouvement a lieu; *c'est cett direction* MV *que l'on est convenu de prendre pour celle de la vitesse du point mobile en* M, ou à l'époque t.

Si donc on porte à partir du point M où se trouve le mobile, sur la tangente à sa trajectoire et dans le sens du mouvement, une longueur MV proportionnelle à la vitesse actuelle v, cette droite MV représentera en grandeur et en direction la vitesse du point à l'époque t.

Admettons que l'arc s dont dépend la position du point sur sa trajectoire soit compté positivement dans le sens du mouvement. Les cosinus directeurs de la tangente MV, prise dans ce sens, ont pour expressions (Cours d'Anal.; 226)

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds};$$

ce sont donc là les *cosinus directeurs de la vitesse.* En multipliant par ces cosinus la vitesse v elle-même, nous aurons (2) les *composantes respectives* v_x, v_y, v_z *de la vitesse* parallèlement à OX, OY, OZ; donc

$$v_x = v\frac{dx}{ds}, \quad v_y = v\frac{dy}{ds}, \quad v_z = v\frac{dz}{ds},$$

ou, en mettant pour v sa valeur $ds : dt$,

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Projetons le point mobile sur l'axe OX, et considérons cette projection comme un nouveau point mobile M_1 qui parcourt cet axe. La variable x représente à la fois l'abscisse du point M et celle de sa projection M_1, ou la distance de ce dernier point à l'origine O sur la droite qu'il parcourt. Donc, d'après la définition de la vitesse, $dx : dt$ mesure, en grandeur et en signe, la vitesse du point M_1 sur OX. La même chose ayant lieu pour les autres axes, *les composantes de la vitesse d'un point parallèlement à trois axes rectangulaires sont respectivement égales, en grandeur et en signe, aux vitesses des projections du point mobile sur ces mêmes axes, au même instant.*

Mais la signification complète de la décomposition des vitesses ressort de la théorie du mouvement relatif, dont nous allons parler.

11. Nous avons considéré jusqu'ici le mouvement d'un point par rapport à trois axes supposés immobiles dans l'espace, ou son mouvement absolu. Concevons qu'un système, de forme invariable, ait par rapport à ces mêmes axes fixes un mouvement connu; à chaque instant, le point mobile occupera par rapport à ce *système de comparaison* une position déterminée; il aura donc, relativement à lui, un certain mouvement, différent de son mouvement par rapport aux axes fixes, et que l'on nomme pour cette raison son *mouvement relatif* par rapport au système de comparaison.

Ce mouvement relatif est celui qu'un observateur, emporté dans le mouvement du système de comparaison sans avoir conscience du déplacement qu'il éprouve, attribuerait au point mobile au lieu de son mouvement absolu : c'est pour cela que les mouvements relatifs sont appelés souvent *mouvements apparents*. Ainsi, une personne enfermée dans la cabine d'un bateau glissant sur un canal, attribue à un corps, tombant dans l'intérieur de la cabine, un mouvement rectiligne vertical, tandis qu'en réalité ce corps parcourt une parabole.

On se fait encore une idée nette du mouvement relatif en imaginant un point *fictif* M′ dont lés coordonnées par rapport aux axes fixes OX, OY, OZ, à chaque instant, seraient respectivement égales aux coordonnées ξ, η, ζ du point mobile M par rapport aux axes $O'\xi$, $O'\eta$, $O'\zeta$, auxquels nous pouvons réduire pour plus de simplicité le système de comparaison mobile. Le mouvement absolu de ce point fictif M′ sera précisément ce que nous appelons le mouvement relatif du point M.

Le lieu des positions successives que le mobile M vient occuper dans le système de comparaison $O'\xi\eta\zeta$ est une courbe qui s'appelle la *trajectoire relative* (elle est la même que la trajectoire absolue du point M′ dans le mouvement fictif). Représentons-nous cette trajectoire relative comme une ligne faisant corps avec le système de comparaison et entraînée par lui; pendant que le mobile M parcourt cette ligne en vertu de son mouvement relatif, la ligne elle-même vient occuper dans l'espace les positions successives que lui assigne le mouvement du système de comparaison, et c'est la combinaison de ces deux mouvements qui produit le mouvement absolu du point M par rapport au système regardé comme fixe. Il est clair que, si l'on connaît le mouvement du système de comparaison rapporté aux axes fixes et le mouvement absolu du point, on pourra construire tous les points de la trajectoire relative.

Enfin, la *vitesse relative* du point mobile n'est autre que la vitesse qu'il possède par rapport au système de comparaison : elle est donc mesurée par la dérivée, par rapport au temps, de l'arc de la trajectoire relative, et sa direction est celle de la tangente à la trajectoire relative dans sa position actuelle, menée par le point M et dans le sens du mouvement relatif; ses composantes parallèles à $O'\xi$, $O'\eta$, $O'\zeta$ sont $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$.

12. Ces définitions posées, cherchons la relation entre la vitesse absolue v du point mobile, sa vitesse relative v' qui vient d'être définie, et sa *vitesse d'entraînement* v'', c'est-à-dire la vitesse absolue qu'aurait le point M si, dans sa position actuelle, il était lié au système de comparaison. Soient, à un instant quelconque, x_1 et x les distances au plan YZ de l'origine mobile O' et du point M; a, b, c les cosinus des angles que font $O'\xi$, $O'\eta$, $O'\zeta$ avec OX. L'équation connue

$$x = x_1 + a\xi + b\eta + c\zeta$$

nous donne, en dérivant par rapport au temps,

$$\frac{dx}{dt} = \left(a\frac{d\xi}{dt} + b\frac{d\eta}{dt} + c\frac{d\zeta}{dt}\right) + \left(\frac{dx_1}{dt} + \xi\frac{da}{dt} + \eta\frac{db}{dt} + \zeta\frac{dc}{dt}\right).$$

Le premier membre est la projection v_x de la vitesse absolue sur OX. Dans le second membre, le premier groupe de termes représente évidemment, d'après la remarque de la fin du N° 4, la projection v'_x de la vitesse relative sur le même axe; le second groupe, auquel se réduirait v_x si ξ, η, ζ étaient constants, c'est-à-dire si le point M était lié au système de comparaison, représente conséquemment la projection v''_x de la vitesse d'entraînement. L'équation ci-dessus revient donc à celle-ci :

$$v_x = v'_x + v''_x,$$

et l'on aurait de même

$$v_y = v'_y + v''_y, \qquad v_z = v'_z + v''_z.$$

De ces équations et de la réciproque énoncée au N° 3, il suit que *la vitesse absolue du point mobile est la résultante de sa vitesse relative et de sa vitesse d'entraînement.*



Fig. 8.

Si donc MV', MV'' (fig. 3) représentent la vitesse relative du point mobile et la vitesse absolue du point correspondant du système de comparaison, la diagonale MV du parallélogramme construit sur MV', MV'' figurera en grandeur et en direction la vitesse absolue du point M.

Et réciproquement, si l'on tire MW égal et directement opposé à MV″, il suit des propriétés du parallélogramme que WV′ sera égal et parallèle à MV, donc *la vitesse relative* MV′ *d'un point par rapport à un système mobile est la résultante de sa vitesse absolue et de sa vitesse d'entraînement prise en sens contraire.*

Appliquons ce théorème à trouver les composantes de la vitesse v d'un point M, qui décrit une trajectoire plane MS (fig. 4), suivant le rayon vecteur OM $= r$ mené de l'origine O, et perpendiculairement à ce rayon. On peut considérer le mobile M comme glissant d'un mouvement relatif sur la droite mobile OM, pendant que celle-ci tourne autour de son point O supposé fixe, en sorte que chacun de ses points décrit un arc de cercle de centre O. La vitesse relative MV′, dirigée suivant OM, est égale en grandeur et en signe à $dr : dt$; la vitesse d'entraînement MV″, par sa définition, est normale à OM et égale à $rd\theta : dt$, θ désignant l'angle variable que fait la droite mobile avec un rayon fixe. Il suit du théorème ci-dessus que la vitesse v du point M a pour composantes, suivant OM et perpendiculairement à OM,



Fig. 4.

$$\frac{dr}{dt}, \quad r\frac{d\theta}{dt}.$$

12. *Composition d'un nombre quelconque de vitesses.* — Le système rectangulaire OXYZ, que nous avons regardé comme immobile, peut être supposé animé lui-même d'un mouvement quelconque par rapport à un troisième système rectangulaire $AX_1Y_1Z_1$ (fig. 5), auquel on rapporterait le mouvement absolu du point. Rien ne serait changé au calcul qui précède; seulement, la vitesse MV, résultante de la vitesse relative MV′ par rapport au système $O'\xi\eta\zeta$, et de la vitesse d'entraînement MV″ due au mouvemena du système $O'\xi\eta\zeta$ par rapport à OXYZ, ne représenterait plus la vitesse absolue du point M, mais seulement sa vitesse relative par rapport au système OXYZ. Donc, pour obtenir la vitesse absolue, c'est-à-dire la vitesse par rapport au système $AX_1Y_1Z_1$ que nous regardons maintenant comme le système fixe, nous devrons,



Fig. 5.

par une nouvelle application du théorème établi plus haut, chercher la résultante MV_1 de la vitesse relative MV par rapport à OXYZ, et de la vitesse d'entraînement MV''' dont le point M est animé dans le mouvement du système OXYZ par rapport à $AX_1Y_1Z_1$, mouvement supposé connu. D'où il suit, enfin, que la vitesse absolue ou *totale* MV_1 sera la résultante des vitesses MV', MV'', MV''', ou la diagonale du parallélipipède construit sur ces vitesses. Ce raisonnement s'étend facilement, quel que soit le nombre des systèmes de comparaison intercalés entre le point mobile et le système d'axes auquel on attribue l'immobilité, et conduit à la règle suivante : *La vitesse absolue du point mobile est la résultante de sa vitesse relative par rapport au premier système, et de toutes ses vitesses d'entraînement dues au mouvement du premier système par rapport au second, du second par rapport au troisième, et ainsi de suite.*

Il est clair que si l'on intervertit l'ordre de succession des systèmes de comparaison, on ne change rien au résultat final. Il arrive fréquemment que l'on ait à considérer simultanément plusieurs mouvements relatifs : un corps se meut par rapport à un bateau, qui se déplace relativement au globe terrestre; celui-ci à son tour se meut autour de son axe, lequel se transporte autour du soleil, etc. On dit souvent, dans ce cas, que le corps est *animé simultanément de plusieurs mouvements*, expression qui ne doit être entendue que dans le sens défini ci-dessus, savoir, que le corps a un mouvement déterminé par rapport à un système invariable, qui se meut lui-même par rapport à un second système, et ainsi de suite. La règle ci-dessus fournira toujours la vitesse totale ou définitive dont le point mobile est animé par rapport au système que l'on regarde comme fixe et auquel on rapporte les mouvements absolus.

Ce qui précède donne un sens nouveau à la décomposition de la vitesse v d'un point parallèlement à trois axes rectangulaires fixes OX, OY, OZ, dont il a été question ci-dessus : les composantes v_x, v_y, v_z peuvent être considérées comme des vitesses simultanées dont le point M est animé. En effet, si l'on imagine qu'un point glisse avec une vitesse relative v_x sur une droite AB (fig. 6) constamment parallèle à l'axe OX, pendant que cette droite se meut dans un plan EFG parallèle à XY avec une vitesse v_y parallèle à OY, en même temps que chaque point de ce plan EFG lui-même est animé, parallèlement à l'axe OZ, d'une vitesse v_z, il résulte



Fig. 6.

de la loi de composition des vitesses simultanées exposée ci-dessus, que ce point aura par rapport au système OXYZ une vitesse égale à la résultante des vitesses v_x, v_y, v_z, qui se confondra en grandeur et en direction avec la vitesse v du point mobile M. Ainsi le nouvement quelconque d'un point peut toujours être regardé comme une combinaison de mouvements rectilignes.

14. ***Méthode des tangentes de Roberval.*** — Si un point M décrit une courbe plane et que l'on connaisse, à chaque instant, les projections de sa vitesse sur deux directions données, une construction très simple donnera cette vitesse et, par suite, la direction de la tangente à la courbe. Ainsi l'ellipse est décrite par un point M dont les distances r et r' à deux points fixes F et F' satisfont à la relation $r + r' =$ const. D'après ce qu'on a vu (**12**), les projections de sa vitesse sur les directions FM, F'M, sont respectivement égales à

$$\frac{dr}{dt}, \frac{dr'}{dt}, \quad \text{et l'on a} \quad \frac{dr'}{dt} = -\frac{dr}{dt}$$

par la relation précédente. La vitesse MV ayant des projections égales sur FM, MF', la tangente à l'éllipse divise en deux parties égales l'angle compris entre l'un des rayons vecteurs et le prolongement de l'autre.

La méthode de Roberval s'applique encore d'une autre manière. Le mouvement d'un point décrivant une courbe peut souvent résulter de deux ou plusieurs mouvements *simultanés* (**13**) plus simples. En déterminant la vitesse due à chacun et appliquant la règle du N° **13**, on construira la vitesse totale et la tangente à la courbe.

Ex. : Un point M glisse d'un mouvement uniforme sur le rayon OP $= a$ (fig. 7) d'un cercle, tandis que l'extrémité P de ce rayon parcourt la circonférence avec une vitesse constante PS. On voit sans peine que la trajectoire du point M est une spirale d'Archimède. La vitesse relative, dirigée suivant OP, est représentée par une longueur constante MV'. La vitesse d'entraînement MV'' est perpendiculaire à OP et,



Fig. 7.

d'après une propriété du cercle, MV'' : PS $=$ OM : OP $= r : a$. La résultante MV de MV', MV'' sera la vitesse totale, sa direction sera celle de la tangente à la spirale.

Cette méthode, dont les ressources seront mieux comprises après le

chapitre suivant, exige, pour être appliquée sans erreur, que les vitesses simultanées du point M soient bien des vitesses relative et d'entraînement dans le sens précisé ci-dessus (12).

Exercices.

1. Mener la tangente à une conique, considérée comme lieu des points dont le rapport des distances au foyer et à la directrice est une constante e.

R. Les projections de la vitesse sur le rayon vecteur et sur une parallèle à l'axe focal sont dans ce même rapport e. On en déduit, par les figures semblables, que la tangente cherchée coupe la directrice au même point qu'une normale au rayon vecteur menée par le foyer.

2. Tangente à la *conchoïde* décrite par un point M d'une droite qui glisse sur un point fixe O pendant qu'un autre point B de cette droite décrit une droite donnée AX.

R. Considérant O comme un point de la droite BM, les vitesses relatives de B, M sur cette droite sont égales, leurs vitesses d'entraînement proportionnelles aux distances OB, OM.

3. Tangente à la cycloïde. — *R.* On concevra que le cercle générateur glisse parallèlement à la base, tandis que le point M parcourt la circonférence avec une vitesse égale. On retrouve la construction connue.

4. Un point mobile étant déterminé par les coordonnées sphériques r, θ, ψ, déduire de la composition des vitesses la différentielle ds de l'arc décrit.

R. On regardera la vitesse du point comme résultant d'une vitesse relative suivant le rayon r, d'une vitesse d'entraînement dans le plan passant par ce rayon et l'axe OZ, d'une seconde vitesse d'entraînement perpendiculaire à ce plan. On trouvera

$$v^2 = \frac{dr^2}{dt^2} + r^2\frac{d\theta^2}{dt^2} + r^2\sin^2\theta\,\frac{d\psi^2}{dt^2}.$$

CHAPITRE II.

MOUVEMENT D'UN SOLIDE.

§ 1. DES MOUVEMENTS SIMPLES D'UN SOLIDE.

15. Pour étudier le mouvement d'un solide, au point de vue des vitesses dont ses points sont animés, nous distinguerons les mouvements *simples*, c'est-à-dire ceux de *translation* et de *rotation autour d'un axe fixe*, puis les mouvements plus obscurs du solide *parallèlement à un*

plan fixe, autour d'un point fixe, et enfin le ***mouvement quelconque d'un solide libre.***

La position d'un solide est donnée, quand on connaît celles de trois de ses points, A, B, C, non en ligne droite. Concevons que le point A décrive une trajectoire donnée avec une vitesse donnée; que la droite AB reste parallèle à elle-même dans ce mouvement, et qu'il en soit de même de AC. Le plan ABC restant donc toujours parallèle à lui-même, il en sera encore ainsi, à cause de l'invariabilité du système, de tout autre plan ou de toute autre droite appartenant au solide. Il suit facilement de là que les droites AA′, BB′, CC′,... qui joignent deux à deux les positions d'un même point du solide à deux époques t, $t + \Delta t$, sont toutes égales et parallèles, et l'on en conclut, en faisant Δt infiniment petit, ***qu'à chaque instant, tous les points du solide sont animés de vitesses égales et parallèles.***

Un tel mouvement se nomme un ***mouvement de translation :*** tous les points décrivant des trajectoires égales avec des vitesses égales, le mouvement d'un seul point fait connaître celui du solide tout entier, en sorte qu'il n'y a rien de plus à dire sur ce sujet.

S'il arrive, dans un mouvement quelconque d'un solide, qu'à un certain instant, tous ses point aient des vitesses égales et parallèles, on dit que le mouvement du solide est une ***translation instantanée.***



Fig. 8.

16. ***Rotation autour d'un axe fixe.*** — Quand deux points A et B d'un solide (fig. 8) sont fixes, tous les points situés sur la droite AB le sont; le mouvement du solide ne peut être qu'une ***rotation*** autour de AB. La droite AB se nomme l'***axe de rotation :*** chacun des points du solide décrit un cercle autour de cette droite. Pour avoir une idée nette du mouvement, on suppose un plan fixe ABC passant par l'axe de rotation, et un second plan ABH passant aussi par l'axe, mais lié au solide et tournant avec lui. La position de ce second plan déterminant évidemment celle du solide, il suffit de connaître en fonction du temps l'angle ψ que fait le plan mobile avec le plan fixe, pour connaître le mouvement du solide. La quantité (positive ou négative) dont croît l'angle ψ dans un temps donné, se nomme le ***déplacement angulaire*** du solide.

Soit $\Delta\psi$ le déplacement angulaire qu'éprouve le solide pendant un

temps infiniment petit Δt, à partir d'un instant quelconque t. Si le rapport de $\Delta\psi$ à Δt est constant, quels que soient t et Δt, le mouvement de rotation est *uniforme*, et ce rapport se nomme la *vitesse angulaire de rotation*. Dans le cas général où ψ varie d'une manière quelconque avec t, on nomme *vitesse angulaire de rotation* à l'époque t, la limite du rapport $\frac{\Delta\psi}{\Delta t}$ lorsque Δt tend vers zéro. On a donc, ω désignant la vitesse angulaire,

$$\omega = \lim \frac{\Delta\psi}{\Delta t} = \frac{d\psi}{dt}.$$

Soit $MP = f$ la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque M du solide sur l'axe AB, ou le *rayon de rotation* de ce point; à cause de la liaison invariable qui existe entre les points du solide, cette perpendiculaire décrit dans un temps infiniment petit Δt, un angle égal au déplacement angulaire $\Delta\psi$ du solide; le point M décrit donc un arc égal à $f.\Delta\psi$; la vitesse de ce point est donc

$$v = \lim f\frac{\Delta\psi}{\Delta t} = f\frac{d\psi}{dt} = f\omega.$$

La vitesse d'un point quelconque du solide est donc le produit de la vitesse angulaire au même instant par la distance du point à l'axe de rotation. La direction de cette vitesse est tangente au cercle que décrit le point M. Si la distance f est prise égale à l'unité, $v = \omega$, en sorte que *la vitesse angulaire d'un solide n'est autre chose que la vitesse d'un point de ce solide situé à l'unité de distance de l'axe de rotation.*

Pour figurer, par une simple droite, la direction de l'axe de rotation, la vitesse angulaire et le sens de la rotation, on porte sur l'axe, à partir d'un point fixe O, une longueur OR proportionnelle à la vitesse angulaire ω, et dans un sens tel, que la rotation s'effectue de la gauche vers la droite pour un observateur couché sur OR, les pieds en O, la tête en R. Deux rotations à vitesses égales, autour du même droite, en sens contraire l'une de l'autre, seraient figurées par deux droites OR, OR' égales et directement opposées. Cette convention est de haute importance.

Dans un solide animé d'un mouvement quelconque, il peut se faire qu'à un instant donné les vitesses de tous les points du solide soient les mêmes, en grandeur et en direction, que si le solide tournait autour d'une

certaine droite avec une certaine vitesse angulaire : on dit alors que le mouvement du solide est une *rotation instantanée*, et que la droite est un *axe instantané* de rotation.

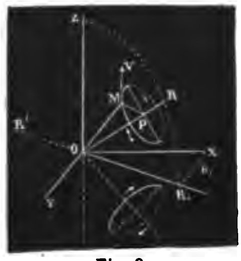


Fig. 9.

17. Nous nous proposons d'exprimer les composantes rectangulaires v_x, v_y, v_z, de la vitesse v d'un point quelconque M du solide, en fonction de ses coordonnées x, y, z et des angles directeurs α, β, γ de l'axe de rotation. L'origine O étant supposée en un point de l'axe, soient $\omega = OR$ la vitesse angulaire, $\delta = OM$ (fig. 9) la distance du point M à l'origine, $f = MP = \delta \sin MOR$ son rayon de rotation. La direction MV de la vitesse du point M étant normale à OR et à MP, et par suite au plan MOR, on a les relations

$$\left\{\begin{array}{l} \cos\alpha \cdot v_x + \cos\beta \cdot v_y + \cos\gamma \cdot v_z = 0, \\ xv_x + yv_y + zv_z = 0, \\ v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = \omega^2 f^2, \end{array}\right.$$

à cause de $v = \omega f$. Résolvant ces équations par rapport à v_x, v_y, v_z par la méthode connue, on aura

$$\frac{v_x}{z\cos\beta - y\cos\gamma} = \frac{v_y}{x\cos\gamma - z\cos\alpha} = \frac{v_z}{y\cos\alpha - x\cos\beta} = \pm\frac{\sqrt{v_x''^2 + v_y^2 + v_z^2}}{\sqrt{(z\cos\beta - y\cos\gamma)^2 + \cdots}}$$

$$= \pm\frac{\omega f}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2}}$$

$$= \pm\frac{\omega f}{\sqrt{\delta^2 - \delta^2\cos^2 MOP}} = \pm\frac{\omega f}{\delta \sin MOP} = \pm\,\omega.$$

Le double signe, qui résulte ici des deux directions opposées que peut avoir la vitesse v, va être déterminé par la convention faite sur le sens de la rotation indiquée par l'axe OR.

Menons un plan par OZ et par l'axe de rotation OR, soit R_1OR' la trace de ce plan sur le plan XY. Soient θ, θ_1 les angles formés avec OX par les projections de OM et de OR sur le plan XY, ces angles étant comptés positivement de OX vers OY. Il est visible que le plan ZOR partage le solide entier en deux parties, dont l'une renferme tous les points qui marchent actuellement vers le point le plus élevé de leur trajectoire, et ont v_z positif ; l'autre tous les points qui ont v_z négatif. De plus, par la

convention faite sur le sens de la rotation par rapport à l'axe OR, on voit sans peine que la partie pour laquelle v_z est $>$ o comprend tous les points pour lesquels $\theta - \theta_1$ est compris entre o et π, celle pour laquelle v_z est $<$ o comprend tous les points pour lesquels $\theta - \theta_1$ est compris entre π et 2π. Donc, enfin, v_z est, pour un point quelconque du solide, de même signe que $\sin(\theta - \theta_1)$. Or, on a, ρ étant la projection de OM sur le plan XY,

$$x = \rho \cos\theta, \quad y = \rho \sin\theta, \quad \cos\alpha = \sin\gamma \cos\theta_1, \quad \cos\beta = \sin\gamma \sin\theta_1,$$

d'où

$$y \cos\alpha - x \cos\beta = \rho \sin\gamma \sin(\theta - \theta_1),$$

quantité de même signe que $\sin(\theta - \theta_1)$, et conséquemment que v_z. Donc le rapport $v_z : (y \cos\alpha - x \cos\beta)$ est positif, et par suite, dans les équations ci-dessus, il faut prendre le signe supérieur devant ω pour rester d'accord avec notre convention sur le sens des rotations.

Nous avons donc ces formules importantes :

$$(1) \qquad \begin{cases} v_x = \omega (z \cos\beta - y \cos\gamma), \\ v_y = \omega (x \cos\gamma - z \cos\alpha), \\ v_z = \omega (y \cos\alpha - x \cos\beta). \end{cases}$$

Mais $\omega \cos\alpha$, $\omega \cos\beta$, $\omega \cos\gamma$ sont évidemment les composantes de l'axe OR parallèlement à OX, OY, OZ; en les désignant par p, q, r, nous aurons

$$\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2,$$

et il viendra

$$(2) \qquad \begin{cases} v_x = qz - ry, \\ v_y = rx - pz, \\ v_z = py - qx, \end{cases}$$

équations qui fournissent la solution du problème.

Ces formules supposent que l'origine de l'axe OR coïncide avec l'origine des coordonnées; en supposant que le premier point soit placé en (x_1, y_1, z_1), ce qui revient, d'après les règles de la transformation des coordonnées, à remplacer dans les équations (2) x, y, z par $x - x_1$, $y - y_1$, $z - z_1$, on trouvera les équations plus générales

$$(3) \qquad \begin{cases} v_x = q(z - z_1) - r(y - y_1), \\ v_y = r(x - x_1) - p(z - z_1), \\ v_z = p(y - y_1) - q(x - x_1). \end{cases}$$

Si l'axe de rotation est parallèle à l'axe des z positifs, on a $p = 0$, $q = 0$, $r = \omega$, et les équations (2) et (3) se réduisent respectivement aux suivantes :

$$(4) \qquad v_x = -\omega y, \quad v_y = \omega x, \quad v_z = 0;$$

$$(5) \qquad v_x = -\omega(y - y_1), \quad v_y = \omega(x - x_1), \quad v_z = 0.$$

D'après la remarque faite à la fin du n° **16**, les formules ci-dessus sont applicables, non seulement à une rotation *continue* autour d'un axe fixe, mais à une rotation *instantanée*.

§ 2. MOUVEMENT D'UNE FIGURE PLANE INVARIABLE DANS SON PLAN.

18. L'étude des *mouvements plans* facilite celle du mouvement d'un solide parallèlement à un plan fixe; elle conduit en outre à des conséquences géométriques remarquables et à des relations utiles dans la théorie des organes mécaniques. Nous allons d'abord traiter cette question.



Fig. 10.

Considérons une figure plane invariable, de forme arbitraire d'ailleurs, mobile sur son propre plan. Par un point déterminé A (fig. 10) de la figure mobile, menons un système de comparaison xAy n'ayant qu'un simple mouvement de translation, et auquel nous rapporterons le mouvement de la figure mobile. La vitesse MV d'un point quelconque de cette figure sera donc la résultante de sa vitesse d'entrainement MV″, égale et parallèle à la vitesse AU du point A, et de sa vitesse MV′ due au mouvement *relatif* de la figure, qui ne peut être évidemment qu'une simple rotation autour du point fixe A, avec une vitesse angulaire constante ou variable ω. Sur la perpendiculaire à AU menée par le point A, portons à partir de ce point une longueur AC telle que $AC \times \omega = AU$, dans un sens tel que la vitesse relative du point C de la figure, qui est égale et parallèle à AU, soit de sens contraire. D'après la loi du n° **12**, le point C aura une vitesse totale nulle. Rien n'empêche d'ailleurs de prendre C, au lieu de A, pour origine du système de comparaison : la vitesse d'entrainement deve-

nant nulle, la vitesse totale MV de chaque point de la figure se réduit à sa vitesse relative, due à la rotation de la figure autour du point C; donc, *quel que soit le mouvement d'une figure plane dans son plan, à chaque instant, les vitesses des différents points de cette figure sont les mêmes, en grandeur et en direction, que si la figure tournait autour d'un certain point C du plan.*

Ce point C, qui a une vitesse nulle, se nomme le *centre instantané de rotation*, car, en général, sa position varie à chaque instant dans le plan, et l'on dit pour abréger que le mouvement de la figure est une *rotation instantanée* autour du point C; mais ce langage n'est exact, d'après ce qu'on vient de voir, qu'au point de vue des vitesses dont les points de la figure sont animés, et il faudrait se garder de considérer le mouvement absolu de la figure comme une vraie rotation autour d'un point fixe.

19. *Conséquences.* — 1° *Les normales aux trajectoires que décrivent les différents points de la figure mobile, à un même instant, vont toutes concourir en un même point qui est le centre instantané correspondant à cet instant.* Car la vitesse MV du point M, et par suite la tangente à sa trajectoire, est évidemment normale au rayon de rotation CM.

2° *La vitesse d'un point quelconque de la figure mobile est le produit de sa distance au centre instantané par la vitesse angulaire de la rotation instantanée, à l'instant considéré.* Cela résulte évidemment du théorème démontré.

3° *Cette vitesse angulaire ne diffère pas de la vitesse* ω, *avec laquelle la figure tournait autour d'un de ses points* A; car elle est égale, d'après la remarque 2°, au rapport AU : AC, lequel est égal à ω d'après la détermination du point C.

20. Considérons le mouvement continu de la figure pendant un temps fini. Le centre instantané C étant variable, soit ACB la ligne qui est le lieu de ce point dans le plan fixe XOY (fig. 11). D'autre part, ce centre se déplace aussi par rapport à la figure mobile, et le lieu des positions qu'il vient occuper successivement dans cette figure est une certaine ligne, sa trajectoire relative; soit A'CB' la position de cette trajectoire à l'instant considéré.



Fig. 11.

Concevons maintenant un point mobile qui coïnciderait à chaque instant avec le centre instantané C : sa vitesse absolue serait celle qu'il possède par rapport à XOY, ou sur la ligne ACB; sa vitesse relative, celle avec laquelle il parcourt la

courbe A′CB′ sur la figure mobile; enfin, sa vitesse d'entraînement serait nulle à chaque instant, puisque le point C, considéré comme lié à la figure mobile, a une vitesse nulle. Donc la vitesse absolue et la vitesse relative de ce point C coïncideraient en grandeur et en direction; d'où il suit 1° que les courbes ACB, A′CB′ ont même tangente au point commun C; 2° que le point mobile parcourt sur sa trajectoire absolue ACB et sur sa trajectoire relative A′CB′, dans un même intervalle de temps, des arcs rigoureusement égaux; donc les arcs compris sur ces deux courbes, entre les points qui viennent successivement coïncider deux à deux, sont égaux, ce qui caractérise le *roulement* d'une courbe sur une autre sans *glissement*. D'où ce théorème :

Le mouvement continu d'une figure plane dans son plan, quel qu'il soit, peut toujours être réalisé en faisant rouler, sur une courbe fixe dans le plan, une courbe invariablement liée à la figure mobile. La première est le lieu du centre instantané de rotation dans le plan, la seconde est le lieu de ce point dans la figure; le point de contact de ces courbes, à un instant donné, est le centre instantané pour cet instant.

21. *Application à la construction des normales aux courbes.* — Quand les conditions géométriques qui définissent le mouvement de la figure invariable sont données, on en déduit la construction du centre instantané pour une position donnée de la figure, et par suite (**19**, 1°) la normale à la trajectoire d'un point quelconque de la figure. Toute ligne qui peut être décrite par un point d'une figure invariable qui se meut suivant une loi connue, donne lieu à une construction facile de la normale.

Les conditions qui définissent le déplacement de la figure sont d'ordinaire les suivantes : 1° *Une ligne* A′CB′ *de la figure roule sur une ligne fixe* ACB. Le centre instantané est immédiatement connu : c'est le point de contact C des deux lignes. — Tel est le cas de la cycloïde : elle est décrite par un point M de la circonférence, ou, plus généralement, *du plan* d'un cercle qui roule sur une droite fixe OX. La normale à cette courbe s'obtient donc en joignant le point générateur M au point de contact C, théorème connu.

2° *Deux points déterminés* A *et* B *de la figure sont assujettis à parcourir deux lignes données*, PQ, RS; les normales à ces courbes, respectivement, en A et B, se coupent évidemment au centre instantané C correspondant à la position actuelle de la figure. Ce point connu, on applique la construction.

3° *Une ligne* PQ, *appartenant à la figure mobile, doit toucher constamment une ligne* RS, *fixe dans le plan.* — Concevons un point mobile M qui coïnciderait à chaque instant avec le point de contact des deux courbes PQ, RS (fig. 12) : sa vitesse absolue MV est tangente à la courbe fixe RS; sa vitesse relative MV′ par rapport à la figure mobile, est tangente à PQ qui est sa trajectoire relative. Ces deux vitesses étant, par condition, dirigées suivant une même droite (dans le même sens ou non), la vitesse d'entraînement MV″ est aussi dirigée suivant cette droite. Ce qui nous apprend que le point de la figure mobile actuellement en M a sa vitesse dirigée suivant la tangente MV; donc, en vertu du théorème fondamental (19, 1°), *la normale commune aux courbes* PQ, RS, *menée par leur point de contact actuel* M, *va passer par le centre instantané correspondant* C. Une autre condition sera nécessaire pour achever de déterminer C.



Fig. 12.

Le cas du roulement de PQ sur RS est celui où les vitesses MV, MV′ sont égales et de même sens : la vitesse d'entraînement est alors nulle.

Il suit encore du théorème précédent que, si une ligne PQ se meut dans le plan, l'enveloppe des positions successives de cette ligne peut être regardée comme une courbe fixe RS à laquelle elle reste toujours tangente. Le point où la ligne mobile, dans une de ses positions, touche son enveloppe, s'obtiendra donc en abaissant du centre instantané correspondant, déterminé par les conditions qui règlent le mouvement de la ligne PQ, une normale à celle-ci.

4° *Une ligne* PQ *invariablement liée à la figure mobile, est assujettie à passer toujours par un point fixe* A *du plan.* Cas particulier du précédent : la courbe RS se réduit au point A. La normale à PQ menée par le point A, dans une position donnée de la figure, passera par le centre instantané de rotation correspondant à cette position. Un raisonnement direct conduit à la même conclusion.

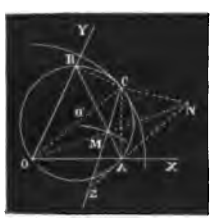


Fig. 13.

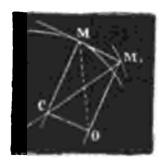
22. *Exemples.* — 1° Une droite AB de longueur constante, glisse par ses extrémités sur deux droites données OX, OY (fig. 13). Un point M de cette droite décrit, comme on sait, une ellipse. On demande le centre instantané, la normale à l'ellipse en M, la courbe fixe et la courbe roulante, etc.

Le point A de la figure mobile décrivant la droite OX, la perpendicu-

laire à OX menée par le point A doit passer par le centre instantané C; de même pour la normale à OY menée par le point B. Le point C est donc déterminé, et la droite CM est la normale à l'ellipse que décrit le point M.

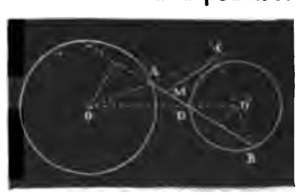
Dans le quadrilatère OACB, les angles A et B sont droits, l'angle O est constant, donc aussi l'angle ACB, et puisque AB est de longueur constante, si l'on décrit sur cette corde le segment capable de l'angle ACB, on aura un cercle passant par le point O et qui sera le lieu du centre instantané sur la figure mobile, ou la courbe roulante. OC est le diamètre de ce cercle; O', milieu de OC, son centre. La distance OC étant constante, il est clair que C décrit, dans le plan fixe, un cercle de rayon OC et de centre O : c'est la courbe fixe. Le mouvement de la droite AB sur ses directrices peut donc être réalisé en faisant rouler intérieurement un cercle sur un cercle de rayon double. L'ellipse est donc une *hypocycloïde*. — On observera que dans ce mouvement chaque point situé sur la circonférence du cercle roulant décrit une droite passant par le centre du cercle fixe.

2° *Podaire d'une courbe donnée* RS *par rapport à un point fixe* O. — On peut la concevoir comme engendrée par le sommet M_1 d'un angle droit OM_1M (fig. 14), dont un côté MM_1 touche la ligne RS en M, l'autre côté passant constamment par le point fixe O. D'après ce qui précède, les normales à ces côtés M_1M et M_1O, menées respectivement par le point de contact M et par le point fixe O, se coupent au centre instantané C. La droite CM_1 est donc la normale cherchée à la podaire.


Fig. 14.

On voit par le rectangle CMM_1O que CM_1 passe par le milieu de la droite OM, ce qui ramène à la construction connue(1).

3° Une droite de longueur constante AB (fig. 15) s'appuie par ses extrémités sur deux circonférences O et O'.


Fig. 15.

Le centre instantané C est au point de concours des rayons OA, O'B prolongés; CM est la normale à la trajectoire d'un point M de la droite AB.

---

(1) Cours d'An., Ch. XIV, ex. 4.

Les vitesses des points A et B sont entr'elles comme les distances de ces points au point C, donc, dans le rapport

$$\frac{CA}{CB} = \frac{\sin CBA}{\sin CAB}.$$

Mais si ω, ω' désignent les vitesses angulaires des rayons OA et O'B autour de leurs centres respectifs, les vitesses linéaires des points A et B sont $\omega \cdot OA$ et $\omega' \cdot O'B$, donc

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{O'B \sin CBA}{OA \sin CAB}.$$

Les vitesses ω et ω' sont donc en raison inverse des perpendiculaires abaissées des centres O et O' sur la droite mobile. Soit D le point où AB coupe OO'; les triangles semblables montrent que ces perpendiculaires sont entr'elles comme les segments OD, O'D, on a donc

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{O'D}{OD},$$

c'est-à-dire que *les vitesses angulaires des rayons* OA, O'B *autour de leurs pivots respectifs sont en raison inverse des segments que fait la droite mobile* AB *sur la droite* OO' *qui joint ces pivots.*

Exercices.

1. On donne, en grandeur, les vitesses de deux points A et B de la figure, et l'angle qu'elles forment entr'elles. Trouver la vitesse angulaire de rotation ω et le centre instantané C.

R. On cherchera la vitesse relative du point B autour du point A, ce qui donnera ω, d'où l'on déduira les distances AC, BC.

2. *Normale à la conchoïde* (chap. I, ex. 2). — *R.* BC (fig. 16) normale à la droite AX que parcourt le point B, OC normale à la droite mobile OBM qui passe par le point fixe O, se coupent au centre instantané C. MC est la normale à la conchoïde en M. La courbe fixe est une parabole ayant pour sommet O et pour axe une perpendiculaire à AX; la courbe mobile rapportée au pôle B et à l'axe polaire BO a pour équation

$$r \cos^2 \theta = a,$$

a étant la distance de O à AX.



Fig. 16.

3. L'enveloppe des tangentes aux trajectoires que décrivent, à un même instant, les divers points d'une droite mobile, est une parabole dont le foyer est au centre instantané et le sommet à la projection de ce centre sur la droite mobile.

4. Une droite de longueur constante AB; le point A parcourt un cercle fixe O, le point B une droite OX passant par le centre du cercle. Trouver 1° la normale à la trajectoire d'un point M de la droite mobile; 2° le lieu du centre instantané dans le plan et dans la figure mobile.

R. **Soient a le rayon du cercle, δ la longueur AB; l'équation polaire de la courbe fixe rapportée à O et à OX est**

$$(r^2 - 2ar)\cos^2\theta + a^2 - \delta^2 = 0;$$

celle de la courbe mobile, rapportée au pôle A et à l'axe polaire AB, est

$$r(a + \delta\cos\theta) = \delta(\delta + a\cos\theta).$$

5. La droite de longueur constante AB reste tangente à un cercle fixe de centre O, son extrémité A parcourt la droite fixe DE, tangente en D à ce cercle. Trouver le centre instantané C, le lieu de ce point dans le plan et dans la figure.

R. **C'est à égale distance de O et de DE, la roulette fixe est une parabole dont O est le foyer, DE la directrice, la roulette mobile une parabole égale dont A est le foyer, la directrice OS normale à OC.**

6. Une courbe PQ glisse par un de ses points M sur une courbe fixe RS : chercher le centre instantané de rotation pour une position donnée de PQ, et montrer que la normale en M à la ligne PQ roule sur la développée de la courbe RS. Si, au contraire, le point M de contact était un point donné de la courbe RS, la développée de la courbe PQ roulerait sur la normale à la courbe RS en M.

§ 3. MOUVEMENT D'UN SOLIDE 1° PARALLÈLEMENT A UN PLAN FIXE, 2° AUTOUR D'UN POINT FIXE.

22. ***Mouvement parallèle à un plan fixe.*** **— Soit un solide quelconque S et un plan fixe MN; un point A du solide est supposé décrire une trajectoire AA′ plane et parallèle au plan MN, tandis qu'une droite AB du solide, normale au plan, reste constamment parallèle à elle même.**

Il suit des principes de la géométrie 1° que le point B du solide décrira une courbe plane BB′, parallèle à MN, parfaitement égale à AA′; 2° que ces deux points A, B auront à chaque instant des vitesses égales et parallèles, et qu'il en sera de même de tout autre point du solide, situé sur la droite AB; 3° que tout autre point C du solide, étant à des distances invariables de A et B, ne peut se mouvoir que dans un plan parallèle au plan MN; 4° qu'enfin, deux points quelconques du solide situés sur une même perpendiculaire au plan MN, ont à chaque instant des vitesses égales et parallèles et décrivent des trajectoires égales.

Le mouvement du solide, ainsi défini, est dit *parallèle au plan fixe* MN.

Il suit évidemment des propriétés précédentes que le mouvement d'un point du solide fait connaître le mouvement de tous les points situés sur la même normale au plan MN; donc, si l'on connaît le mouvement de la section fait dans le solide par le plan MN (ou par un plan parallèle à MN), on connaîtra entièrement le mouvement du solide. On voit donc que *le mouvement d'un solide parallèlement à un plan fixe se ramène au mouvement d'une figure plane sur son plan*, et qu'il nous suffira d'appliquer ici les propriétés développées au chapitre IV.

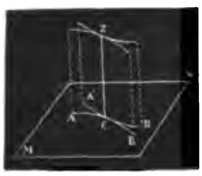


Fig. 17.

Soit C (fig. 17) le centre instantané de rotation de la section plane, à une époque quelconque, CZ une normale au plan MN; tout point du solide situé sur CZ a une vitesse actuelle nulle, et tout point du solide a la même vitesse, en grandeur et en direction, que si le solide tournait actuellement autour de CZ avec une certaine vitesse angulaire. Ainsi le mouvement du solide est une rotation instantanée, et CZ est l'*axe instantané* de rotation.

Soient ACB la courbe fixe, A'CB' la courbe dont le roulement sur ACB réalise le déplacement de la section plane dans son plan. Le lieu de l'axe instantané de rotation dans l'espace est évidemment la surface cylindrique qui a pour base ACB et pour génératrice CZ; de même, le lieu de l'axe instantané dans le solide est la surface cylindrique dont A'CB' est la base, CZ la génératrice. Concevons que ce second cylindre soit lié au solide et se meuve avec lui : il est clair 1° qu'à chaque instant les cylindres AZCB, A'ZCB' se touchent tout le long de la génératrice commune CZ, c'est à dire de l'axe actuel de rotation; 2° que, les courbes A'CB', ACB ne faisant que *rouler* l'une sur l'autre, il en est de même des sections planes faites par un plan quelconque parallèle à MN dans les deux cylindres; donc *la surface cylindrique qui est le lieu de l'axe instantané dans le solide ne fait que rouler, sans glissement, sur la surface cylindrique qui est le lieu de l'axe instantané dans l'espace.* Nous exprimerons cette propriété remarquable en disant que *le mouvement le plus général d'un solide parallèlement à un plan fixe est un roulement cylindrique.*

24. *Mouvement autour d'un point fixe.* — Pour étudier analytique-

ment le mouvement d'un solide fixé par un point O, nous concevrons trois axes rectangulaires fixes (fig. 18) OX, OY, OZ, passant par ce point, et trois axes Oξ, Oη, Oζ liés au solide et emportés dans son mouvement, de sorte que leur position à un instant quelconque suffit pour déterminer celle du solide. Soient a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' les cosinus directeurs des trois axes mobiles par rapport à chacun des axes fixes, à l'époque t;



Fig. 18.

x, y, z les coordonnées par rapport à OXYZ d'un point quelconque M du solide; ξ, η, ζ ses coordonnées *invariables* par rapport au système mobile O$\xi\eta\zeta$. Nous avons donc les relations connues

$$(1)\quad \begin{cases} x = a\xi + b\eta + c\zeta, \\ y = a'\xi + b'\eta + c'\zeta, \\ z = a''\xi + b''\eta + c''\zeta, \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \\ b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, \\ c^2 + c'^2 + c''^2 = 1, \end{cases} \qquad (3)\quad \begin{cases} bc + b'c' + b''c'' = 0, \\ ca + c'a' + c''a'' = 0, \\ ab + a'b' + a''b'' = 0, \end{cases}$$

Les dérivées, par rapport au temps, des coordonées x, y, z nous donnent les composantes de la vitessse du point M, parallèlement à OX, OY, OZ :

$$(4)\quad \begin{cases} v_x = \xi\dfrac{da}{dt} + \eta\dfrac{db}{dt} + \zeta\dfrac{dc}{dt}, \\ v_y = \xi\dfrac{da'}{dt} + \eta\dfrac{db'}{dt} + \zeta\dfrac{dc'}{dt}, \\ v_z = \xi\dfrac{da''}{dt} + \eta\dfrac{db''}{dt} + \zeta\dfrac{dc''}{dt}. \end{cases}$$

Pour les projections v_ξ, v_η, v_ζ de cette même vitesse sur les axes mobiles Oξ, Oη, Oζ considérés dans leur position actuelle, nous aurons, d'après le théorème des projections,

$$(5)\quad \begin{cases} v_\xi = av_x + a'v_y + a''v_z, \\ v_\eta = bv_x + b'v_y + b''v_z, \\ v_\zeta = cv_x + c'v_y + c''v_z. \end{cases}$$

Mais les équations (2) et (3), différentiées, nous donnent

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} a\frac{da}{dt}+a'\frac{da'}{dt}+a''\frac{da''}{dt}&=0,\\ b\frac{db}{dt}+b'\frac{db'}{dt}+b''\frac{db''}{dt}&=0,\\ c\frac{dc}{dt}+c'\frac{dc'}{dt}+c''\frac{dc''}{dt}&=0,\end{aligned}\right.$$

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} c\frac{db}{dt}+c'\frac{db'}{dt}+c''\frac{db''}{dt}&=-\left(b\frac{dc}{dt}+b'\frac{dc'}{dt}+b''\frac{dc''}{dt}\right)=p,\\ a\frac{dc}{dt}+a'\frac{dc'}{dt}+a''\frac{dc''}{dt}&=-\left(c\frac{da}{dt}+c'\frac{da'}{dt}+c''\frac{da''}{dt}\right)=q,\\ b\frac{da}{dt}+b'\frac{da'}{dt}+b''\frac{da''}{dt}&=-\left(a\frac{db}{dt}+a'\frac{db'}{dt}+a''\frac{db''}{dt}\right)=r,\end{aligned}\right.$$

p, q, r désignant donc des quantités qui dépendent seulement du mouvement des axes mobiles. Portant dans les équations (5) les valeurs (4) de v_x v_y v_z et ayant égard aux formules (6) et (7), on trouvera

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} v_\xi&=q\zeta-r\eta,\\ v_\eta&=r\xi-p\zeta,\\ v_\zeta&=p\eta-q\xi.\end{aligned}\right.$$

Or, si nous rapprochons ces valeurs de v_ξ, v_η, v_ζ des équations (2) du n° 17, nous en concluons immédiatement que *les vitesses de tous les points du solide à un instant quelconque sont les mêmes en grandeur et en direction que si le solide tournait actuellement autour d'un axe* OR *passant par le point fixe et ayant pour projections respectives sur les axes* $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, *les quantités* p, q, r, définies par les relations (7).

Le mouvement du solide à chaque instant est donc une rotation instantanée, et OR est l'*axe instantané* de rotation. Les cosinus directeurs de cet axe rapportés à $O\xi\eta\zeta$, et la vitesse angulaire ω de la rotation instantanée, sont donnés par les formules

$$\omega=\sqrt{p^2+q^2+r^2},\quad \cos\alpha=\frac{p}{\omega},\quad \cos\beta=\frac{q}{\omega},\quad \cos\gamma=\frac{r}{\omega}.$$

Les équations (8) font voir d'ailleurs que tout point du solide situé sur la droite dont les équations sont

$$\frac{\xi}{p}=\frac{\eta}{q}=\frac{\zeta}{r},$$

a actuellement une vitesse nulle.

25. L'axe instantané varie incessamment de grandeur et de direction, puisque p, q, r sont des fonctions du temps. Le lieu de l'axe OR par rapport au système fixe OXYZ est donc une surface conique OARB dont O est le sommet. D'autre part, cet axe se déplace dans l'intérieur du solide, et décrit par rapport au système $O\xi\eta\zeta$ une autre surface conique : soit OA'RB' cette surface dans la position qu'elle occupe à l'instant considéré, OR étant l'axe instantané ou la génératrice commune aux deux cônes. Si l'on coupe ces deux surfaces par une sphère de centre O et de rayon quelconque, on démontrera, par un raisonnement déjà employé dans l'étude des mouvements plans (n° 20), que la section A'RB' du cône mobile roule, sans glisser, sur la section ARB du cône fixe. Il suit évidemment de là 1° que les surfaces coniques OARB, OA'RB' ont même plan tangent tout le long de la génératrice commune OR; 2° que les portions de ces surfaces coniques, comprises entre les génératrices qui viennent successivement coïncider deux-à-deux, sont égales; en d'autres termes, que le cône OA'RB' *roule* simplement sur le cône OARB. D'où ce théorème général, qui fournit une idée nette du mouvement :

Le mouvement le plus général d'un solide autour d'un point fixe O *est réalisé en faisant rouler un cône, lié au solide, sur un cône fixe de même sommet* O; *le second de ces cônes étant le lieu de l'axe instantané de rotation dans l'espace; le premier, le lieu de cet axe dans le solide même.*

Les composantes p, q, r de l'axe instantané, qui sont données par les formules (7) en fonction des quantités $a, b, c, \frac{da}{dt} \cdots$ dont dépend le mouvement des axes mobiles, jouissent de propriétés remarquables que nous étudierons plus loin.

Exercices.

1. Démontrer les relations suivantes :

$$\frac{da}{dt} = br - cq, \quad \frac{da'}{dt} = b'r - c'q, \quad \frac{da''}{dt} = b''r - c''q,$$

$$\frac{db}{dt} = cp - ar, \quad \frac{db'}{dt} = c'p - a'r, \quad \frac{db''}{dt} = c''p - a''r,$$

$$\frac{dc}{dt} = aq - bp, \quad \frac{dc'}{dt} = a'q - b'p, \quad \frac{dc''}{dt} = a''q - b''p.$$

R. On comparera les valeurs de v_x, v_y, v_z des équations (4), avec celles que l'on déduit des équations (8) et du théorème des projections.

2. Démontrer que l'axe instantané de rotation OR ne peut occuper une position invariable dans le solide, sans être également fixe dans l'espace.

3. Un solide, fixé par un point O, se meut de telle manière que deux de ses droites, OA et OB (fig. 19), comprenant un angle droit, se meuvent respectivement dans deux plans fixes OO'X, OO'Y; on connaît la vitesse angulaire ε de la droite OA dans le plan OO'X à l'époque t. On demande de déterminer l'axe instantané OR, la vitesse angulaire ε' de la droite OB dans le plan OO'Y et la vitesse angulaire ω de la rotation instantanée, au même instant.

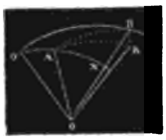


Fig. 19.

R. Soient λ l'angle des deux plans fixes; α et β les angles O'OA, O'OB, de sorte que

$$\varepsilon = \frac{d\alpha}{dt}, \quad \varepsilon' = \frac{d\beta}{dt}.$$

L'axe instantané OR est l'intersection de deux plans, respectivement normaux à OO'X, OO'Y suivant OA et OB. On a

$$tg\,\alpha\,tg\,\beta = -\frac{1}{\cos\lambda}, \quad \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = -\frac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha} = \frac{\cos\lambda}{\cos^2\alpha + \cos^2\lambda\sin^2\alpha},$$

$$\omega = \varepsilon\sqrt{\frac{1 - \sin^2\lambda\sin^2\alpha\sin^2\beta}{1 - \sin^2\lambda\sin^2\alpha}}.$$

4. Soient, dans le mouvement autour d'un point fixe, θ la vitesse angulaire avec laquelle l'axe instantané se déplace dans l'espace; r, ρ les rayons de courbure des sections faites normalement à l'axe instantané dans le cône fixe et le cône roulant, à l'unité de distance de l'axe. On a

$$\omega = \theta\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\rho}\right).$$

§ 4. DE LA RÉDUCTION DES MOUVEMENTS D'UN SOLIDE, ET DU MOUVEMENT D'UN SOLIDE ENTIÈREMENT LIBRE.

26. *Réduction des mouvements de translation.* — Soit un solide S animé *simultanément* de plusieurs mouvements de translation, dans le sens attaché à cette expression, savoir, que le solide a un mouvement de translation par rapport à un système invariable O'ξηζ qui a lui-même un mouvement de translation par rapport à un deuxième système OXYZ, et ainsi de suite. D'après la règle de la composition des vitesses dans les mouvements relatifs (**12**), la vitesse absolue ou totale MV d'un point quelconque M du solide sera la résultante de sa vitesse relative MV' par rapport au système O'ξηζ, de sa vitesse d'entraînement MV'' due au

mouvement de ce premier système par rapport au second, et ainsi de suite. Mais pour tout autre point M′ du solide, en vertu de la définition même d'un mouvement de translation, la vitesse relative sera égale et parallèle à MV′, la première vitesse d'entraînement à MV″, etc.; toutes les vitesses composantes du point M′ seront respectivement égales et parallèles à celles du point M. et il en sera de même de sa vitesse totale. Donc tous les points du solide ont, à un même instant, dans le mouvement absolu, des vitesses égales et parallèles et *le mouvement du solide est une translation*, dont la vitesse est déterminée en grandeur et en direction par celle d'un point quelconque M, c'est-à-dire par la construction indiquée. D'où ce théorème :

Quand un solide est animé à la fois de plusieurs translations, son mouvement total est une translation, et l'on obtient, à chaque instant, la vitesse de cette translation, en portant à partir d'un point arbitraire M *du solide des droites représentant les vitesses correspondant à chacune des translations dont le solide est animé, et en construisant leur résultante.*

Il est clair que cette règle s'applique également au cas où les mouvements composants seraient des *translations instantanées.*

27. *Réduction des rotations autour d'axes concourants.* — Soit d'abord un solide S animé de deux rotations simultanées autour de deux axes se coupant en un point O, en sorte que son mouvement relatif à $O\xi\eta\zeta$ soit une rotation représentée par l'axe OP (16), le mouvement de $O\xi\eta\zeta$ par rapport à OXYZ étant une rotation représentée par l'axe OP′ (fig. 20). Soient, parallèlement aux trois axes rectangulaires OX, OY,

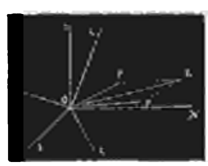


Fig. 20.

OZ, p, q, r les composantes de l'axe OP; p', q', r' celles de l'axe OP′; x, y, z les coordonnées d'un point quelconque M du solide. D'après les formules (2) du n° 17, les composantes parallèles à OX, OY, OZ de la vitesse relative du point M sont

$$qz - ry, \quad rx - pz, \quad py - qx;$$

celles de sa vitesse d'entraînement

$$q'z - r'y, \quad r'x - p'z, \quad p'y - q'x;$$

donc, les composantes de sa vitesse absolue sont

$$(q+q')z - (r+r')y, \; (r+r')x - (p+p')z, \; (p+p')y - (q+q')x.$$

Ces expressions, d'après les mêmes formules (2), font voir que le solide

tourne actuellement autour d'un axe OR passant par O, et dont les composantes suivant OX, OY, OZ sont respectivement $p + p'$, $q + q'$, $r + r'$; d'où il suit (2) que OR est la résultante de OP, OP′.

D'où ce théorème : *Quand un solide est animé de deux rotations simultanées autour de deux axes passant par un même point* O, *son mouvement est une rotation autour d'un troisième axe passant par ce point, et si l'on mène, à partir du point* O, *les axes représentatifs* OP, OP′ *des rotations simultanées, la diagonale du parallélogramme construit sur* OP, OP′ *sera l'axe représentatif de la rotation totale.*

Cette règle constitue le *parallélogramme des rotations;* comme il ne s'agit toujours que des vitesses dont les points du solide sont animés, elle s'applique aussi bien à des rotations instantanées qu'à des rotations continues.

28. Il suit évidemment de la règle précédente que des rotations simultanées en nombre quelconque, dont les axes partent d'un même point, se réduisent à une rotation unique dont l'axe représentatif est la résultante des axes représentatifs des rotations données. En particulier, si le solide tourne simultanément autour de trois axes $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ se coupant à angles droits, avec les vitesses angulaires respectives p, q, r (que l'on affecte du signe + ou du signe — suivant le sens dans lequel chaque axe de rotation est dirigé à partir de O), le mouvement total du solide se réduira à une rotation instantanée autour de la diagonale OR du parallélipipède construit sur les axes de ces rotations p, q, r. Donc, les angles α, β, γ que fait OR avec $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, et la vitesse angulaire ω de la rotation instantanée, seront donnés par les formules

$$p = \omega \cos \alpha, \quad q = \omega \cos \beta, \quad r = \omega \cos \gamma,$$
$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}.$$

Cette remarque fournit une nouvelle interprétation des quantités p, q, r que nous avons introduites (24) dans la théorie de la rotation autour d'un point fixe. On voit qu'elles représentent les vitesses des trois rotations simultanées qu'il faudrait imprimer au solide, autour des axes mobiles $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, à un instant quelconque, pour lui donner la rotation instantanée OR dont il est animé à la même époque.

Réciproquement, toute rotation instantanée ou continue d'un solide autour d'un axe quelconque OR pourra être remplacée par trois rotations simultanées p, q, r autour de trois axes rectangulaires de même origine

que le premier; et les axes représentatifs de ces rotations relatives se déterminent, soit par la construction du parallélipipède, soit par les formules ci-dessus qui donnent p, q, r en fonction de ω, α, β, γ.

29. La composition des rotations permet d'exprimer les composantes p, q, r (**25**) de l'axe instantané OR, dans la rotation autour d'un point fixe, non plus au moyen des neuf fonctions $a, b, c, \ldots$ du temps liées entr'elles par six équations, mais au moyen de trois angles seulement, qui suffisent pour définir la position des axes mobiles par rapport aux axes fixes. Soient OX_1 (fig. 21) la trace du plan $\xi\eta$ sur le plan XY, $\psi = XOX_1$ l'angle compris entre cette trace et l'axe OX; $\varphi = X_1O\xi$ l'angle entre cette trace OX_1 et l'axe $O\xi$ dans le plan $\xi\eta$; $\theta = ZO\zeta$ l'angle compris entre les axes *positifs* OZ, $O\zeta$. La trace OX_1 normale au plan $ZO\zeta$ est menée du côté de ce plan pour lequel la rotation de OZ vers $O\zeta$ serait vue de la gauche vers la droite; l'angle ψ est compté à partir de OX, positivement dans le sens de OX vers OY, de 0° à 360°; l'angle φ est compté à partir de OX_1 dans le sens de $O\xi$ vers $O\eta$, de zéro à 360°. Il est clair que la connaissance des angles ψ, θ, φ suffit pour déterminer complétement la situation du système $O\xi\eta\zeta$ et par suite celle du solide : on peut donc exprimer p, q, r en fonction des angles θ, ψ, φ et de leurs dérivées par rapport au temps.

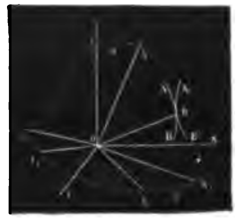


Fig. 21.

Pendant un temps infiniment petit dt, le système $O\xi\eta\zeta$ éprouve un déplacement infiniment petit, et les angles ψ, θ, φ varient de quantités infiniment petites $d\psi$, $d\theta$, $d\varphi$. Or, on peut produire ces variations, et par conséquent amener le système $O\xi\eta\zeta$ dans sa nouvelle position, par trois rotations *simultanées*, en faisant tourner ce système d'un angle égal à $d\psi$ autour de l'axe OZ, en même temps que le plan $\xi\eta$ tourne autour de OX_1 d'un angle égal à $d\theta$, et que, dans ce plan $\xi\eta$, les axes $O\xi$, $O\eta$ tournent autour de $O\zeta$ d'un angle égal à $d\varphi$. On voit par là, évidemment, que le déplacement infiniment petit total du solide, et par suite les vitesses de ses différents points à l'instant t que l'on considère, sont rigoureusement les mêmes que si le solide tournait simultanément autour des trois axes OZ, OX_1, $O\zeta$, avec les vitesses angulaires respectives $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$, dans le sens indiqué par les signes de ces dérivées. Donc, si l'on compose ces trois rotations instantanées, on retrouvera en grandeur et en direction

l'axe instantané de rotation OR, dont les projections sur $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ sont p, q, r. Donc, appliquant le premier théorème sur les résultantes (**8**), on aura

$$\left\{\begin{aligned} p &= \frac{d\psi}{dt}\cos\overline{Z\xi} + \frac{d\theta}{dt}\cos\overline{X_1\xi} + \frac{d\varphi}{dt}\cos\overline{\zeta\xi}; \\ q &= \frac{d\psi}{dt}\cos\overline{Z\eta} + \frac{d\theta}{dt}\cos\overline{X_1\eta} + \frac{d\varphi}{dt}\cos\overline{\zeta\eta}; \\ r &= \frac{d\psi}{dt}\cos\overline{Z\zeta} + \frac{d\theta}{dt}\cos\overline{X_1\zeta} + \frac{d\varphi}{dt}\cos\overline{\zeta\zeta}. \end{aligned}\right.$$

On a évidemment

$$\cos\overline{X_1\xi} = \cos\varphi, \quad \cos\overline{X_1\eta} = -\sin\varphi, \quad \cos\overline{X_1\zeta} = 0,$$
$$\cos\overline{\zeta\xi} = 0, \quad \cos\overline{\zeta\eta} = 0, \quad \cos\overline{\zeta\zeta} = 1.$$

Rapportée au système $O\xi\eta\zeta$, la droite OZ fait avec $O\zeta$ un angle θ, et le plan $Y_1ZO\zeta$ avec $\xi O\zeta$ un angle $90° - \varphi$, les cosinus directeurs de OZ sont donc

$$\cos\overline{Z\xi} = \sin\theta\sin\varphi, \quad \cos\overline{Z\eta} = \sin\theta\cos\varphi, \quad \cos\overline{Z\zeta} = \cos\theta;$$

donc enfin,

$$\text{(A)} \qquad \left\{\begin{aligned} p &= \sin\theta\sin\varphi\frac{d\psi}{dt} + \cos\varphi\frac{d\theta}{dt}, \\ q &= \sin\theta\cos\varphi\frac{d\psi}{dt} - \sin\varphi\frac{d\theta}{dt}, \\ r &= \cos\theta\frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}. \end{aligned}\right.$$

Ces formules, dont nous ferons usage par la suite, s'obtiennent également en exprimant les cosinus a, b, c,... en fonction des angles ψ, θ, φ par la trigonométrie sphérique, et substituant leurs valeurs dans les formules (7) du chapitre précédent.

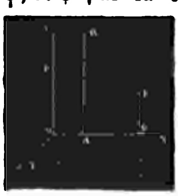


Fig. 22.

30. *Réduction des rotations autour d'axes parallèles.* — Supposons maintenant qu'un solide soit animé de deux rotations simultanées, dans le même sens, autour de deux axes parallèles, avec des vitesses angulaires ω, ω'. Prenons l'un de ces axes pour axe des z positifs, le plan ZOX passant par l'autre, et soient $OP = \omega$, $O'P' = \omega'$ (fig. 22) les axes représentatifs de ces deux rotations, $OO' = \delta$ la

distance des deux axes. Les composantes parallèles à OX, OY, OZ de la vitesse d'un point (x, y, z) du solide, due à la rotation OP, sont comme on l'a vu (17),

$$-\omega y, \quad \omega x, \quad 0;$$

celles de la vitesse due à la rotation O′P′

$$-\omega' y, \quad \omega'(x-\delta), \quad 0;$$

donc, celles de la vitesse totale sont

$$(1) \qquad v_x = -(\omega+\omega')y, \quad v_y = (\omega+\omega')x - \omega'\delta, \quad v_z = 0,$$

et si l'on détermine une quantité α par l'équation

$$(2) \qquad \omega'\delta = (\omega+\omega')\alpha,$$

leurs valeurs deviennent

$$(3) \qquad v_x = -(\omega+\omega')y, \quad v_y = (\omega+\omega')(x-\alpha), \quad v_z = 0.$$

Ces équations (3), comparées à celles du n° 17 qui donnent les composantes de la vitesse dans une rotation autour d'un axe parallèle à l'axe des z, montrent que le mouvement absolu du solide est une rotation autour d'un axe AR parallèle aux deux premiers, coupant l'axe OX en un point A pour lequel $y = 0$, $x = \alpha$, rotation dont la vitesse angulaire $\omega_1 = \omega + \omega'$ est de même sens que celles des rotations composantes. On a d'ailleurs, par l'équation (2),

$$(4) \qquad \frac{\alpha}{\omega'} = \frac{\delta}{\omega+\omega'} = \frac{\delta-\alpha}{\omega},$$

ou

$$\frac{\text{OA}}{\text{O'P'}} = \frac{\text{O'A}}{\text{OP}} = \frac{\text{OO'}}{\text{AR}},$$

ce qui montre que chacun des segments OA, O′A, OO′ compris sur la perpendiculaire OX entre deux des axes de rotation, est proportionnel au troisième axe.

Si la rotation autour de O′P′ était de sens contraire à celle autour de OP, on déterminerait par un calcul semblable l'axe de la rotation absolue, mais il est plus simple de ramener ce cas au premier par la convention suivante. Observons que, si l'on renverse le sens d'une des rotations OP, O′P′, AR, les composantes de la vitesse d'un point quelconque M due à cette rotation ne font que changer de signe, ce qui revient, d'après les

expressions données plus haut de ces composantes, à changer le signe de la vitesse angulaire ω, ω' ou ω_1 autour de cet axe. Mais comme en même temps, d'après la convention établie pour représenter le sens d'une rotation (16), la direction de l'axe de cette rotation se change dans la direction opposée, on voit qu'il suffit d'attribuer à chaque vitesse angulaire le signe conforme à la direction de l'axe de la rotation correspondante par rapport à l'axe des z positifs. Cette règle admise, il est visible que le calcul ci-dessus s'applique à tous les cas : la vitesse ω_1 sera toujours égale à la somme algébrique $\omega + \omega'$ des vitesses composantes, et le signe + ou — dont elle sera affectée déterminera la direction positive ou négative de l'axe AR, c'est-à-dire le sens de la rotation; α pourra être positif ou négatif, et son signe déterminera la position du point A sur OO′ ou sur son prolongement. Enfin, les équations (4), subsistant dans tous les cas, feront voir que les segments OA, O′A, OO′ sont toujours proportionnels aux axes O′P′, OP, AR. De là ce théorème général :

Deux rotations simultanées d'un solide autour de deux axes parallèles se réduisent à une rotation unique autour d'un troisième axe, parallèle aux premiers et situé dans le même plan. La vitesse angulaire de cette rotation résultante est égale à la somme algébrique des vitesses angulaires des rotations composantes, et le signe dont elle est affectée indique le sens dans lequel elle s'effectue. Enfin, la longueur de l'axe représentatif de chacune de ces rotations est proportionnelle au segment compris, sur une perpendiculaire aux trois axes, entre les directions des deux autres.

Tout est ainsi déterminé concernant la rotation totale AR. La réduction d'un nombre quelconque de rotations autour d'axes parallèles se fera maintenant sans difficulté : après avoir déduit, de la règle précédente, l'axe de la rotation équivalente à deux des rotations données, on composera cette rotation avec une troisième par la même règle, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on ait ramené toutes les rotations à une seule.

21. Le problème traité ci-dessus présente un cas d'exception remarquable, celui où les axes OP, O′P′ sont égaux et dirigés en sens contraire, en sorte que

$$\omega' = -\omega.$$

On trouve $\omega_1 = 0$, $\alpha = \infty$, mais l'interprétation de ce résultat est simple si l'on remonte aux équations (1). On voit alors que

$$v_x = 0, \quad v_y = -\omega'\delta = \omega\delta, \quad v_z = 0,$$

donc les composantes v_x, v_y, v_z sont indépendantes de x, y, z; tous les points du solide ont des vitesses égales et parallèles, *le mouvement du solide se réduit à une translation*. De plus, v_x et v_z étant nuls, la vitesse de cette translation est parallèle à OY, égale à $\omega\delta$ ou au produit de la vitesse angulaire autour de OP par la distance comprise entre les deux axes, et son signe dépend du signe de ce produit. Plus simplement, en observant que le point O′ a pour coordonnées δ, o, o, on voit que *cette vitesse de la translation résultante est identique, en grandeur et en direction, avec la vitesse dont le point* O′ *est animé dans la rotation primitive autour de l'axe* OP.

Ce résultat, d'ailleurs évident de lui-même, est vrai également de la vitesse du point O dans la rotation autour de O′P′.

Deux rotations simultanées d'un solide autour de deux axes parallèles, avec des vitesses égales et de sens contraire, constituent ce qu'on appelle un *couple de rotations*, et le théorème que nous venons d'établir consiste en ce que *un couple de rotations équivaut à une translation*, dont la vitesse est déterminée fort simplement en grandeur, en direction et en sens par la règle ci-dessus.

22. La considération des couples de rotation conduit à une réduction facile des mouvements de translation et de rotation dont on suppose un solide animé.

Soient OP (fig. 23) l'axe représentatif d'une rotation, O′ un point quelconque du solide ou qui lui soit invariablement lié; menons deux axes de rotation O′P′, O′P″, égaux et parallèles à OP, mais opposés l'un à l'autre. Nous ne changeons évidemment rien au mouvement du solide en lui attribuant, outre la rotation OP, les rotations égales et de sens contraires O′P′, O′P″, puisque les vitesses d'un même point dues à ces dernières étant égales et opposées se détruisent complétement et la vitesse totale se réduit à la vitesse due à la rotation OP. Mais les rotations OP, O′P″ constituent un couple équivalent à une translation, dont la vitesse O′V, normale au plan POO′, est la même que la vitesse du point O′ dans la rotation représentée par OP. Donc



Fig. 23.

Toute rotation d'un solide autour d'un axe OP *peut être remplacée par une rotation de vitesse angulaire égale, dans le même sens, autour d'un axe parallèle passant par un point* O′ *choisi comme on le veut,*

pourvu qu'on joigne à cette dernière rotation une translation dont la vitesse coïncide, en grandeur et en direction, avec la vitesse dont le point O′ était animé dans la rotation autour de OP.

Cela posé, concevons un solide animé d'un nombre quelconque de translations et de rotations simultanées autour d'axes quelconques. Prenons un point arbitraire O dans le solide (ou lié au solide), et substituons à l'une des rotations données AP, une rotation représentée par un axe égal et parallèle OQ, et une translation dont la vitesse soit OV, en conformité avec la règle ci-dessus. Remplaçons de même une seconde rotation A′P′ par une rotation OQ′ et une translation OV′, et ainsi de suite. Toutes les rotations OQ, OQ′, ... dont les axes se coupent en un même point O, se réduisent à une rotation unique dont l'axe représentatif sera la résultante des axes représentatifs OQ, OQ′ ... (**28**). D'autre part, les translations dont le solide était primitivement animé, et les translations nées du déplacement des axes AP, A′P′, ... parallèlement à eux-mêmes, se réduisent aussi à une translation unique, dont la vitesse sera représentée en grandeur et en direction par la résultante des vitesses de ces translations, transportées en un même point, par exemple au point O (**26**). Donc enfin

Quel que soit le nombre des translations et des rotations dont on suppose un solide animé simultanément, on peut toujours les réduire à une seule translation et à une seule rotation, l'axe de cette rotation pouvant même passer par un point choisi arbitrairement.

Observons toujours que le sens de ces divers théorèmes est celui que nous avons plusieurs fois rappelé, savoir 1° lorsque nous parlons de mouvements simultanés d'un solide, cela s'entend de son mouvement relatif et de ses mouvements d'entraînement par rapport à divers systèmes de comparaison; 2° toutes les propriétés se rapportent aux *vitesses* dont les points du solide sont animés à un même instant quelconque, et s'étendent par suite à des translations et à des rotations instantanées. Mais on ne pourrait les appliquer au mouvement réel d'un solide, même pendant un temps infiniment petit, s'il s'agissait de calculer des éléments infiniment petits du second ordre par rapport à ce temps.

32. L'étude du mouvement d'un solide libre est facile maintenant. Soit O un point déterminé du solide, et concevons par ce point trois axes OX, OY, OZ (fig. 24) qui se meuvent en restant parallèles respectivement à trois axes rectangulaires fixes AX_1, AY_1, AZ_1. Prenons OXYZ

pour système de comparaison. Ce système est donc animé à chaque instant d'un mouvement de translation, dont la vitesse coïncide avec la vitesse OV du point O du solide. Mais le mouvement relatif du solide par rapport au système OXYZ ne peut être que le mouvement d'un solide autour d'un point fixe, puisque le point O du solide est fixe dans le système de comparaison; c'est donc une rotation autour d'un axe instantané OR qui peut varier constamment de grandeur et de direction. Donc



Fig. 24.

Le mouvement le plus général d'un solide libre, à un instant quelconque, se compose d'une translation dont la vitesse est égale et parallèle à celle d'un point O *choisi à volonté dans le solide, et d'une rotation instantanée autour d'un axe* OR *passant par ce point.*

Il suit de là et de la règle de composition des vitesses que, si u_x, u_y, u_z désignent les projections de la vitesse du point O sur les axes OX, OY, OZ; p, q, r les composantes de l'axe instantané OR suivant ces mêmes axes; x, y, z les coordonnées d'un point quelconque M du solide rapporté à ces axes et v_x, v_y, v_z les composantes de sa vitesse totale, nous aurons

$$v_x = u_x + qz - ry,$$
$$v_y = u_y + rx - pz,$$
$$v_z = u_z + py - qx.$$

La vitesse de translation OV dépend évidemment du choix du point O dans le solide, mais *l'axe instantané* OR *a même grandeur et même direction, quel que soit le point choisi.* En effet, supposons qu'on prenne un autre point O′ du solide (fig. 25), et qu'on substitue à la rotation OR une rotation O′R′ dont l'axe soit égal et parallèle à OR, accompagnée d'une translation O′V₁, normale au plan ROO′ et déterminée par la règle ci-dessus. La vitesse de translation primitive OV, transportée au point O′ en O′V′, se compose avec O′V₁ et donne une translation unique O′V″. En résumé, sans que rien soit changé au mouvement instantané du solide, la translation OV et la rotation OR sont remplacées par la translation O′V″ et la rotation O′R′. Mais la vitesse du point O′ dans la rotation O′R′ étant nulle, sa vitesse totale se con-

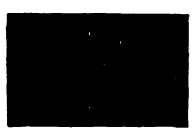


Fig. 25.

fond avec celle de la nouvelle translation O′V″; donc la rotation O′R′ est précisément celle que l'on aurait trouvée d'abord, si l'on avait choisi le point O′ au lieu du point O; et comme O′R′ est égal et parallèle à OR, de là résulte la propriété énoncée.

34. Enfin, l'on peut choisir le point autour duquel on fait tourner le solide de telle manière que la vitesse de translation et l'axe de rotation soient dirigés suivant une même droite. Soient, pour une origine quelconque O, OV la translation et OR la rotation correspondantes (fig. 26). Décomposons la vitesse OV en deux autres, l'une OV_1 dirigée suivant l'axe instantané de rotation, l'autre OV_2 perpendiculaire à cet axe. Dans le plan mené par OR normalement à OV_2, cherchons un point O′ tel, que sa vitesse O′V″, due à la rotation représentée par l'axe OR et qui est évidemment parallèle à OV_2, soit égale à OV_2, mais de sens contraire. La détermination d'un tel point est facile par la relation qui existe entre la distance d'un point à l'axe de rotation, la vitesse angulaire de rotation et la vitesse du point (**16**), et il est même facile de voir que tous les points d'une certaine droite, parallèle à OR, vérifient la condition demandée.

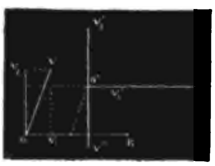


Fig. 26.

Ce point trouvé, transportons-y l'axe OR suivant O′R′; la translation engendrée par ce déplacement de l'axe de rotation aura précisément pour vitesse O′V″, d'après la règle du n° 32, et si on la compose avec les vitesses des translations $O'V'_1$, $O'V'_2$, respectivement égales et parallèles à OV_1, OV_2, on aura la translation correspondant au point O′. Mais les translations O′V″, $O'V'_2$ se détruisent; il reste donc simplement la translation $O'V'_1$, dirigée suivant l'axe O′R′, et la rotation instantanée représentée par cet axe. On obtient ainsi le théorème de Giulio Mozzi :

A un instant quelconque, les vitesses de tous les points d'un solide libre sont les mêmes, en grandeur et en direction, que si le solide tournait actuellement autour d'un certain axe, en même temps qu'il glisse le long de cet axe, appelé *axe instantané de rotation et de glissement* ou *axe de Mozzi*(1).

(1) M. De Tilly a démontré directement ce théorème d'une manière très simple, dans les *Bulletins de l'Académie de Belgique*, t. XXXV, 2e série.

Ce mouvement d'un solide est *celui d'une vis dans son écrou*.

D'ailleurs, la vitesse $O'V'_1$ de translation du solide suivant l'axe instantané est, d'après ce qui précède, égale à la composante OV_1 de la vitesse totale du point O suivant OR; et comme le point O est quelconque, *les projections des vitesses de tous les points d'un solide à un même instant, sur l'axe instantané de glissement et de rotation qui répond à cet instant, sont égales entr'elles et à la vitesse de glissement le long de l'axe*. Ce qui fournit un moyen très simple de déterminer l'axe quand on connaît les vitesses de trois points du solide.

35. L'axe de Mozzi se déplace incessamment, en sorte que le mouvement héliçoïdal n'a jamais lieu pendant un temps fini, si petit qu'il soit. Pour se figurer le mouvement réel du solide pendant un temps fini, on devra considérer la surface réglée qui est le lieu de cet axe instantané dans l'espace, et ensuite cette autre surface réglée, invariablement liée au solide, qui est le lieu des positions successives de l'axe instantané dans le solide lui-même. On voit sans peine que cette seconde surface est tangente à la première, à chaque instant, sur toute la longueur de la génératrice commune, qui est l'axe instantané pour cet instant. Si donc on conçoit qu'elle roule sur la première, supposée fixe, en même temps qu'elle glisse le long de la génératrice de contact avec une certaine vitesse, et qu'elle emporte avec elle le solide, le mouvement que prendra celui-ci sera identique avec le mouvement que l'on considérait d'abord.

On peut aussi se figurer d'une manière claire le mouvement continu le plus général d'un solide libre par le théorème suivant, qui découle immédiatement des principes exposés aux nos 25 et 33 : *Ce mouvement se réduit au roulement d'un cône invariablement lié au solide, sur un cône animé d'un mouvement de translation égal à celui du sommet commun des deux cônes.*

Exercices.

1. La terre tourne autour de son axe de figure ON de l'ouest à l'est en un jour sidéral; cet axe lui-même tourne autour d'une parallèle ON' à l'axe de l'écliptique, de l'est à l'ouest, et si l'on ne tient pas compte de la nutation, le plan N'ON décrit en un jour sidéral un angle de $0'',136795$. L'angle $NON' = 23°27'32''$. Déterminer les

vitesses angulaires ω et ω' de ces deux rotations, l'axe instantané réel OR, la vitesse angulaire correspondante ω_1.

R. Le jour sidéral étant pris pour unité de temps, la seconde pour unité d'arc, on a

$$\omega = 1296000,\quad \omega' = 0{,}136795,\quad tg\,\text{NOR} = \frac{\omega' \sin \text{NON}'}{\omega - \omega' \cos \text{NON}'},\quad \text{NON}' = 23^\circ 27' 30'',$$

$$\text{NOR} = 0'',0086,\quad \omega_1 = \frac{\sin \text{NON}'}{\sin \text{NOR}}\,\omega.$$

2. Deux cylindres solides, mobiles respectivement autour de deux axes parallèles, se touchent constamment le long d'une génératrice. Soient ω, ω' les vitesses angulaires des rotations. Déterminer le mouvement relatif du premier cylindre par rapport au second, le rapport des vitesses ω et ω', la condition pour qu'il n'y ait pas de glissement d'un cylindre sur l'autre.

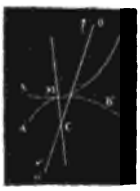


Fig. 27.

R. Soient AB, A'B' (fig. 27) les sections des cylindres; O, O' celles de leurs axes de rotation, par un plan normal à ces axes, M le point de contact de AB, A'B' : il suffit de considérer le mouvement de ces sections planes. Le mouvement relatif de AB par rapport à A'B' est une rotation autour d'un point C, intersection de la droite OO' par la normale commune en M, avec une vitesse angulaire $\omega + \omega'$. On a ensuite

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\text{O'C}}{\text{OC}}.$$

La *vitesse de glissement* w (ou vitesse relative des points en contact) est égale à $(\omega + \omega')$ MC, et l'on trouve

$$\frac{w}{\sin \text{OMO}'} = \frac{\omega \cdot \text{OM}}{\sin \text{CMO}'} = \frac{\omega' \cdot \text{O'M}}{\sin \text{CMO}}.$$

Pour que w soit nul, il faut que le point M soit constamment sur la droite OO'.

3. Étant donnée la section A'B', déterminer AB de manière que le glissement soit nul.

R. Soit $\theta' = \varphi(r')$ l'équation de A'B' dans un système polaire dont O' est le pôle; a la distance OO'. L'équation différentielle polaire de AB, le pôle étant en O, sera

$$d\theta = \frac{a-r}{r}\,\varphi'(a-r)\,dr.$$

4. Deux solides tournent respectivement avec des vitesses données autour de deux axes non situés dans un même plan; trouver, pour un instant quelconque, leur mouvement relatif, l'axe instantané de rotation et de glissement de ce mouvement.

5. Si, d'un point O, on tire des droites respectivement égales et parallèles aux vitesses de tous les points d'un solide libre à un même instant, le lieu des extrémités de ces droites sera un plan normal à l'axe de Mozzi.

6. Étant données en grandeur et en direction les vitesses de trois points d'un solide libre, à un instant donné, construire l'axe de Mozzi pour cet instant, et trouver les vitesses de rotation et de glissement.

7. Le mouvement d'un solide libre à un instant donné peut se réduire, d'une infinité de manières, à deux rotations instantanées autour de deux axes qui, généralement,

ne se coupent pas. Démontrer que le volume du tétraèdre construit sur les axes représentatifs de ces deux rotations, comme arêtes opposées, à un volume constant.

R. Soient w, ω_1 les vitesses de glissement et de rotation autour de l'axe instantané à l'instant considéré, $OP = \omega$, $O'P' = \omega'$ les axes qui représentent les deux rotations données, $OO' = \delta$ leur plus courte distance. On démontre 1° que l'on a

$$w\,\omega_1 = \omega\,\omega'\,\delta \sin(OP, O'P');$$

2° que le volume du tétraèdre OPO'P' est

$$\frac{1}{6}\omega\,\omega'\,\delta \sin(OP, O'P').$$

8. Connaissant la vitesse v d'un point A sur une courbe gauche, déterminer, pour le trièdre AXYZ formé de la tangente AX, de la normale principale AY, et de la perpendiculaire AZ au plan osculateur, l'axe instantané glissant, les vitesses w et ω_1 de glissement et de rotation relatives à cet axe.

R. Les rayons de courbure et de torsion étant R, T, on trouve que l'axe instantané glissant est parallèle à la rectifiante, coupe la normale principale à une distance $\frac{RT^2}{R^2+T^2}$, et que l'on a

$$w = \frac{vR}{\sqrt{R^2+T^2}}, \quad \omega_1 = \frac{v\sqrt{R^2+T^2}}{RT}.$$

9. Un solide a un mouvement quelconque dans l'espace; un plan P est emporté avec lui : le mouvement de ce plan à un instant quelconque se compose de deux rotations simultanées, l'une autour d'un axe CX situé dans le plan, l'autre autour d'un axe FZ normal au plan. Le premier CX se nomme la *caractéristique* du plan; le second perce le plan en un point F que l'on nomme *foyer* du plan.

Les plans normaux aux trajectoires de tous les points du plan passent par le foyer du plan.

Tous les points situés sur la caractéristique ont leurs vitesses dirigées dans le plan.

Quand plusieurs plans du solide passent par une même droite D, leurs foyers sont sur une même droite Δ. Réciproquement, tout plan passant par la droite Δ a son foyer sur la droite D; les droites D, Δ sont dites *conjuguées*.

Deux droites conjuguées sont deux axes des rotations simultanées auxquelles on peut réduire le mouvement du solide.

La perpendiculaire commune à deux droites conjuguées quelconques D et Δ va rencontrer l'axe de Mozzi à angle droit.

Quand deux plans se coupent à angle droit, les distances de leurs foyers à l'axe instantané glissant donnent un produit constant, et les distances de leurs caractéristiques à cet axe aussi.

Quand plusieurs plans passent par une même droite, leurs caractéristiques sont sur un même hyperboloïde à une nappe.

10. Dans un solide animé d'un mouvement quelconque, à un même instant, les normales menées aux trajectoires de tous les points du solide, parallèlement à un

même plan quelconque, vont toutes rencontrer une droite parallèle à l'axe instantané glissant.

N. B. Le lecteur désireux d'approfondir cette théorie pourra consulter : CHASLES, *Propriétés géométriques du mouvement infiniment petit d'un corps solide* (*Comptes-Rendus de l'Académie*, 26 juin 1843); et les XVIIe et XIXe leçons du *Cours de géométrie descriptive* de M. A. Mannheim, formant un véritable traité sur la matière.

CHAPITRE III.

DE L'ACCÉLÉRATION.

§ 1. ACCÉLÉRATION DANS LE MOUVEMENT D'UN POINT.

26. Nous n'avons jusqu'ici considéré, dans le mouvement d'un point ou d'un solide, que la vitesse; l'étude des variations de la vitesse conduit à la notion de *l'accélération*.

Soient M, M′ (fig. 28) les positions d'un point mobile aux époques infiniment voisines t, $t+\Delta t$; MV, M′V′ les vitesses correspondantes; MV_1 égal et parallèle à M′V′. La droite VV_1 est *l'accélération élémentaire* du point M. Si, du point on tire MJ parallèle à la direction VV_1 prise à la limite, et égal à la limite du rapport de l'accélération élémentaire au temps Δt, cette droite MJ sera, en grandeur et en direction, ce que nous appellons *l'accélération totale*, ou simplement *l'accélération* du point mobile t. En la désignant par j, nous aurons

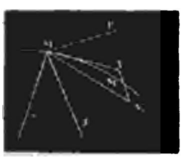


Fig. 28.

$$j = \lim \frac{VV_1}{\Delta t}\,.$$

La direction de l'accélération est évidemment (COURS D'AN., 229, 232) *dans le plan osculateur* de la trajectoire en M, et fait un angle aigu avec la direction de la normale principale.

Pour trouver ses composantes j_x, j_y, j_z parallèlement aux axes rectangulaires, projetons le contour fermé MVV_1M sur l'axe OX, ce qui donnera

$$v_x + VV_1 \cos(VV_1, X) - (v_x + \Delta v_x) = o,$$

ou, divisant par Δt et passant à la limite.

$$j \cos \overline{jX} = \frac{dv_x}{dt}.$$

Nous avons donc, en opérant de même pour OY, OZ,

$$j_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad j_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad j_z = \frac{dv_z}{dt}.$$

Les composantes de l'accélération parallèlement à trois axes rectangulaires, à un instant quelconque, sont les dérivées par rapport au temps des composantes respectives de la vitesse au même instant.

Remplaçant v_x, v_y, v_z par leurs valeurs, on a les formules souvent employées :

$$(1) \quad j_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad j_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad j_z = \frac{d^2z}{dt^2}, \quad j = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}.$$

La considération du triangle MVV_1 conduit à d'autres conséquences utiles. Si l'on néglige les infiniment petits du second ordre par rapport à Δt, on a $VV_1 = j\Delta t$, et la direction VV_1 peut être prise pour celle de l'accélération; donc ***la vitesse d'un point mobile à l'instant $t + \Delta t$ est la résultante de sa vitesse à l'instant t, et de son accélération au même instant multipliée par Δt, aux infiniment petits près du second ordre.***

27. Concevons un point mobile M_1 dont le rayon vecteur, mené d'une origine fixe O, serait à chaque instant égal et parallèle à la vitesse dont le mobile M est animé au même instant; le point M_1 sera ***l'index de vitesse*** ou simplement ***l'index*** du point M. Les coordonnées de ce point M_1 étant, d'après cela, v_x, v_y, v_z, les composantes de sa vitesse parallèlement aux axes seront j_x, j_y, j_z : ***l'accélération d'un point mobile est représentée à chaque instant, en grandeur et en direction, par la vitesse de son index.***

Pour obtenir les composantes j_t, j_n de l'accélération du point M, suivant la direction MV de la vitesse de ce point et normalement à cette vitesse, appelons α, β, γ les cosinus directeurs de la vitesse; λ, μ, ν ceux de la normale principale à la trajectoire en M, R le rayon de courbure. L'équation évidente

$$v_x = v\alpha$$

donne évidemment

$$j_x = \frac{dv}{dt}\alpha + v\frac{d\alpha}{dt} = \frac{dv}{dt}\alpha + v^2\frac{d\alpha}{ds} = \frac{dv}{dt}\alpha + \frac{v^2}{R}\lambda,$$

d'après les relations

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\lambda}{R}.$$

On aura de même

$$j_y = \frac{dv}{dt}\beta + \frac{v^2}{R}\mu, \quad j_z = \frac{dv}{dt}\gamma + \frac{v^2}{R}\nu,$$

équations qui montrent que l'accélération j est la résultante d'une accélération $dv : dt$ suivant la direction de la vitesse, et d'une accélération v^2 : R suivant la normale principale. On a donc

$$j_t = \frac{dv}{dt}, \quad j_n = \frac{v^2}{R}$$

pour les expressions des composantes tangentielle et normale de l'accélération. La seconde est toujours positive, ou dirigée dans le sens de la normale principale ; la première est de même signe que dv, *l'accélération fait donc un angle aigu ou obtus avec la direction de la vitesse, suivant que celle-ci est croissante ou décroissante.*

38. 1° Si le mouvement est rectiligne, on prend pour axe des x la droite parcourue par le point mobile ; l'accélération se réduit évidemment à sa composante j_t ou $\frac{dv}{dt}$, puisque l'on a ici $v = \frac{dx}{dt}$. D'où résulte le théorème suivant : *Dans un mouvement quelconque, la projection de l'accélération du point mobile sur un axe fixe, à un instant quelconque, est égale à l'accélération de la projection du projet mobile sur le même axe.*

Si de plus, dans le mouvement rectiligne, *l'accélération j est constante*, $j = a$, on dit que le mouvement est *uniformément varié*. La relation ci-dessus devient

$$\frac{dv}{dt} = a, \quad \text{d'où} \quad (2) \quad v = at + v_0,$$

v_0 désignant la vitesse à l'époque $t = 0$. Ainsi, *dans un mouvement uniformément varié, la vitesse varie proportionnellement au temps.* On a ensuite

$$\frac{dx}{dt} = at + v_0, \quad (3) \quad x = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0,$$

en intégrant et désignant par x_0 la valeur initiale de x. Les équations

(2) et (3) sont celles du mouvement uniformément varié; elles déterminent, pour une valeur quelconque de t, la vitesse et la position du point sur la droite. Rappelons encore que les quantités a, v_0, x_0 peuvent être positives ou négatives, suivant nos conventions, et qu'il en résulte pour v, x des valeurs positives ou négatives qui déterminent le sens du mouvement et la position du mobile à droite ou à gauche de l'origine. Une discussion complète de toutes les particularités que le mouvement peut offrir, d'après les signes des quantités a, v_0, x_0, n'aurait aucune difficulté. Dans le mouvement rectiligne et uniforme, l'accélération est nulle.

Le mouvement des corps pesants à la surface de la terre, comme nous le verrons, présente un exemple remarquable de mouvement rectiligne uniformément varié.

2° Comme second cas particulier, prenons un point M qui décrit un cercle de centre C, de rayon r, la vitesse angulaire variable du rayon CM étant ω. On a ici

$$v = \omega r, \quad R = r, \quad j_n = \omega^2 r, \quad j_t = r\frac{d\omega}{dt},$$

et l'accélération normale est dirigée de M vers le centre C du cercle. Si donc (x, y) sont les coordonnées du point M, (α, β) celles du centre C, les cosinus directeurs de MC étant

$$-\frac{x-\alpha}{r}, \quad -\frac{y-\beta}{r},$$

les composantes, parallèles aux axes, de l'accélération normale seront

$$-\omega^2(x-\alpha), \quad -\omega^2(y-\beta).$$

Si, de plus, la vitesse angulaire ω est constante, l'accélération tangentielle étant nulle, l'accélération totale du mobile se réduira à l'accélération normale que nous venons de déterminer en grandeur et en direction.

Exercices.

1. Démontrer que, dans un mouvement rectiligne uniformément varié, 1° la vitesse moyenne dans un temps donné(•) égale la vitesse au milieu de cet intervalle de temps; 2° le demi-accroissement du carré de la vitesse dans un temps donné est le produit de l'accélération par le chemin parcouru dans ce temps; 3° l'espace parcouru dans un temps donné est la moitié de l'espace qui serait parcouru dans le même temps avec la vitesse acquise par le mobile à la fin de ce temps.

2. Un point part de l'origine avec une vitesse positive v_0, et une accélération constante négative égale à $-a$; déterminer la distance maximum à laquelle ce point s'éloignera de l'origine.

3. Un point M parcourt une circonférence de rayon r avec une vitesse variable ; quelle doit être la vitesse angulaire ω du rayon mené du centre O au point mobile pour que la direction de l'accélération passe constamment par un point fixe donné A, et quelle est la loi du mouvement du point ?

R. Soient a la distance OA, θ l'angle que fait le rayon OM avec OA, k une constante arbitraire ; on trouve, ω étant négatif dans le sens où θ augmente,

$$\omega = \frac{k}{r - a\cos\theta}, \quad kt = a\sin\theta - r\theta,$$

en supposant θ nul en même temps que t.

4. Un point M parcourt une chaînette ; le rapport $j_n : j_t$ en chaque point est égal au rapport du paramètre a de la courbe au double de l'arc AM compté du sommet A où la vitesse est supposée égale à a. Exprimer en fonction du temps l'arc AM et l'accélération totale.

R. φ étant l'inclinaison de la tangente sur l'axe des x, on a

$$y = \frac{a}{\cos\varphi}, \quad s = a\,tg\varphi, \quad R = \frac{a}{\cos^2\varphi},$$

et en exprimant v, j_n, j_t en fonction de φ et de ses dérivées, on trouve

$$\varphi = t, \quad s = a\,tg\,t, \quad j = \frac{a}{\cos^3 t}.$$

5. Si l'accélération d'un point M a une direction constante, on a les relations

$$v\cos\varphi = C, \quad j = \frac{v^3}{CR},$$

φ étant l'inclinaison de la vitesse sur une direction normale à la première, C une constante.

§ 2. ACCÉLÉRATION DANS LE MOUVEMENT RELATIF.

29. Un point M étant rapporté à un système de comparaison mobile $Oxyz$, cherchons les relations existant entre son *accélération absolue* j, son *accélération relative* j', et l'*accélération d'entraînement* j'' du point M considéré comme lié au système $Oxyz$.

Admettons d'abord que l'origine O soit fixe ; soient p, q, r, les projections sur O_x, O_y, O_z de l'axe instantané de rotation du système $Oxyz$ à l'instant considéré, v la vitesse absolue, v' la vitesse relative du point M ; M_1 l'index de ce point, qui a pour coordonnées par rapport à $Oxyz$ les composantes v_x, v_y, v_z de la vitesse absolue de M. La vitesse absolue

du point M_1 égale et parallèle à l'accélération j (27), est la résultante de sa vitesse relative par rapport à $Oxyz$ et de sa vitesse d'entraînement; sa projection j_x sur Ox est la somme des projections de ces deux vitesses, qui sont $\frac{dv_x}{dt}$ pour la première (11), $qv_z - rv_y$ pour la seconde. On a donc

(1) $$j_x = \frac{dv_x}{dt} + qv_z - rv_y,$$

et deux équations analogues pour j'_y, j'_z.

Ces équations subsistent si le système $Oxyz$ a, en outre, un mouvement de translation, O étant mobile. En effet, d'après la définition, le rayon vecteur de l'index M_1 est alors supposé partir d'une origine fixe O', par laquelle on fera passer un système d'axes mobiles $O'x$, $O'y$, $O'z$ respectivement parallèles à Ox, Oy, Oz et l'on raisonnera par rapport à ce nouveau système comme plus haut par rapport à $Oxyz$.

D'après cela, si u désigne la vitesse de l'origine mobile O, et si nous appliquons la règle de la composition des vitesses (12) et les formules du n° 22 pour évaluer la vitesse d'entraînement du point M, nous aurons

$$v_x = v'_x + u_x + qz - ry,$$
$$v_y = v'_y + u_y + rx - pz,$$
$$v_z = v'_z + u_z + py - qx,$$

et en substituant dans les équations (1),

(2) $$\left\{\begin{aligned} j_x = \frac{dv'_x}{dt} + \Big[\frac{du_x}{dt} + qu_z - ru_y + z\frac{dq}{dt} - y\frac{dr}{dt} + q(py - qx) \\ - r(rx - pz)\Big] + 2(qv'_z - rv'_y); \end{aligned}\right.$$

les valeurs de j_y, j_z se déduisent de celle-là par permutation circulaire.

Dans le second membre, le premier terme exprime évidemment la composante parallèle à Ox de l'accélération relative, ou j'_x; le deuxième groupe, auquel se réduirait j_x si v' était nul ou si le point M faisait corps avec le système $Oxyz$, ne peut représenter autre chose que j''_x. Quant au troisième groupe, nous le regarderons aussi comme la projection sur Ox d'une accélération j''' que nous appellerons l'*accélération complémentaire*. L'équation (2) deviendra donc

(3) $$j_x = j'_x + j''_x + j'''_x,$$

et les valeurs de j_y, j_z donnant lieu à des relations semblables, nous en conclurons (8) que, *dans le mouvement d'un point rapporté à un système de comparaison mobile, l'accélération absolue est la résultante de l'accélération relative, de l'accélération d'entraînement et de l'accélération complémentaire.*

40. Si J désigne l'accélération totale du point O, qui correspond à $x = y = z = 0$, $v' = 0$, la formule (2) donne

$$J_x = \frac{du_x}{dt} + qu_z - ru_y,$$

de sorte que, dans le cas général, on a pour les composantes de l'accélération d'entraînement.

$$(4)\quad \begin{cases} j''_x = J_x + z\dfrac{dq}{dt} - y\dfrac{dr}{dt} + q(py - qx) - r(rx - pz), \\ j''_y = J_y + x\dfrac{dr}{dt} - z\dfrac{dp}{dt} + r(qz - ry) - p(py - qx), \\ j''_z = J_z + y\dfrac{dp}{dt} - x\dfrac{dq}{dt} + p(rx - pz) - q(qz - ry). \end{cases}$$

On remarquera que ces égalités donnent les composantes de l'accélération d'un point quelconque d'un solide libre, projetées sur trois axes rectangulaires liés au solide, en fonction des coordonnées de ce point, des composantes p, q, r et de leurs dérivées par rapport à t.

Les composantes de l'accélération complémentaire ayant pour valeurs

$$j'''_x = 2(qv'_z - rv'_y), \quad j'''_y = 2(rv'_x - pv'_z), \quad j'''_z = 2(pv'_y - qv'_x),$$

si l'on compare ces expressions avec celles des composantes de la vitesse d'un point dans une rotation (17), on voit sans peine que *l'accélération complémentaire est représentée en grandeur et en direction par la double vitesse, due à la rotation d'entraînement, de l'index de la vitesse relative du point mobile* M.

41. Les équations (3), écrites sous la forme,

$$j'_x = j_x - j''_x - j'''_x, \quad \text{etc...}$$

montrent que *l'accélération relative est la résultante de l'accélération absolue, et des accélérations d'entraînement et complémentaire prises en sens contraire.* Cette dernière composante, qui a pour projections $-j'''_x$, $-j'''_y$, $-j'''_z$, s'appelle aussi *accélération centrifuge composée.*

42. Le cas où le système de comparaison est doué d'un simple mouvement de translation, les axes Ox, Oy, Oz conservant des directions

invariables, rentre dans le cas général par la supposition $p = q = r = 0$. L'accélération j''' s'annule, l'accélération d'entraînement j'', en vertu des équations (4), se confond en grandeur et direction avec J. Donc : *Quand le mouvement du système de comparaison est une simple translation, l'accélération absolue d'un point* M *mobile est la résultante de son accélération relative et d'une accélération égale et parallèle à celle de l'origine mobile* O.

Si le système $Oxyz$ a un simple mouvement rectiligne et uniforme, J lui-même s'évanouit et les accélérations j et j' se confondent.

Exercices.

1. La spirale d'Archimède, $r = a\theta$, étant décrite (14) par un point qui se meut uniformément sur le rayon a, pendant que ce dernier tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour du pôle, déterminer l'accélération du point mobile et en déduire le rayon de courbure de la spirale.

R. On trouve $v = \omega\sqrt{a^2 + r^2}$ pour la vitesse du point ; j' est égal à zéro, $j'' = \omega^2 r$ est dirigé vers le pôle ; $j''' = 2\omega^2 a$ est normal au rayon r dans le sens de la rotation. Donc $j = \omega^2\sqrt{r^2 + 4a^2}$. On tire ensuite, de la valeur de j_n (27),

$$R = \frac{(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2a^2}.$$

2. Déterminer l'accélération relative d'un point mobile à la surface de la terre.

R. Prenons le point mobile M pour origine, $M\zeta$ suivant la verticale, $M\xi$ tangent au méridien et dirigé vers le nord, $M\eta$ tangent au parallèle et dirigé vers l'est. Soient ω la vitesse de la rotation terrestre, R la distance du point M au centre de la terre, v' sa vitesse relative, λ la latitude du point M ; l'axe de rotation de la terre étant dirigé vers le pôle sud, on a

$$p = -\omega\cos\lambda, \quad q = 0, \quad r = -\omega\sin\lambda,$$

et l'on trouve

$$\left\{\begin{aligned} j'_\xi &= j_\xi - \omega^2 R \sin\lambda\cos\lambda - 2\omega v'_\eta \sin\lambda. \\ j'_\eta &= j_\eta + 2\omega(v'_\xi \sin\lambda - v'_\eta \cos\lambda). \\ j'_\zeta &= j_\zeta + \omega^2 R \cos^2\lambda + 2\omega v'_\eta \cos\lambda. \end{aligned}\right.$$

§ 3. ACCÉLÉRATION DANS LE MOUVEMENT D'UNE FIGURE PLANE DANS SON PLAN.

43. Soient toujours AB (fig. 29) la courbe fixe, A'B' la courbe roulante (**20**), C le centre instantané actuel, et concevons un point mobile qui coïnciderait à chaque instant avec le centre instantané correspondant à cet instant; sa vitesse w, tangente à AB, sera appelée *vitesse du centre instantané.*

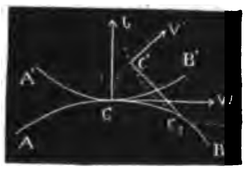


Fig. 29.

Cherchons d'abord l'accélération J du point de la figure mobile qui coïncide, à l'instant considéré, avec le centre instantané C. Sa vitesse actuelle étant nulle, son accélération élémentaire (**36**) se réduit à la vitesse infiniment petite que ce point possède au bout du temps Δt. Le centre instantané étant alors en C_1, le point mobile en C', sa vitesse C'V' est normale à C_1C' et égale à $(\omega + \Delta\omega)\, C_1C'$. Le rapport $C_1C' : \Delta t$, à cause de l'égalité des arcs CC_1, $C'C_1$, ayant pour limite w, la direction limite de C_1C' étant tangente à la courbe AB en C, on conclut que *l'accélération J est égale à ωw, et a pour direction celle de la vitesse w qui a tourné de 90° en sens contraire de la rotation ω.*

44. Ce point établi, considérons le mouvement de la figure plane comme résultant d'une translation continue égale à celle du point C de la figure mobile, et d'une rotation continue autour de ce point. Appliquons la règle du n° **42**, le système de comparaison n'ayant qu'un mouvement de translation. Il en résulte que l'accélération d'un point quelconque M de la figure mobile est la résultante d'une accélération égale et parallèle à l'accélération J définie ci-dessus, et de l'accélération qu'aurait le point M si la figure tournait autour du point fixe C, avec sa vitesse angulaire variable ω.

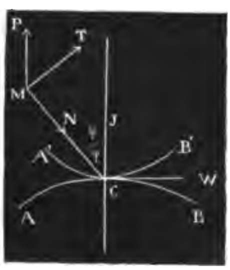


Fig. 30.

Ou encore, en introduisant les composantes tangentielle et normale de l'accélération dans la rotation autour d'un point fixe et appelant u le rayon CM (fig. 30), *l'accélération d'un point quelconque M de la figure mobile est la résultante 1° d'une accélération MP égale et parallèle à l'accélération J du point C de la figure qui coïncide actuellement avec le centre instantané; 2° d'une*

accélération normale MN $= \omega^2 u$, *dirigée du point* M *vers le centre instantané;* 3° *d'une accélération tangentielle* MT $= u\frac{d\omega}{dt}$, *dont le sens est indiqué par le signe de la dérivée de* ω.

45. Ce théorème permet de calculer les accélérations tangentielle et normale du point M. Soit φ l'angle compris entre le rayon u et la direction de l'accélération J. Projetant nos trois composantes sur la direction normale MC, nous aurons

$$j_n = \omega^2 u - \mathrm{J}\cos\varphi,$$

ou, en mettant pour J sa valeur et posant $u' = w : \omega$,

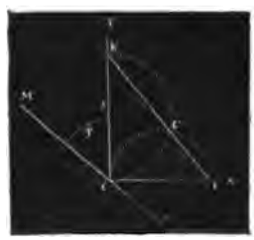
$$(1) \qquad j_n = \omega^2 (u - u' \cos\varphi).$$

Si nous projetons, au contraire, sur la direction de la vitesse v, normale à CM, nous aurons

$$(2) \qquad j_t = u\frac{d\omega}{dt} + \mathrm{J}\cos\overline{\mathrm{J}v} = u\frac{d\omega}{dt} + \omega\, w \sin\varphi.$$

Pour trouver le lieu des points de la figure mobile dont l'accélération normale actuelle est nulle, il faut poser $j_n = 0$, ce qui donne l'équation

$$u = u' \cos\varphi.$$


Fig. 51.

Portons sur la direction de J, à partir du point C (fig. 51), une longueur CK $= u'$, le cercle décrit sur CK comme diamètre vérifie cette équation : *ce cercle est donc le lieu des points dont l'accélération normale est nulle.* On l'appelle le *cercle d'inflexion*, le point K est le *pôle d'inflexion*.

De même, on aura les points sans accélération tangentielle en posant $j = 0$, ce qui donne la relation

$$u = -\frac{\omega w}{\left(\frac{d\omega}{dt}\right)} \sin\varphi.$$

Le lieu de ces points est le cercle décrit sur la droite CI, égale à $\omega w : \frac{d\omega}{dt}$, et dirigée suivant la vitesse w du centre instantané.

L'intersection C' de ces deux cercles est un point dont l'accélération

totale est nulle, puisque l'on y a à la fois $j_n = 0$, $j_t = 0$. Si l'on prenait ce point C′ de la figure mobile comme origine du système de comparaison, le mouvement relatif serait une simple rotation autour de C′, avec la même vitesse angulaire variable ω qu'autour du centre instantané (**19**, 5°), et l'accélération de l'origine mobile étant nulle, celle de chaque point de la figure se réduirait à l'accélération relative. On a donc ce théorème : ***Il existe, à chaque instant, un point unique C′ de la figure qui a une accélération nulle, et les accélérations de tous les autres points sont les mêmes, en grandeur et en direction, que si la figure tournait autour de ce point supposé fixe, avec sa vitesse angulaire variable*** ω.

Ce point C′ est le ***centre instantané des accélérations.***

46. L'expression (1) de j_n conduit à la construction du centre de courbure Z de la trajectoire du point M. Soit $R = MZ$ le rayon de courbure de cette trajectoire. On a comme on sait,

$$j_n = \frac{\omega^2 u^2}{R},$$

et en égalant les deux expressions de j_n,

$$\frac{u^2}{R} = u - u' \cos \varphi, \quad \text{d'où} \quad \frac{u(R-u)}{R} = u' \cos \varphi,$$

ou encore, en posant $R = u + \zeta$,

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{\zeta} = \frac{1}{u' \cos \varphi}. \tag{3}$$

Cette équation fait connaître la distance ζ du centre instantané C au centre de courbure Z, lorsque le point K étant connu, on donne les coordonnées polaires u et φ du point M; on pourra donc construire le point Z(1).

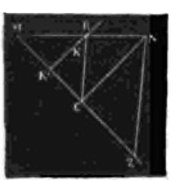


Fig. 32.

Cela posé, l'équation (3) donne lieu à la construction suivante (fig. 32) : joignant MC, on a la normale à la trajectoire du point M. Menant CN, KK′ perpendiculaires à MC, on joindra un point *quelconque* N de la droite CN au point M. Soit R l'intersection de K′K et de MN. On tire RC.

(1) Pour la généralité des formules (1), (2), (3), l'angle φ est compté positivement, de CK vers CM, en sens contraire de la rotation ω; j_n négatif est porté sur le prolongement de CM au delà du point M; u est toujours > 0, $\zeta \gtrless 0$ suivant que Z est au delà ou en deçà de C par rapport au point M.

puis NZ parallèle à RC : le point Z où cette parallèle coupe la normale MC est le centre de courbure cherché.

En effet, les triangles semblables MCN, MK'R, et MRC, MNZ, donnent

$$\frac{MC}{K'C}=\frac{MN}{RN}=\frac{MZ}{CZ}, \quad \text{ou} \quad \frac{u}{u' \cos \varphi}=\frac{u+CZ}{CZ},$$

ou

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{CZ}=\frac{1}{u' \cos \varphi},$$

ce qui, vu la relation (3), donne $CZ=\zeta$

Cette construction est absolument générale, quels que soient les signes des quantités u', $\cos \varphi$, ζ.

Le point N étant arbitraire sur CN, choisissons-le de manière que MN passe par le point K (fig. 33). Les points K, R coïncident, RC se confond avec KC et NZ est parallèle à KC. De là cette construction plus simple du centre de courbure : *joindre le point décrivant* M *au point* K, *et par le point* N *où cette droite coupe la perpendiculaire en* C *à la droite* MC, *mener une parallèle à la droite qui joint les points* K, C. *Cette parallèle coupe la normale* MC *au centre de courbure* Z.

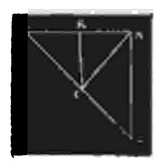


Fig. 33.

L'équation (3) donne encore les conclusions suivantes : 1° Si le point M est sur le cercle d'inflexion, $u=u' \cos \varphi$, $\zeta=\infty$, le point Z est à l'infini : *tout point de la figure mobile appartenant à cette circonférence décrit actuellement un point d'inflexion sur sa trajectoire ;* 2° ζ est positif si le point M est hors de ce cercle, négatif s'il lui est intérieur : la trajectoire du point M tourne donc sa concavité ou sa convexité vers le centre instantané, selon que le point M est extérieur ou intérieur au cercle ; 3° *si un point donné de la figure décrit une droite dans le mouvement, cette droite va passer par le point* K, car R, et par suite ζ, étant infini, $u=u' \cos \varphi$, le point mobile est sur le cercle, la direction de sa vitesse passe donc par K. Cette remarque est souvent utile.

47. Pour construire le pôle d'inflexion K, fondement des tracés précédents, il n'est pas nécessaire de connaître ω, w ; il suffit que les conditions géométriques du mouvement fournissent les centres de courbure Z_1 et Z_2 (fig. 34) des trajectoires de deux points M_1 et M_2 de la figure dans la position considérée. Soient N_1, N_2 les points où la droite

$Z_1 Z_2$ coupe les perpendiculaires élevées en C aux normales $M_1 Z_1$, $M_2 Z_2$ de ces trajectoires. Tirons les droites $M_1 N_1$, $M_2 N_2$ se coupant en P; P est un point de la droite CK. En effet, soit C R_2 R_1 parallèle à $Z_1 Z_2$; si par les points R_1, R_2 où elle coupe $M_1 N_1$, $M_2 N_2$ on mène des droites R_1 K, R_2 K respectivement parallèles à CN_1, CN_2, il suit de la construction donnée plus haut que ces droites doivent se couper au point K. Mais les triangles KR_1R_2, CN_1N_2 sont semblables et semblablement placés, les droites qui joignent les sommets homologues concourent en un même point P, donc etc... La droite qui passe par le centre instantané et le pôle d'inflexion étant connue, on voit sans peine par la deuxième construction ci-dessus, comment on construira le point K.



Fig. 34.

Lorsqu'on connaît les centres de courbure O et O′ (fig. 35) de la roulette fixe AB et de la courbe roulante A′B′, pour le point C, on en déduit le point K comme il suit. Soient $R_1 = CO$, $R_2 = CO'$ les rayons de courbure de AB, A′B′; C_1, C′ les positions du centre instantané au bout du temps dt sur AB, A′B′, donc $CC_1 = CC'$. L'angle compris entre les tangentes en ces deux points est égal à ωdt, puisque ces tangentes viennent coïncider au bout du temps dt; cet angle est la somme des angles formés par ces mêmes tangentes respectivement avec la tangente commune en C, angles qui ont pour valeurs $CC_1 : R_1$, $CC' : R_2$. On a donc

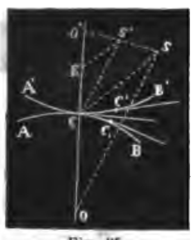


Fig. 35.

$$\omega dt = \frac{CC_1}{R_1} + \frac{CC'}{R_2},$$

où, en divisant par dt, observant que $CC_1 = CC' = wdt$, et ayant égard à la valeur de u',

$$(4) \qquad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{u'}.$$

Observons que, si AB est une droite, $R_1 = \infty$, $u' = R_2$, K est en O′.

Pour la généralité de cette équation, R_2 sera positif dans le sens de l'accélération J, R_1 dans le sens opposé, car l'angle $\omega\, dt$ serait la différence des deux angles de contingence si AB, A′B′ tournaient leur concavité dans le même sens.

On a donc cette construction : Joindre un point *quelconque* S du plan aux points O, C, O′; tirer CS′ parallèle à OS, et par le point de rencontre S′ de CS′ et SO′, S′K parallèle à CS; S′K coupe OO′ au point cherché K. En effet, les triangles semblables O′OS, O′CS′, et O′CS, O′KS′, donnent

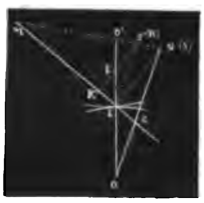
$$\frac{OO'}{CO}=\frac{O'S}{S'S}=\frac{O'C}{CK},$$

ou

$$\frac{1}{CK}=\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{1}{u'}.$$

Donc CK = u'; cette construction a encore toute la généralité possible, quels que soient les signes de R_1, R_2.

Quand les points O et O′ sont ainsi donnés, on peut combiner la construction précédente et celle du n° **46** de manière à obtenir le point Z sans construire le pôle d'inflexion. En effet, le point S étant arbitraire, choisissons-le à l'intersection N (fig. 36) de la droite MO′ qui joint le point décrivant au centre de courbure de la courbe roulante, et de la perpendiculaire CN à la normale MC. Appliquant ensuite la construction décrite ci-dessus pour obtenir le point K, puis la construction du n° **46** pour obtenir le point Z, on voit immédiatement que le point R va se confondre avec le point S′, la droite RC avec S′C, et la parallèle NZ avec NO; donc Z est l'intersection de la normale MC avec NO, d'où la construction de Savary : *joindre le point décrivant* M *au centre de courbure* O′ *de la courbe roulante; mener par le centre instantané une perpendiculaire* CN *à la normale* MC, *et joindre le point d'intersection* N *des droites* MO′, CN, *au centre de courbure* O *de la courbe fixe. La droite* NO *coupe la normale* MC *au centre de courbure de la trajectoire du point* M.


Fig. 36.

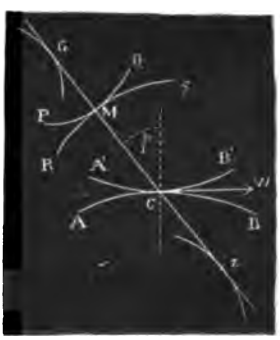


Fig. 37.

48. La détermination du centre de courbure Z de l'enveloppe RS (fig. 37) d'une ligne invariable et mobile PQ se ramène aux principes précédents.

Soient, à l'instant considéré, C le centre instantané, situé (**21**) sur la normale commune au point de contact M des courbes PQ, RS. Cette normale touche constamment la développée de RS au centre de courbure Z, et la développée de la ligne mobile PQ au centre de courbure G de PQ relatif au point M. On peut donc, d'après la propriété caractéristique des développées, considérer le mouvement de la ligne PQ dans le plan comme composé d'un mouvement *d'entraînement* dans lequel la droite GMZ roule sur la développée de RS, et d'un mouvement *relatif* dans lequel la développée de PQ roule sur cette droite GMZ. Soit ω_1 la vitesse angulaire de la première rotation autour de Z; $GC = u$, $CZ = \zeta$; w et φ ayant les mêmes significations que plus haut. Nous aurons par le n° **30**,

$$\frac{\omega_1}{u} = \frac{\omega}{u+\zeta}, \quad \text{et} \quad \omega_1\zeta = w\cos\varphi,$$

en observant que la vitesse d'entraînement du point C se confond avec la composante, normale à CZ, de la vitesse w. Eliminant ω_1, et ayant égard à l'expression de u', on trouvera

$$\frac{w\cos\varphi}{\zeta} = \frac{\omega u}{u+\zeta} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{u} + \frac{1}{\zeta} = \frac{1}{u'\cos\varphi}.$$

Rapprochant cette équation de (3), on a ce théorème :

Le centre de courbure Z *de l'enveloppe d'une ligne mobile* PQ *coïncide avec le centre de courbure de la trajectoire que décrit le point de la figure mobile qui, à l'instant considéré, coïncide avec le centre de courbure* G *de la ligne* PQ *relatif au point de contact.*

On voit que, dans les constructions exposées plus haut pour obtenir le centre de courbure Z lorsque les points C et K sont connus, ou les points C, O, O', il suffira de prendre pour point décrivant le centre de courbure G de la ligne mobile PQ, et d'appliquer ces constructions sans autre changement : elles conduiront à un centre de courbure Z qui sera précisément celui de l'enveloppe de la ligne PQ. La même modification s'appliquerait à la construction réciproque qui nous a servi pour remonter du point Z au point K.

40. *Application à divers problèmes*. — I. *Epicycloïdes*. Un cercle O' roule, extérieurement ou intérieurement, sur un cercle O fixe : un

point M de la circonférence du cercle roulant décrit une épicycloïde. Le point de contact C des cercles est le centre instantané, MC est la normale à l'épicycloïde. Joignons le point N, extrémité du diamètre MO′, au centre O du cercle fixe : NO coupe la normale MC au centre de courbure Z de l'épicycloïde, d'après la construction de Savary. — Le cas où le point M est en dehors ou au dedans du cercle O′ se traite de même.

II. Reprenons l'ellipse décrite par un point M d'une droite AB qui s'appuie sur deux droites fixes (22, fig. 13). Nous avons trouvé le centre instantané C et la normale MC. Les points A, B de la figure mobile décrivant des droites OX, OY, le point K est à l'intersection O de ces droites. Joignant OM, menant CN normale à MC, et par l'intersection N de OM, CN, une parallèle à OC, cette parallèle coupe MC au centre de courbure Z de l'ellipse décrite par le point M. — On pourrait aussi se servir de la construction de Savary, puisque l'on a les centres de courbure O et O′ de la courbe fixe et de la courbe roulante.

III. Rayon de courbure de l'enveloppe d'une droite constante AB qui s'appuie sur deux axes rectangulaires OX, OY. — Le centre instantané est toujours à l'intersection C des normales à OX, OY en A, B. Le point M, projection de C sur AB, est le point de contact de la droite avec son enveloppe, CM est la normale à cette enveloppe. Le centre de courbure G de la ligne mobile étant à l'infini sur CM, la droite joignant ce point au point K, qui est ici en O, est ODN parallèle à MC et coupant AB en D; menons CN perpendiculaire à MC, NZ parallèle à OC coupant MC en Z, le point Z est le centre de courbure de l'enveloppe. Mais on a évidemment $OD = CM$, $DN = CM$, donc $ON = CZ = 2OD$, $MZ = R = 3OD$, théorème connu.

Exercices.

1. Le cercle symétrique du cercle d'inflexion par rapport à la tangente commune en C est le lieu des centres de courbure des enveloppes de toutes les droites entraînées par la figure mobile.

R. Conséquence du théorème du n° 48 et de la construction du n° 46; ici G est à l'infini. Si une droite glisse sur un point fixe, la symétrique de cette droite par rapport au centre instantané passe par le point K.

2. Centre de courbure de la conchoïde de Nicomède (Ch. II, § 2, ex. 2, fig. 16).

3. Un côté SC (fig. 38) d'un angle droit roule sur un cercle O ; l'autre côté SM est égal au rayon du cercle : le point M décrit une spirale d'Archimède. Trouver la normale et le centre de courbure.



Fig. 38.

R. Le centre instantané est en C ; MC est la normale. On applique la construction de Savary, le point O' est ici à l'infini sur OC.

4. Trouver le centre de courbure de l'ellipse, considérée comme enveloppe d'un côté d'un angle droit dont le sommet parcourt une circonférence, l'autre côté passant par un point fixe (foyer).

5. Trouver le centre de courbure de la podaire d'une courbe (S) par rapport à un point fixe O, connaissant celui de la courbe (S) (22).

R. Soit Z_1 le centre de courbure de (S) ; on construit le centre instantané C (n° 22), on prolonge les droites OC, Z_1C de longueurs égales au delà du point C ; le rectangle construit sur ces prolongements a pour 4^{me} sommet le point K (v. ex. 1).

6. Une droite ABM passe par un point fixe A ; un de ses points B parcourt une circonférence O passant par A ; BM est constant. Trouver la normale et le centre de courbure de la trajectoire du point M (*Limaçon de Pascal*) ; déterminer les courbes de roulement.

R. Le centre instantané C est à l'extrémité du diamètre BO ; le point K s'obtient en prolongeant BC d'une longueur CK = CB. Le lieu du centre instantané dans le plan est le cercle O ; dans la figure mobile, c'est un cercle de centre B et de rayon BC. Appliquer la construction de Savary.

7. Soient M, M_1, M_2 les sommets d'un triangle invariable qui se meut dans son plan. On a la relation

$$\frac{\sin(u_1, u_2)}{\frac{1}{u}+\frac{1}{\zeta}}+\frac{\sin(u_2, u)}{\frac{1}{u_1}+\frac{1}{\zeta_1}}+\frac{\sin(u, u_1)}{\frac{1}{u_2}+\frac{1}{\zeta_2}}=0,$$

les indices indiquant les points auxquels se rapportent les segments u, ζ.

8. Trouver le centre de courbure de l'enveloppe d'une droite MM_1, menée par un point quelconque M d'une courbe donnée et faisant un angle constant avec la normale MC à cette courbe.

R. On considère le côté MC de l'angle invariable comme roulant sur la développée de la courbe donnée ; le centre de courbure C de la courbe est le centre instantané de rotation, sa projection M_1 sur la droite MM_1 est le point où celle-ci touche son enveloppe ; soit X le centre de courbure de la développée en C ; sa projection Z sur CM_1 est le centre de courbure demandé.

9. Un triangle ABC se meut de telle manière que ses deux côtés b, c, restent tangents à deux courbes dont on donne les centres de courbure aux points de contact ; trouver le centre de courbure de la courbe décrite par le sommet A, et celui de la courbe enveloppée par le côté a.

10. Le lieu des centres de courbure des trajectoires des différents points d'une même droite, à un même instant, est une section conique passant au centre instantané et tangente en ce point aux courbes de roulement. La section conique est une ellipse,

si la droite est extérieure au cercle de diamètre CK; une hyperbole si elle le coupe; une parabole si elle lui est tangente.

12. Le lieu des points dont les trajectoires ont leurs centres de courbure sur une même droite est une section conique passant par le centre instantané.

Exercices sur la cinématique en général.

1. Démontrer, par des considérations cinématiques, que si l'on projette un pôle O sur la tangente en M à une courbe (C), si p, φ sont les coordonnées polaires de la projection, la distance du point O à la normale en M et le rayon de courbure en ce point M, ont pour expressions

$$\frac{dp}{d\varphi}, \quad p + \frac{d^2p}{d\varphi^2}.$$

2. Une droite reste tangente à une courbe donnée (A) (fig. 39), et coupe deux autres courbes (C), (C') en des points M, M'; N, N' sont les rencontres des normales en ces points avec la normale à (A) au point de contact O; r, r' les distances des points M et M' à ce point de contact, $d\theta$ le déplacement angulaire infiniment petit de la droite mobile, ρ le rayon de courbure de (A) au point O, ds, ds' les éléments de (C), (C'). On a



Fig. 39.

$$\text{ON} = \frac{dr}{d\theta} - \rho, \quad d.\,\text{MM}' = \text{NN}'\,d\theta, \quad \frac{ds}{ds'} = \frac{\text{MN}}{\text{M}'\text{N}'}.$$

3. Trouver la courbe A'B' qu'il faut faire rouler sur une droite AB pour qu'un point M, lié à A'B', décrive une courbe MM' dont on a l'équation entre le rayon de courbure ρ et la normale MC $= u$.

R. La courbe A'B' rapportée au pôle M et à un axe polaire MX, on a pour coordonnées du point C, $u = \text{MC}$, $\theta = \text{CMX}$. Soient R_2 le rayon de courbure en C de A'B', μ l'angle du rayon vecteur MC avec la tangente AB. On applique l'équation (3) en observant qu'ici $u' = R_2$, $\cos\varphi = \sin\mu$, $\zeta = \rho - u$, donc

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{\rho - u} = \frac{1}{R_2 \sin\mu}.$$

Des formules connues (Cours d'Analyse) donnent

$$\frac{1}{R_2} = \frac{d\mu + d\theta}{ds}, \quad \operatorname{tg}\mu = u\frac{d\theta}{du}, \quad \sin\mu = \frac{ud\theta}{ds}, \quad \frac{1}{R_2\sin\mu} = \frac{d\mu + d\theta}{ud\theta},$$

et l'équation ci-dessus devient

$$\frac{d\mu}{d\theta} = \frac{u}{\rho - u}, \quad \frac{d\mu}{\operatorname{tg}\mu} = \frac{du}{\rho - u}.$$

L'équation de la courbe MM' donnant ρ en u, on intègrera et la valeur de $\operatorname{tg}\mu$ conduira à l'équation entre u et θ.

4. Cas particulier où l'on a

$$\frac{1}{\rho}+\frac{1}{u}=\frac{1}{h},$$

h étant constant. On trouve, *c* étant une autre constante,

$$u=\frac{1}{ch\pm\sqrt{c^2h^2-c}\cos(\theta-\theta_0)}.$$

La courbe A'B' est une section conique dont M est un foyer. Si A'B' est une ellipse, MM' est la section méridienne de l'*onduloïde* de Plateau ; si c'est une hyperbole, on a la *nodoïde* ; si A'B' est une parabole, MM' est une chaînette.

5. La longueur de l'arc décrit par un point M, dans le mouvement d'une figure plane, est à celle de l'arc correspondant de la podaire de la courbe roulante par rapport au point M, comme $R_1 + R_2$ est à R_1 (n° 47). Si la courbe fixe se réduit à une droite, ces arcs correspondants sont égaux.

6. Une courbe (A) roule sur une droite (D) en entraînant une courbe (B) ; un point M se meut sur (B) de sorte que sa vitesse relative, à chaque instant, soit parallèle à (D) ; l'arc qu'il décrit dans le plan est égal à l'arc correspondant de la courbe, lieu de la projection, sur la tangente à (A), du point de (B) où la tangente a même direction.

7. L'enveloppe d'un arc quelconque de (B) est égal à la demi-somme de cet arc et de l'arc correspondant du lieu, obtenu en abaissant une perpendiculaire du point de contact sur la tangente à (A), et prolongeant cette perpendiculaire d'une longueur égale.

8. Une courbe (B) tourne autour d'un point fixe A ; un point M se meut sur (B) de sorte que sa vitesse relative ait une direction constante ; l'arc décrit par M a même longueur que l'arc correspondant du lieu des projections du point A sur les normales à la courbe (B).

N. B. On trouve ces théorèmes et d'autres, déduits de propriétés plus générales, dans un beau mémoire de M. A. Mannheim, *sur les longueurs comparées d'arcs de courbes différentes* (*J. de l'Éc. Polyt.*, XL^e cahier).

9. Une figure plane F se meut dans le plan d'une autre figure plane F', pendant que celle-ci se déplace dans le plan fixe F''. On connaît le centre instantané C' et le pôle K' pour le mouvement relatif de F, les points analogues C'', K'' pour le mouvement d'entraînement de F', le rapport des vitesses angulaires ω', ω'' de ces mouvements. Trouver les points C et K pour le mouvement absolu de F.

R. Le point C est sur la droite C'C'', et si $CC''=\delta'$, $CC'=\delta''$, $C'C''=\delta$, C est déterminé par la proportion $\delta' : \omega' = \delta'' : \omega''$. La droite CK est la résultante de trois droites,

$$\frac{\delta''^2}{\delta^2}\,C''K'',\qquad \frac{\delta'^2}{\delta^2}\,C'K',\qquad \frac{\delta'\delta''}{\delta},$$

cette dernière dirigée suivant CC'.

10. Une droite C''C' pivote autour d'un point fixe C'', tandis qu'une droite C'A pivote autour de l'extrémité C' de la première ; le rapport *u* des vitesses angulaires de C'A *relativement* à C''C' et de C''C' autour de C'' est connu, pour un instant

quelconque. Construire le point M où la droite C'A touche son enveloppe, la normale à celle-ci et son centre de courbure Z.

R. Partageons C'C'' en C de sorte que CC' : CC'' soit égal à *u*. Projetant C sur C'A, on a le point M, et CM est la normale. Partageons CC'' en S de sorte que CS : C''S soit égal à *u*. Le cercle décrit sur CS comme diamètre coupera la normale MC au centre de courbure Z.

11. Un système articulé, composé de deux côtés opposés AB, CD (fig. 40) d'un carré et de la diagonale AD, est mobile autour des sommets B, C considérés comme pivots fixes. Démontrer que le milieu M de la diagonale mobile décrit une lemniscate de Bernoulli (1) ; construire la normale et le centre de courbure de cette courbe. Déterminer le lieu du centre instantané dans le plan et dans la figure mobile.



Fig. 40.

12. *Système articulé de Peaucellier* (fig. 41). — Quatre tiges AD, AD', CD, CD', forment un losange articulé ; les sommets D et D' sont reliés par des brides égales DB, D'B à un pivot fixe B. Démontrer que si le point A décrit un cercle de centre O, le sommet C décrira un autre cercle, ayant son centre sur la droite OB et se réduisant à une droite CP normale à OB si OA = OB. Étant donnée la vitesse angulaire constante de AO autour du pivot O, déterminer par des considérations cinématiques les vitesses des différents sommets, le centre instantané de rotation de chacune des barres, la trajectoire décrite par un point quelconque du système articulé etc. (2).



Fig. 41.

13. *Système articulé de Hart.* — Un système articulé ABCD (fig. 42) est formé des côtés et des diagonales d'un trapèze isocèle. Démontrer 1° que si l'on fixe le côté AB, un point quelconque du côté CD décrit une inverse de conique ; 2° que si l'on fixe un point O du côté AB, et si l'on mène la droite OPP' parallèle aux bases AC, BD, les trois points O, P, P' restent constamment sur une même droite, et l'on a OP · OP' = *const* ; d'où il suit que, si l'on oblige le point P à décrire une circonférence passant par le point O, le point P' décrira une droite perpendiculaire au diamètre passant en O ; 3° Étant donnée la vitesse angulaire du côté AB autour du point O, construire les vitesses des points C, D, P, P', les centres instantanés de rotation de côtés du système, etc.



Fig. 42.

---

(1) Cet élégant théorème est dû au P. Carbonnelle.

(2) Cons. Resal, *Traité de mécanique générale*, t. VII, p. 304.

LIVRE DEUXIÈME.

STATIQUE.

CHAPITRE IV.

PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA MÉCANIQUE.

50. Nous appelons *corps* des portions de matière limitées en tous sens. Nous regardons les corps comme des aggrégations de particules très-petites, dont le nombre est extrêmement grand, toutes isolées les unes des autres : ce sont les *molécules*. Les molécules elles-mêmes sont composées d'un certain nombre d'éléments matériels que l'on peut regarder comme *inétendus*, comme de simples points géométriques dans chacun desquels réside un centre d'action de la matière : ce sont les *points matériels*. En définitive, les corps se réduisent à des assemblages d'un nombre incalculable de points matériels.

Les principes premiers de la mécanique, sur lesquels reposent les relations qui existent entre le mouvement des corps et les actions, émanant d'autres corps, auxquels nous attribuons ces mouvements comme à leur cause immédiate, sont empruntés à l'expérience et peuvent se réduire à trois. Des observations mille fois répétées, des expériences instituées en vue de vérifier ces principes, des inductions simples et naturelles ont conduit peu à peu à admettre leur généralité absolue, et comme les conséquences sans nombre que l'on en a déduites par le calcul se sont toujours

vérifiées, on est fondé à les regarder comme entièrement hors de doute. A la vérité, ce n'est d'abord que sur des mouvements rapportés à la terre comme immobile que les observations ont pu être faites, et c'est par induction qu'on a étendu à tous les mouvements les lois auxquelles ces observations avaient conduit. Mais, cette généralisation faite, on a reconnu entre les conséquences auxquelles conduisaient les lois fondamentales, et les faits observés, même à la surface de la terre, de légères discordances, qui s'effaçaient de plus en plus à mesure que le système auquel on rapportait les mouvements, en le regardant comme immobile, approchait de se confondre avec le système le plus vaste que nous connaissions dans l'univers, celui des étoiles fixes. C'est ainsi que l'on a été conduit à attribuer l'immobilité à ce système; c'est à lui que se rapporteront par la suite les mouvements *absolus*, et c'est dans ces mouvements seulement que les principes que nous allons énoncer auront leur pleine signification et leur entière exactitude.

51. I. Principe de l'inertie. — *Un point matériel est incapable de modifier par lui-même la vitesse dont il est animé, et il a besoin pour cela de l'action d'une cause extérieure à lui.*

Si donc il est en repos, il y restera indéfiniment; s'il est en mouvement, il aura un mouvement rectiligne et uniforme, tant qu'une action étrangère ne viendra pas le tirer du repos ou changer la direction et la grandeur de sa vitesse. Cette cause capable d'engendrer ou de modifier le mouvement d'un point matériel, quelle que soit sa nature particulière, nous l'appelons une *force*. Il n'arrive pas toujours que son effet soit un mouvement, parce que d'autres causes, ou de forces semblables, peuvent s'opposer au mouvement qu'elle tend à produire. Néanmoins, nous concevons que dans cette circonstance la force ne cesse pas d'agir, de solliciter la matière au mouvement. Le sentiment de l'effort que nous déployons pour mettre les corps en mouvement, pour vaincre un obstacle quelconque, nous donne une idée assez nette de la force considérée ainsi abstraction faite du mouvement qu'elle est capable de produire, et nous rangerons cette notion parmi celles que nous possédons naturellement.

Le principe de l'inertie ne signifie nullement que les derniers éléments matériels soient incapables d'aucune action; au contraire, nous serons amenés à attribuer l'ensemble des phénomènes mécaniques à des actions réciproques des points matériels les uns sur les autres. Nous

voulons dire seulement que le point matériel est sans action sur son propre mouvement; celui-ci ne peut être modifié que par la présence et l'action d'autres éléments matériels.

52. La notion de la force, réduite à ce qu'elle a de plus simple, implique trois éléments : le point matériel sur lequel elle s'exerce, et que l'on nomme son *point d'application;* la direction de la droite suivant laquelle elle tend à déplacer son point d'application, supposé libre et en repos : c'est ce que l'on nomme la *direction de la force;* enfin, son *intensité*, ou la façon plus ou moins énergique dont elle agit pour transporter son point d'application. La représentation géométrique et analytique des deux premiers éléments n'offre aucune particularité nouvelle, mais quant à l'intensité, nous aurons besoin, pour la mesurer, de poser les principes de la comparaison des forces entr'elles. Nous nous bornons, pour le moment, à admettre comme évident que deux forces qui, agissant successivement sur un même point matériel, lui communiquent exactement le même mouvement, sont égales entr'elles.

53. II. Principe de l'indépendance des mouvements. — *Si un point matériel libre* M *animé d'une certaine vitesse et soumis à l'action de certaines forces* F, F' ..., *vient à être sollicité par une force nouvelle* P, *le mouvement relatif qu'il prendra, par rapport à un système de comparaison animé d'un mouvement de translation égal au mouvement qu'aurait eu le point* M *sans l'intervention de la force* P, *sera précisément le même que si la translation commune n'existait pas, et que la force* P *seule vint à agir sur le point* M.

Ainsi, un corps lancé d'un train de chemin de fer dans une direction perpendiculaire à la voie tombe, non au point vers lequel on l'a lancé, mais en un point plus rapproché de celui vers lequel marche le train; son mouvement par rapport au train est sensiblement indépendant de leur mouvement commun, et le même que si le train et le corps étant en repos, on appliquait à celui-ci la même force.

La première conséquence que nous déduisons de ce principe, c'est que la vitesse MV dont un point matériel M est animé à une époque quelconque t, n'influe en aucune manière sur les variations que cette vitesse éprouve, à partir de cet instant, par l'action des forces qui lui sont appliquées. Concevons, en effet, un système d'axes rectangulaires emporté par une translation constante, égale et parallèle à MV. D'après le principe énoncé, le mouvement relatif que les forces motrices impri-

meront au point M à partir de l'époque t, par rapport à ce système mobile, sera identique au mouvement qu'elles donneraient au même point, supposé en repos, par rapport aux mêmes axes supposés immobiles; il sera donc évidemment sans relation avec la vitesse MV. Ainsi l'accélération élémentaire du point mobile, qui n'est autre chose, d'après le n° **36**, que la vitesse relative à l'époque $t + \Delta t$, est la même que si la vitesse MV était nulle.

54. Appliquons ce qui précède à une force constante. Une force est *constante* pendant un temps donné, lorsque, pendant la durée dont il s'agit, sa direction ne change pas, et que l'intensité de son action sur le point matériel reste constamment égale à elle-même. Soit P une telle force, de direction AX, appliquée à un point libre et en repos placé en A : il est clair d'abord qu'elle produira un mouvement rectiligne suivant AX. De plus, si à une époque t la vitesse est v, cette vitesse croîtra d'une quantité Δv pendant un temps Δt compté à partir de l'époque t, et, d'après la remarque faite plus haut, Δv sera égal à la vitesse que la force P communiquerait au mobile partant du repos, dans le même temps Δt. Or, la force P étant constante, cette quantité Δv est toujours la même pour un même Δt, quelle que soit l'époque t; la vitesse croît de quantités égales dans des temps égaux : le mouvement est donc uniformément varié. Ainsi *toute force constante imprime à un point matériel en repos un mouvement rectiligne uniformément varié.*

Cette conséquence subsisterait complètement si le point M, au lieu d'être primitivement en repos, avait déjà une vitesse déterminée suivant AX, puisque les accroissements de la vitesse seraient toujours indépendants de la vitesse antérieurement acquise. Mais, suivant que cette vitesse initiale serait dirigée dans le sens où la force agit ou en sens contraire, celle-ci aurait pour effet d'augmenter la vitesse ou de la diminuer.

Réciproquement, un point matériel animé d'un mouvement rectiligne uniformément varié est sollicité par une force qui, nécessairement, est constante, puisqu'elle ferait acquérir au point supposé en repos une même vitesse au bout d'un même temps, quel que soit l'instant à partir duquel on considère son action.

Soient maintenant deux forces constantes P, P′, appliquées à un même point M suivant une même direction AX. La force P agissant seule produirait un mouvement uniformément varié suivant AX, avec une accélé-

ration j. Soit, de même, j' l'accélération constante qui résulterait de l'action de la force P' seule. D'après le principe II, si les forces P, P' agissent simultanément, le mouvement du point M se composera d'une translation d'*entraînement* avec une accélération j suivant AX, et d'une translation *relative* suivant la même droite avec une accélération j'. Donc, d'après la loi de composition des accélérations (42), l'accélération totale du point M sera dirigée suivant AX, et égale à $j+j'$: le point M aura encore un mouvement uniformément varié. Or, nous concevons qu'il existe nécessairement une force constante R capable, à elle seule, d'imprimer au point M suivant AX la même accélération constante $j+j'$: nous dirons, par définition, que cette force R est la *somme* des deux forces P et P'. Si les forces P, P' étaient égales, les accélérations j, j' le seraient aussi, l'accélération totale serait $2j$, et la force R serait *double* de la force P. Une force serait *triple* de P si elle communiquait au point libre M, suivant la direction AX, une accélération $3j$ triple de l'accélération due à l'action d'une seule force P, et ainsi de suite. On voit donc ce que seraient deux forces constantes P et R dont le rapport serait exprimé par un nombre entier n, par une fraction $m:n$, par un nombre incommensurable p. Il suffira donc de choisir pour unité une force bien déterminée; l'*intensité* d'une force quelconque sera représentée par le nombre qui mesure son rapport à l'intensité de la force choisie pour unité. Enfin, toute force se représentera *géométriquement* par une droite, menée à partir du point d'application dans la direction de la force, et ayant une longueur proportionnelle à l'intensité de celle-ci.

55. Il résulte de ce qui précède que *des forces constantes, agissant successivement sur un même point matériel, sont proportionnelles en intensité aux accélérations qu'elles lui communiquent.* En sorte que si P, P',... désignent les nombres qui mesurent les intensités des forces; j, j'... les accélérations constantes correspondantes, on aura

$$\frac{P}{j}=\frac{P'}{j'}=\cdots$$

Mais ce rapport $P:j$, constant pour un même point matériel, varie d'un point matériel à un autre; c'est ce que l'expérience nous apprend. Le rapport $P:j$ affecte donc pour chaque élément de la matière une valeur caractéristique : on lui donne le nom de *masse* du point matériel, et la *masse d'un corps quelconque* est la somme des masses de tous les

points matériels qui le composent. D'où il suit qu'en désignant par m la masse du point considéré, on aura

$$\frac{P}{j} = m, \quad P = mj,$$

c'est-à-dire qu'*une force constante est mesurée par la masse du point matériel auquel elle est appliquée, multipliée par l'accélération qu'elle lui communique.*

Nous expliquerons plus loin comment on évalue en pratique les masses des corps et les intensités des forces; observons seulement ici qu'il n'y a pas lieu de fixer une unité de masse, la masse étant simplement le rapport des deux nombres qui représentent la force et l'accélération.

56. Cherchons actuellement à déterminer la direction et l'intensité, à une époque quelconque t, de la force incessamment variable P qui communique à un point matériel libre M un mouvement curviligne donné.

Soit, à l'époque t, MV la droite qui représente la vitesse du point M; imaginons un système de comparaison doué d'une translation constante, égale et parallèle à MV, et soit MU la vitesse *relative* dont le point M sera animé par rapport à ce système à l'époque $t + \Delta t$, dans son mouvement vrai. D'après ce qui a été remarqué à la fin du n° **53**, MU, égal et parallèle à l'accélération élémentaire VV_1 du point mobile à l'époque t, a même grandeur et même direction que si le point M, partant du repos, était soumis pendant le même temps Δt, à l'action de la force variable P que l'on considère. D'autre part, si cette vitesse MU était engendrée par une force constante P′, la direction de cette force serait suivant MU et son intensité serait mesurée (**55**) par le produit de la masse m du point et de l'accélération constante MU : Δt du mouvement. On aurait donc

$$P' = m\frac{MU}{\Delta t} = m\frac{VV_1}{\Delta t}.$$

Si Δt tend vers zéro, la direction et l'intensité de la force constante P′ auront respectivement pour limites la direction et l'intensité, pour l'instant t, de la force variable P que nous supposons agir sur le point M, car on ne saurait définir autrement avec quelque netteté la direction et l'intensité d'une force qui varie incessamment. Mais la direction MU, à la limite, est celle de l'accélération MJ du point mobile à l'époque t, et

le rapport $\frac{VV_1}{\Delta t}$ a pour limite cette accélération j elle-même. Donc nous pouvons énoncer le théorème suivant : *Lorsqu'un point matériel libre a un mouvement curviligne quelconque, la force qui le sollicite, à chaque instant, a pour direction celle de l'accélération du point mobile; son intensité est mesurée par le produit de la masse du point par l'accélération qu'il possède à cet instant.* En sorte que X, Y, Z étant les composantes de la force P parallèlement aux axes, nous aurons les équations

$$(1) \qquad X = m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y = m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad Z = m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

57. Si deux forces égales P sont appliquées à un même point M en repos dans des directions diamétralement opposées, l'accélération totale communiquée à ce point, d'après le principe de l'indépendance des mouvements, sera la somme algébrique de l'accélération relative due à l'une des forces et de l'accélération d'entraînement due à l'autre, et ces accélérations étant égales et de signes contraires, l'accélération totale sera nulle et le point restera en repos. Donc, deux forces égales et opposées agissant simultanément sur un même point matériel, s'annulent réciproquement; si le point M avait d'abord un certain mouvement, ce mouvement ne sera pas modifié par l'intervention des forces P. On dit, dans ce cas, que les forces *se font équilibre*, ou que le point M *est en équilibre* sous l'action de ces forces. Il est clair que l'on peut, sans rien changer à l'état de repos ou de mouvement d'un corps, appliquer en un de ses points, ou en un nombre quelconque de ses points, des groupes de forces deux-à-deux égales et directement opposées. C'est ce que nous ferons souvent pour la facilité des démonstrations.

Cette propriété de deux forces égales et opposées de n'imprimer aucun mouvement à un point matériel en repos fournit le moyen le plus commode d'évaluer les intensités des forces. Au lieu de comparer les forces par les accélérations qu'elles communiquent à une même masse, on les rapporte à une force bien connue en cherchant combien il faut réunir de celles-ci pour faire équilibre à la première. Nous verrons plus loin que cette force *type* à laquelle on rapporte toutes les autres est la pesanteur, mais pour avoir une idée nette des procédés employés dans cette comparaison, il sera nécessaire de connaître les lois de la combinaison des forces et celles de leur équilibre.

58. III. PRINCIPE DE LA RÉACTION. — *Toutes les fois qu'un point matériel* A *exerce sur un autre point matériel* B *une action quelconque, réciproquement, le point* B *exerce sur le point* A *une action égale et directement opposée.* Cette seconde force se nomme la *réaction* du point B : l'action et la réaction sont donc dirigées suivant la droite qui passe par les points A et B, mais il importe d'observer qu'*elles n'agissent pas sur le même point.*

L'expérience montre que, si nous mettons un corps en mouvement en le poussant ou en le tirant, même s'il est parfaitement libre, nous éprouvons une sensation de résistance; si la traction est exercée par un fil élastique, l'allongement du lien montre bien qu'il est sollicité à ses extrémités par deux forces de sens contraire, et égales entr'elles. Dans les mouvements célestes attribués à l'attraction, nous trouvons que celle-ci est toujours réciproque et égale entre deux corps; etc.... En un mot, toutes les conséquences que l'on déduit de ce principe se vérifiant constamment, nous devons le regarder comme parfaitement établi.

Des trois principes que nous venons de poser, nous pourrons déduire, par le raisonnement et le calcul, toutes les lois du mouvement ou de l'équilibre des corps sous l'influence de forces données qui leur sont appliquées. Le problème de l'équilibre étant le plus simple, et présentant d'ailleurs une importance très-grande, nous traiterons en premier lieu de celui-là : sa solution forme l'objet de la *Statique.*

CHAPITRE V.

RÉDUCTION ET ÉQUILIBRE DES FORCES AGISSANT SUR UN MÊME POINT.

59. Considérons en premier lieu un point libre M sur lequel agissent simultanément deux forces P et P′ (fig. 43).



Fig. 43.

D'après le principe de l'indépendance, si l'on conçoit un système de comparaison doué d'un mouvement de translation égal à celui que la seule force P donnerait au point M, le mouvement relatif du point M par rapport à ce système sera dû uniquement à l'action de la force P′. Son accélération totale J à chaque instant sera donc la résultante des accéléra-

tions j et j', correspondant aux forces P et P′ considérées isolément. Mais on a vu (56) qu'une force unique R, ayant pour direction celle de l'accélération totale J et pour intensité le produit mJ de la masse du point par son accélération, lui imprimerait exactement ce même mouvement qu'il tient des forces P et P′; la force R peut donc remplacer les forces P et P′.

D'autre part, les forces P, P′, R étant dirigées respectivement suivant les accélérations j, j', J et proportionnelles à ces accélérations, les droites MP, MP′, MR qui représentent ces forces en grandeur et en direction forment entr'elles une figure semblable à celle que forment les droites qui représentent ces accélérations j, j', J : donc MR est la résultante de MP, MP′. De là le théorème connu sous le nom de *Parallélogramme des forces : Deux forces* P, P′ *agissant simultanément sur un même point matériel libre, sont réductibles à une seule, et si l'on construit un parallélogramme sur les droites qui représentent les forces* P *et* P′, *la diagonale représentera, en grandeur et en direction, la force* R *équivalente aux deux premières.*

L'utilité de ce théorème et de ceux que nous en déduirons consiste en ce que, au lieu de composer les mouvements que les points ou les systèmes prennent sous l'influence de diverses forces, nous pourrons réduire d'abord ces forces à un système plus simple et en déduire ensuite plus facilement le mouvement.

Corollaires. 1° Le triangle MPR, où PR = MP′ et où MPR = 180° — PMP′, MRP = P′MR, nous donne

$$\frac{P}{\sin \overline{P'R}} = \frac{P'}{\sin \overline{PR}} = \frac{R}{\sin \overline{PP'}},$$

$$R^2 = P^2 + P'^2 + 2PP' \cos \overline{PP'}.$$

Ces équations font connaître R et l'angle $\overline{PR}$, si P, P′ et l'angle $\overline{PP'}$ sont donnés.

2° Réciproquement, une force donnée R peut toujours être remplacée, sans que son effet sur le point M soit changé, par deux autres forces de directions données dans le même plan MP, MP′ : il suffira de décomposer suivant ces directions la droite MR qui représente la force R.

3° Lorsque les forces P, P′ font un angle droit, on a

$$\sin \overline{PP'} = 1, \quad \sin \overline{P'R} = \cos \overline{PR},$$

$$P = R \cos \overline{PR}, \quad P' = R \sin \overline{PR}, \quad R^2 = P^2 + P'^2.$$

60. Supposons maintenant un nombre quelconque de forces P, P′,... appliquées à un même point libre M. Par le théorème ci-dessus, on remplacera d'abord les forces P, P′ par leur résultante Q; la force P″ et la force Q, d'après la même règle, seront réductibles à une seule force Q′, de sorte que les forces P, P′, P″ sont remplacées par leur résultante MQ′, et ainsi de suite, quel que soit le nombre des forces P appliquées au point M. Donc, en général, *des forces* P, P′, P″,... *agissant simultanément sur un même point* M, *produisent le même effet qu'une force unique* R, *représentée en grandeur et en direction par la résultante des droites qui représentent les forces* P, P′,...

A raison de cette construction, la force R est dite la *résultante* des forces P, P′,... et celles-ci sont appelées les *composantes* de R.

En particulier, trois forces P, P′, P″ se réduisent à une seule, représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélipipède construit sur ces forces.

Appliquons les propriétés des résultantes. Soient α, β, γ les angles directeurs d'une force P, par rapport à trois axes rectangulaires OX, OY, OZ; les composantes X, Y, Z de cette force, parallèlement aux axes, auront pour expressions

$$X = P\cos\alpha, \quad Y = P\cos\beta, \quad Z = P\cos\gamma,$$

et pourront, prises simultanément, remplacer P. Mais X étant positif ou négatif suivant que l'angle α est aigu ou obtus, nous conviendrons de regarder les forces X, Y, Z comme positives ou négatives suivant qu'elles agissent dans le sens des coordonnées positives ou en sens contraire, afin de donner à ces formules toute la généralité possible. Nous aurons donc

$$P = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad \cos\alpha = \frac{X}{P}, \quad \cos\beta = \frac{Y}{P}, \quad \cos\gamma = \frac{Z}{P}.$$

Ensuite, R désignant la résultante des forces P, P′, P″... appliquées en M; a, b, c les angles directeurs de R, nous aurons, par les formules des nº **3** et **4**,

$$R_x = \Sigma X, \quad R_y = \Sigma Y, \quad R_z = \Sigma Z,$$

$$R = \sqrt{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 + (\Sigma Z)^2}, \quad \cos a = \frac{\Sigma X}{R}, \quad \cos b = \frac{\Sigma Y}{R}, \quad \cos c = \frac{\Sigma Z}{R}.$$

Les composantes X, Y, Z d'une force quelconque P étant données par les relations ci-dessus, il s'ensuit que ces formules déterminent entièrement l'intensité et la direction de la résultante R.

Si les forces P, P′, P″,... agissaient suivant une même droite, les unes dans un sens, les autres en sens contraire, il suffirait de choisir cette droite pour axe des x, et d'étendre aux forces P et à la résultante R la convention de signes admise plus haut pour leurs composantes parallèles aux axes. Chacune des forces se réduisant alors à sa composante suivant l'axe des x, l'équation

$$R_x = \Sigma X$$

se réduira à celle-ci :

$$R = \Sigma P;$$

ainsi *la résultante sera égale, en intensité, à la somme algébrique des forces données, et le signe dont cette somme est affectée fera voir dans quel sens agit la force* R.

61. *Équilibre d'un point matériel libre.* — Lorsque des forces P, P′,... agissent simultanément sur un point M, il faut évidemment, pour que l'équilibre ait lieu, que leur résultante soit nulle; cette condition suffit d'ailleurs, puisqu'elle implique que la dernière force est égale et directement opposée à la résultante des autres, ce qui entraîne l'équilibre. Les équations nécessaires et suffisantes de l'équilibre des forces appliquées à un point libre sont donc

$$R_x = 0, \quad R_y = 0, \quad R_z = 0,$$

ou

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0,$$

le signe Σ s'étendant à toutes les forces P. On déduit de ces équations que, quand l'équilibre a lieu, chacune des forces est égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres, ce qui était d'ailleurs évident.

Cette remarque conduit à une expression commode des conditions d'équilibre, lorsque les forces P sont au nombre de trois. La force P″ étant égale et opposée à la résultante Q des forces P et P′, on a

$$P'' = Q, \quad \overline{PP''} = 180^\circ - \overline{PQ}, \quad \overline{P'P''} = 180^\circ - \overline{P'Q},$$

et les relations du n° **59** (1°) donnent par substitution

$$\frac{P}{\sin \overline{P'P''}} = \frac{P'}{\sin \overline{PP''}} = \frac{P''}{\sin \overline{PP'}}.$$

Les conditions d'équilibre sont donc 1° *que les trois forces* P, P′, P″ *soient dirigées dans un même plan; 2° que chacune d'elles soit proportionnelle au sinus de l'angle des deux autres.*

62. ***Équilibre d'un point retenu sur une surface fixe.*** — Le point M étant sollicité par des forces données, et ne pouvant se mouvoir que sur la surface S, produit sur celle-ci une pression déterminée; la surface, en vertu du troisième principe (**58**), exerce à son tour sur le point M une réaction égale et contraire. Nous regardons la surface comme *parfaitement polie*, c'est-à-dire comme ne pouvant exercer en un quelconque de ses points qu'une réaction dirigée suivant la normale à la surface en ce point. D'ailleurs, l'effet que la présence de la surface produit sur l'équilibre ou le mouvement du point se trouvant compris tout entier dans cette réaction, nous pouvons faire abstraction de la surface et traiter le point M comme entièrement libre, si nous joignons aux forces motrices qui agissent sur lui la réaction normale N de la surface. D'après cela, si X, Y, Z sont les composantes rectangulaires de la résultante des forces motrices; λ, μ, ν les angles directeurs de la réaction normale, les conditions d'équilibre d'un point entièrement libre fournissent les égalités

$$(1) \qquad X + N\cos\lambda = 0, \quad Y + N\cos\mu = 0, \quad Z + N\cos\nu = 0,$$

desquelles il suit que la résultante doit être normale à la surface.

Soient x, y, z les coordonnées du point M, $F(x, y, z) = 0$ l'équation de la surface, et posons

$$V = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}.$$

On a, la force N étant normale (Cours d'Analyse, **180**),

$$(2) \qquad \cos\lambda = \pm\frac{1}{V}\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \cos\mu = \pm\frac{1}{V}\frac{\partial F}{\partial y}, \quad \cos\nu = \pm\frac{1}{V}\frac{\partial F}{\partial z},$$

et, par suite, les équations d'équilibre prennent la forme

$$X \pm \frac{N}{V}\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad Y \pm \frac{N}{V}\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad Z \pm \frac{N}{V}\frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

L'élimination du rapport N : V entre ces trois équations donne celles-ci :

$$(3) \qquad X\frac{\partial F}{\partial y} - Y\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad X\frac{\partial F}{\partial z} - Z\frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

et ces égalités, nécessaires pour que l'équilibre ait lieu, sont aussi suffisantes : en effet, elles expriment que l'on peut satisfaire aux équations (1)

moyennant une valeur convenable de N, et comme la réaction normale de la surface est supposée pouvoir atteindre toutes les valeurs possibles, et remplacer une force quelconque, l'équilibre a lieu. Les égalités (3) expriment donc les conditions de l'équilibre d'un point assujetti à rester sur la surface $F(x, y, z) = 0$. Si ces équations sont vérifiées, on tirera des relations (1)

$$N = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

ce qui donnera la réaction de la surface et, par suite, la pression qu'elle supporte; enfin, l'équation

$$N \cos \lambda = -X$$

fera connaître le signe de $\cos \lambda$, et l'on saura ainsi dans quel sens est dirigée la pression sur la surface.

Dans certains cas, le point matériel M est simplement *appuyé* contre une surface résistante qu'il peut d'ailleurs quitter, mais à travers laquelle il ne peut pénétrer. Dans ces cas, la réaction N est nécessairement dirigée vers l'*extérieur*, les signes de $\cos \lambda$, $\cos \mu$, $\cos \nu$ sont donc déterminés, et l'on doit choisir en conséquence un signe conforme dans les équations (2). Les équations (3) subsistent et expriment encore des conditions *nécessaires* de l'équilibre, mais il y en a une autre : il faut que le signe de $\cos \lambda$, tel qu'il se déduit de la première des équations (1), s'accorde avec celui qui résulte de l'hypothèse actuelle.

Dans les surfaces physiques, l'hypothèse qui nous a servi de point de départ n'est jamais parfaitement réalisée. Toujours la surface est capable de développer une certaine réaction tangentielle, un certain *frottement*, indépendamment de la réaction normale indéfinie que nous avons admise. On déterminera donc les conditions d'équilibre comme ci-dessus, mais en comprenant parmi les forces motrices une réaction tangentielle inconnue, qui ne pourra d'ailleurs dépasser une certaine limite donnée par l'expérience.

62. *Point matériel retenu sur une courbe fixe.* — La courbe est supposée sans frottement; sa réaction sur le point matériel M est donc perpendiculaire à la tangente en M, ou dirigée dans le plan normal. Joignant cette réaction normale N aux forces qui sollicitent le point M, et faisant abstraction de la courbe, on a encore les équations (1),

$$X + N \cos \lambda = 0, \quad Y + N \cos \mu = 0, \quad Z + N \cos \nu = 0.$$

Les cosinus directeurs de la tangente à la courbe étant proportionnels aux différentielles dx, dy, dz des coordonnées de celle-ci, on a la relation

$$\cos\lambda \cdot dx + \cos\mu \cdot dy + \cos\nu \cdot dz = 0,$$

et de là, multipliant les équations (1) respectivement par dx, dy, dz et les ajoutant,

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0. \tag{4}$$

C'est ici l'unique condition de l'équilibre, puisque, si elle est vérifiée, on pourra toujours déterminer N, λ, μ, ν de manière à satisfaire aux équations (1), et l'on connaîtra, en conséquence, la valeur et la direction, dans le plan normal, de la réaction N ou de la pression que le point M en équilibre exerce sur la courbe. Si les équations de la courbe sont données sous la forme

$$f(x, y, z) = 0, \quad f_1(x, y, z) = 0,$$

les différentielles dx, dy, dz vérifient les relations

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}dy + \frac{\partial f_1}{\partial z}dz = 0,$$

et l'élimination de dx, dy, dz entre ces équations et l'équation (4) donnera l'équation d'équilibre sous la forme

$$0 = X\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial f_1}{\partial y}\right) + Y\left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial z}\right) + Z\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial x}\right).$$

On remarquera, comme plus haut, que les courbes matérielles produisent toujours un certain frottement, dont on tiendrait compte de la même manière.

Remarques. 1° Dans ce qui précède, comme dans les problèmes d'équilibre que nous traiterons par la suite, nous raisonnons habituellement comme si les points matériels auxquels sont appliquées les forces qui se font équilibre étaient en repos, mais cette supposition n'est nullement nécessaire et n'a aucune influence sur les conditions d'équilibre. En effet, d'après le 2me principe de la dynamique, l'état de repos ou de mouvement d'un point n'a aucune influence sur les modifications que sa vitesse subit par l'action des forces qui agissent sur lui, et par conséquent les conditions pour que ces forces annulent réciproquement leurs effets sont les mêmes, quel que soit le mouvement du point, que si ce point était en repos.

2° La méthode employée pour ramener l'équilibre d'un point assujetti sur une surface ou sur une courbe, à l'équilibre d'un point entièrement libre, se nomme la méthode *des réactions;* elle est extrêmement féconde, et nous exposerons plus loin son application à des questions beaucoup plus générales.

Exercices.

1. Les sommets d'un triangle isocèle attirent un point matériel M placé sur la droite qui joint le sommet au milieu de la base, en raison inverse du carré de la distance et proportionnellement aux côtés respectivement opposés. Trouver la position d'équilibre du point M.

2. Un point M peut se mouvoir sans frottement sur une surface sphérique; il est soumis à n forces dirigées vers n points donnés, et proportionnelles aux distances respectives de ces points au point M. Déterminer la position d'équilibre et la pression sur la sphère.

R. Soient μ l'action à l'unité de distance; x, y, z les coordonnées rectangulaires du point m, l'origine étant au centre O de la sphère; a, b, c les coordonnées d'un quelconque des points donnés; a_1, b_1, c_1 celles d'un point G déterminé par les équations

$$na_1 = \Sigma a, \quad nb_1 = \Sigma b, \quad nc_1 = \Sigma c,$$

(*centre des moyennes distances*). Les positions d'équilibre sont aux points où la droite OG perce la surface sphérique. Soient R le rayon, $\rho_1 = \text{OG}$, N la réaction de la surface. On a

$$\text{N} = \mu n(\text{R} \pm \rho_1).$$

3. Un point, placé sur la surface d'un ellipsoïde, est sollicité par trois forces, dirigées vers les trois sommets voisins A, B, C, proportionnelles aux distances, et en raison inverse des longueurs respectives des axes qui aboutissent à ces sommets. Déterminer la position d'équilibre sans frottement et la réaction N de la surface.

R. Soient a, b, c les demi-axes; x, y, z les coordonnées de la position d'équilibre cherchée, μ une constante; posons

$$\frac{1}{\theta} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

On aura pour déterminer le point (x, y, z)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\theta}\right) = b^2\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{\theta}\right) = c^2\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\theta}\right).$$

$$\text{N} = \mu\sqrt{\left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^2 + \left(1 - \frac{y}{\theta}\right)^2 + \left(1 - \frac{z}{\theta}\right)^2}.$$

4. Un point M peut se mouvoir sans frottement sur la surface d'un ellipsoïde : il est attiré par les trois sommets *positifs*, repoussé par les trois autres, proportionnellement

à la distance et en raison inverse du carré de l'axe correspondant. Trouver la position d'équilibre et la pression sur la surface.

R. $x = \frac{a}{\sqrt{3}},\quad y = \frac{b}{\sqrt{3}},\quad z = \frac{c}{\sqrt{3}},\quad N = 2\mu\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}.$

5. Une droite fait avec le plan horizontal un angle α; un point M, mobile sur cette droite sans frottement, est en équilibre sous l'action d'une force verticale 2P agissant de haut en bas, et de deux autres forces dirigées, l'une Q suivant la droite, l'autre R horizontalement. Déterminer l'angle α, et la réaction de la droite.

R. Posons $P = M\cos\lambda$, $Q = M\sin\lambda$, il vient

$$\sin(\alpha + \lambda) = \frac{Q}{M},\quad N = \sqrt{M^2 - Q^2}.$$

6. Quelle est la position d'équilibre d'un point matériel M soumis à l'action d'une force R (X, Y, Z) et mobile sans frottement sur le cercle représenté par les équations

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2,\qquad ax + by + cz = 0.$$

R. Soit N la normale à ce dernier plan ; on trouve

$$\frac{x}{aR\cos\overline{RN} - X} = \frac{y}{bR\cos\overline{RN} - Y} = \frac{z}{cR\cos\overline{RN} - Z} = \pm\frac{\rho}{R\sin\overline{RN}}.$$

CHAPITRE VI.

PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES.

64. La théorie de la réduction et de l'équilibre des forces appliquées à un même point permet d'établir immédiatement un principe général, duquel on déduit les lois de l'équilibre des forces appliquées à un système de points matériels, liés entr'eux d'une manière quelconque. Posons d'abord quelques définitions.

Considérons un système de points matériels entre lesquels existent des liaisons et que sollicitent des forces données P, P′, ... On appelle *mouvement virtuel* de ce système tout déplacement infiniment petit qu'on peut lui attribuer, qu'il résulte ou non des forces appliquées au système. Les points M du système éprouvent alors ce qu'on nomme des *déplacements virtuels;* les quantités qui dépendent de leurs positions respectives reçoivent des différentielles que nous indiquerons par δ et

que nous nommerons des *variations*, pour les distinguer de celles qui résultent d'un mouvement réel.

La *vitesse virtuelle* d'un point M est tangente en M à la trajectoire virtuelle de ce point, dans le sens du déplacement, et a pour valeur δs, s désignant l'arc de la trajectoire virtuelle. Ce nom vient de ce que les équations dans lesquelles figurent ces δs sont toujours linéaires et homogènes par rapport à eux; on peut donc les concevoir divisées par la variation δt du temps, elles renferment alors les rapports $\delta s : \delta t$ qui sont de véritables vitesses (8). Il est parfois utile d'attribuer cette signification aux vitesses virtuelles.

D'autre part, d'après les principes sur les infiniment petits, il est également licite de prendre pour les vitesses virtuelles des divers points du système, leurs propres déplacements virtuels, car on n'altère ainsi les égalités que de quantités infiniment petites d'ordre supérieur au premier. C'est ce que nous ferons souvent.

Le *travail virtuel* d'une force P est le produit de cette force par la projection, sur sa direction, de la vitesse virtuelle δs de son point d'application M. $\overline{P, \delta s}$ étant l'angle compris entre ces deux directions, le travail virtuel de P est exprimé par $P\delta s \cos \overline{P, \delta s}$, et est *positif* ou *négatif* suivant que la vitesse virtuelle se projette sur la direction même de la force ou sur son prolongement.

On exprime autrement le travail virtuel en introduisant les composantes rectangulaines X, Y, Z de la force P et les variations δx, δy, δz des coordonnées du point M dans le mouvement virtuel considéré. On a, en effet,

$$\cos \overline{P, \delta s} = \frac{X}{P}\frac{\delta x}{\delta s} + \frac{Y}{P}\frac{\delta y}{\delta s} + \frac{Z}{P}\frac{\delta z}{\delta s},$$

d'où

$$P\,\delta s \cos \overline{P, \delta s} = X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z, \tag{1}$$

ce qui est l'expression transformée du travail virtuel de la force P.

Le travail virtuel de la résultante R *de plusieurs forces* P, P',... *appliquées à un même point, est égal à la somme algébrique des travaux virtuels des composantes dans le même mouvement virtuel.* En effet, projetons la résultante R et les composantes P sur la direction de la vitesse virtuelle. Nous aurons, d'après la première propriété des résultantes,

$$R \cos \overline{R, \delta s} = \Sigma P \cos \overline{P, \delta s},$$

et en multipliant les deux membres par δs,

$$R\,\delta s \cos \overline{R, \delta s} = \Sigma\, P\,\delta s \cos \overline{P, \delta s},$$

ce qui exprime la propriété énoncée.

65. Ces principes posés, soient M un point matériel libre et R la résultante des forces P qui lui sont appliquées : il faut et il suffit, pour l'équilibre, que R soit nul. D'ailleurs, la vitesse virtuelle δs ayant une direction quelconque, l'équation $R = 0$ entraîne celle-ci :

$$R\,\delta s \cos \overline{R, \delta s} = 0,$$

et réciproquement, si cette équation a lieu pour tout mouvement virtuel du point, comme $\cos \overline{R, \delta s}$ ne saurait être nul pour tous ces déplacements, on aura nécessairement $R = 0$. L'équation

$$R\,\delta s \cos \overline{R, \delta s} = 0, \quad \text{ou} \quad \Sigma\, P\,\delta s \cos \overline{P, \delta s} = 0,$$

exprime donc la condition d'équilibre ; donc, *pour que les forces appliquées à un point matériel libre se fassent équilibre, il faut et il suffit que la somme algébrique des travaux virtuels des forces soit nulle pour un déplacement virtuel quelconque du point.*

66. Considérons deux points M, M′ soumis respectivement à l'action de deux forces égales et directement opposées P, P′, et calculons la somme des travaux virtuels de ces forces pour un déplacement infiniment petit du système des deux points. Soient (x, y, z), (x', y', z') les coordonnées rectangulaires, r la distance des points M, M′ ; en sorte que

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = r^2.$$

Les forces P, P′ étant regardées comme positives ou négatives suivant qu'elles tendent à rapprocher ou à séparer leurs points d'application, les cosinus directeurs de la force P seront

$$-\frac{x - x'}{r}, \quad -\frac{y - y'}{r}, \quad -\frac{z - z'}{r},$$

et par suite, le travail virtuel de cette force sera

$$-\frac{P}{r}\left[(x - x')\,\delta x + (y - y')\,\delta y + (z - z')\,\delta z\right].$$

On aura de même pour celui de la force P′, en observant qu'elle est de sens contraire à la précédente,

$$\frac{P'}{r}\left[(x - x')\,\delta x' + (y - y')\,\delta y' + (z - z')\,\delta z'\right].$$

en sorte que la somme des travaux virtuels de ces deux forces est égale, à cause de $P = P'$, à

$$-\frac{P}{r}[(x-x')(\delta x-\delta x')+(y-y')(\delta y-\delta y')+(z-z')(\delta z-\delta z')].$$

Mais on tire de la valeur de r^2

$$(x-x')(\delta x-\delta x')+(y-y')(\delta y-\delta y')+(z-z')(\delta z-\delta z')=r\delta r;$$

donc enfin, l'expression cherchée de la somme des travaux virtuels des forces P et P' deviendra

$$-P\delta r,$$

et sera nulle si r est constant. Donc, *dans tout mouvement virtuel pour lequel la distance* MM' *ne varie pas, la somme des travaux virtuels des forces* P *et* P' *est égale à zéro*.

Cette propriété s'appliquerait, par exemple, à deux points M et M' unis par un lien rigide et maintenus à distance constante l'un de l'autre; ou à deux points liés par un fil parfaitement flexible et inextensible, si ce fil reste bien tendu dans le mouvement virtuel considéré. Mais elle cesserait d'avoir lieu si les points M et M' étaient unis par un lien élastique et que l'on considérât un mouvement virtuel dans lequel ce lien s'allongerait ou se raccourcirait.

67. Nous revenons maintenant à un système quelconque de points matériels, sur lequel agissent des forces données; ces points peuvent être libres, ou soumis à des liaisons qui existent entr'eux et établissent entre leurs mouvements une solidarité plus ou moins complète; ils peuvent aussi être gênés par des obstacles en dehors du système, tels que des courbes fixes, ou des surfaces fixes sur lesquelles ils sont astreints à rester, etc.

Observons d'abord que, quelles que soient les liaisons, elles sont toujours composées de points matériels appartenant au système et exerçant les uns sur les autres des réactions inconnues, en sorte qu'en réalité l'effet des liaisons se réduit toujours à ces réactions inconnues. De même, l'effet des obstacles fixes sur les points du système se réduit encore, en dernière analyse, à des réactions inconnues que ces obstacles exercent et qui concourent, avec les forces motrices proprement dites, à maintenir l'équilibre. En résumé, le système peut être considéré comme composé d'un certain nombre de points matériels *libres*, sur lesquels agissent les

forces données P, P',... qui sollicitent le système, les réactions inconnues provenant des liaisons entre les points ou des obstacles fixes extérieurs au système.

D'après la règle du n° 65, il faut, pour que chacun des points du système soit en équilibre, que la somme des travaux virtuels de *toutes les forces*, intérieures ou extérieures, qui agissent sur lui soit égale à zéro pour un déplacement infiniment petit *quelconque* de ce point. Si l'on fait la somme des équations semblables pour tous les points qui entrent dans la composition du système, on en conclut que dans *tout système matériel en équilibre, la somme des travaux virtuels de toutes les forces, intérieures ou extérieures, qui sollicitent les différents points, est nulle pour tout mouvement virtuel que l'on peut concevoir dans le système.*

Sous cette forme, ce théorème offrirait peu d'utilité pour la recherche des conditions d'équilibre, à cause de cette infinité d'actions réciproques obscures et inconnues entre les points du système, dont il faut y tenir compte. Mais en définissant plus nettement les conditions qui limitent les mouvements du système, et ne considérant que les déplacements virtuels compatibles avec ces conditions idéales, on élimine les réactions inconnues et l'équation ne renferme plus que les travaux virtuels des forces motrices proprement dites.

Concevons d'abord que certains points soient unis par des liens rigides que nous regarderons comme absolument indéformables; ou par des fils parfaitement flexibles, mais inextensibles, tendus en ligne droite entre les diverses parties du système, ou pliés sur des appuis fixes, etc. Dans le déplacement d'une tige rigide AB (fig. 44) la distance de deux de ses points M et M' assez voisins pour agir l'un sur l'autre, ne varie pas. Il en est de même dans un fil flexible CD qui se déplace infiniment peu, s'il reste tendu et inextensible comme nous le supposons (1). Et comme les actions moléculaires inconnues et réciproques de ces points M et M' sont, en vertu de la loi de



Fig. 44.

(1) Lorsqu'on parle d'un fil flexible et inextensible, on ne veut pas dire autre chose sinon que, pendant les déformations du fil, les longueurs des arcs élémentaires restent invariables, et par suite, on peut dire que les points matériels assez rapprochés pour que les forces moléculaires s'exercent entr'eux conservent des distances invariables.

réaction, égales et directement opposées, il suit du lemme établi plus haut (66) que la somme des travaux virtuels de ces forces est nulle pour le déplacement infiniment petit considéré. Le raisonnement étant applicable à tout couple de points faisant partie du système ou de ses liaisons, il en résulte que, pour tout mouvement virtuel du système dans lequel les liaisons satisfont à la condition énoncée, la somme des travaux virtuels des réactions provenant des liaisons entre les points s'évanouit d'elle-même, et ces réactions ne figurent plus dans l'équation des vitesses virtuelles.

Supposons ensuite qu'un point M du système soit retenu sur une surface fixe qui n'exerce aucun frottement. La réaction N de la surface étant normale à celle-ci, tandis que la vitesse virtuelle δs du point M est dans le plan tangent si l'on considère un déplacement compatible avec les conditions du système, on a $\cos \overline{N, \delta s} = 0$, le travail virtuel de la réaction N est donc nul. Ce raisonnement est applicable à tous les points du système qui seraient retenus sur des surfaces ou sur des courbes fixes sans frottement : la somme des travaux des réactions de ces obstacles disparaîtra donc de l'équation des vitesses virtuelles.

Il peut se faire encore qu'un point M ne puisse se mouvoir que sur la surface rigide S d'un corps faisant partie du système, et pouvant se déplacer comme lui. Ici la vitesse δs du point M n'est plus nécessairement perpendiculaire à la réaction N de la surface S, toujours dirigée suivant la normale à S, car le déplacement du point sur la surface se compose avec celui de la surface elle-même. Mais la vitesse δs sera regardée comme la résultante d'une vitesse relative MV′ du point M, tangente à la surface mobile, et d'une vitesse d'entraînement MV″ due au mouvement de la surface; sa projection sur la normale MN ou sur la direction de la réaction N se réduira évidemment à la projection de la vitesse MV″. D'ailleurs, la pression N′ que le point M exerce sur la surface S étant égale et opposée à N, et la vitesse de son point d'application étant précisément la vitesse d'entraînement MV″, les forces N et N′ auront des travaux virtuels égaux et de signes contraires dont la somme sera nulle.

Ce raisonnement s'applique également aux réactions mutuelles de deux solides S et S′, s'appuyant l'un contre l'autre par des surfaces rigides dépourvues de frottement, dans tout mouvement virtuel où ces surfaces restent en contact. Les travaux virtuels de ces réactions se détruiront encore deux-à-deux, et disparaîtront de l'équation des vitesses virtuelles.

Il suit de là que, dans tout système matériel où les conditions qui limitent les mouvements sont comprises parmi les précédentes, et pour tout mouvement virtuel du système dans lequel ces conditions sont respectées, la somme des travaux virtuels des réactions inconnues étant nulle, il faudra, si l'équilibre a lieu, que la somme des travaux virtuels des forces motrices le soit également.

68. Réciproquement, si cette condition est satisfaite pour *tous* les mouvements virtuels compatibles avec les conditions auxquelles le système est assujetti, celui-ci sera en équilibre. En effet, les accélérations que prennent les points sous l'action des forces étant indépendantes des vitesses qu'ils possèdent déjà, nous raisonnerons comme si le système partait du repos, ainsi que nous l'avons remarqué précédemment (**62**). Si les forces P appliquées au système ne se font pas équilibre, ses points M prendront un certain mouvement (A), nécessairement compatible avec les liaisons imposées à ses points, et l'on pourrait empêcher ce mouvement en appliquant à chacun des points, dans la direction opposée à celle où il tend à se mouvoir, une force d'une intensité convenable. Dès lors, l'équilibre du système aura lieu; donc, d'après le théorème établi plus haut, la somme des travaux virtuels des forces P qui lui étaient d'abord appliquées, et des forces Q que l'on vient d'introduire pour l'équilibre, sera nulle pour tout mouvement virtuel compatible avec les liaisons, et en particulier pour ce mouvement (A) que le système aurait pris si l'on n'avait pas introduit les forces Q. Mais, d'après l'hypothèse, la somme des travaux virtuels des forces P est nulle pour tout déplacement compatible avec les conditions du système, donc aussi pour ce mouvement (A); donc la somme des travaux des forces Q devra être nulle séparément. Or, ceci est impossible, car chaque force Q est directement opposée à la vitesse virtuelle de son point d'application et donne un travail virtuel négatif. Donc l'hypothèse faite était absurde, et le système proposé était en équilibre sous l'influence des forces P seulement.

Nous pouvons donc énoncer ce théorème, qui constitue le *Principe des vitesses virtuelles :*

Pour qu'un système de points matériels, liés entr'eux d'une manière quelconque et sollicités par des forces quelconques, soit en équilibre, il est nécessaire et suffisant que la somme des travaux virtuels de ces forces soit nulle, pour tout mouvement virtuel du système compatible avec les liaisons et conditions auxquelles il est assujetti.

Si donc on désigne par P l'une quelconque des forces motrices, par δs la vitesse virtuelle de son point d'application dans un mouvement compatible avec les liaisons, la condition nécessaire et suffisante de l'équilibre sera exprimée par l'équation

$$(2) \qquad \Sigma P \, \delta s \cos \overline{P, \delta s} = 0,$$

le signe Σ s'étendant à toutes les forces appliquées. Ou, X, Y, Z étant les composantes de la force P ; x, y, z les coordonnées de son point d'application, cette condition pourra s'écrire ainsi :

$$(3) \qquad \Sigma (X \, \delta x + Y \, \delta y + Z \, \delta z) = 0.$$

Nous exposerons par la suite la méthode pour appliquer ce principe de manière à en tirer dans les différents cas les conditions d'équilibre, mais il faut d'abord en préciser la portée par quelques remarques.

69. I. Les réactions mutuelles des points du système dont les travaux virtuels se détruisent deux-à-deux dans l'équation d'équilibre sont celles seulement qui s'exercent à des distances très-petites et appartiennent à la catégorie des forces moléculaires. S'il existait, entre les points, des actions s'exerçant à grande distance, comme les attractions des corps célestes, on ne pourrait plus leur appliquer les raisonnements que nous avons faits sur les forces des liaisons ; il faudrait considérer ces forces comme des forces P appliquées au système et introduire leurs travaux virtuels dans l'équation de l'équilibre. Quoique ces forces soient encore deux-à-deux égales et opposées, ce n'est que dans des cas exceptionnels que leurs travaux virtuels se détruisent.

II. Nous avons vu que le travail virtuel de la réaction normale N d'une surface fixe, sur laquelle un point M est astreint à se mouvoir, est égal à zéro. Si le point était seulement appuyé contre une surface résistante qu'il pourrait quitter dans un sens, le travail de N serait encore nul pour les déplacements virtuels sur la surface, mais non pour ceux dans lesquels le point s'éloignerait infiniment peu de sa surface d'appui. Si donc on voulait considérer un mouvement virtuel de cette espèce, il faudrait rétablir dans l'équation (2) le travail virtuel correspondant de la réaction N ; ou, ce qui revient au même, faire abstraction de la condition imposée par la surface fixe et introduire sa réaction N sur le point M au nombre des forces P appliquées au système. On tire parti de cette remarque pour évaluer ces réactions normales.

III. De même, si la surface était capable de frottement, ce que nous

n'avons pas supposé, il faudrait joindre à la réaction normale N dont le travail virtuel est nul pour les déplacements sur la surface, une réaction tangentielle, inconnue d'ailleurs d'intensité et de direction, et dont le travail virtuel ne serait pas nul en général. Le travail de cette réaction tangentielle devrait donc figurer dans l'équation d'équilibre avec ceux des forces motrices P.

IV. Enfin, les réactions moléculaires développées dans les liaisons ont été éliminées de l'équation (2) parce que, dans les différents modes de liaison que nous avons admis entre les points du système, un déplacement virtuel compatible avec ces liaisons n'altère pas sensiblement les distances réciproques entre les points qui sont assez rapprochés pour agir les uns sur les autres. Mais cette conclusion ne s'appliquerait pas, comme on l'a vu, au cas où les liens seraient élastiques, si l'on considérait un mouvement virtuel dans lequel ces liens subiraient un allongement ou une contraction. Par exemple, si deux forces P et P', égales et contraires, étaient appliquées en deux points M et M', unis par un fil élastique, il faudrait introduire dans l'équation d'équilibre la somme des travaux virtuels de ces deux forces, somme égale, comme on l'a démontré, à $-P\,\delta r$, r étant la distance MM', δr la variation de cette distance dans le mouvement virtuel considéré.

70. Appliquons le principe des vitesses virtuelles à quelques exemples, pour en bien saisir l'utilité.

I. Un point matériel M, posé sur un plan fixe AB (fig. 45), est sollicité par une force Q faisant un angle α avec la normale au plan, et maintenu en équilibre par une force inconnue P. Déterminer la force P et la pression du point M sur le plan, le frottement étant nul.



Fig. 45.

Donnons au point M une vitesse virtuelle δs sur le plan; le principe fournit l'équation d'équilibre

$$P\,\delta s \cos\overline{P,\delta s} + Q\,\delta s\cos\overline{Q,\delta s} = 0.$$

Si la vitesse δs est, de plus, normale à Q, $\cos\overline{Q,\delta s}$ s'évanouit; il faut donc que $\cos\overline{P,\delta s} = 0$; l'équilibre exige donc d'abord que la force P soit normale à δs ou dans le plan normal au plan incliné et passant par la direction de Q. Soit β l'angle que fait P avec la section AB du plan fixe par ce plan normal. Donnons une vitesse virtuelle suivant BA;

nous aurons

$$\cos \overline{Q, \delta s} = \sin \alpha, \quad \cos \overline{P, \delta s} = -\cos \beta,$$

d'où

$$Q \sin \alpha - P \cos \beta = 0, \quad P = \frac{Q \sin \alpha}{\cos \beta},$$

ce qui fait connaître la force P. Soit maintenant N la réaction normale du plan; donnons un déplacement virtuel suivant la normale MN; le travail virtuel de la réaction N sera ici $N\,\delta s$. On aura donc

$$-Q\,\delta s \cos \alpha + P\,\delta s \sin \beta + N\,\delta s = 0,$$

d'où

$$N = Q \cos \alpha - P \sin \beta = \frac{Q \cos(\alpha + \beta)}{\cos \beta}.$$

II. Un point matériel M est sollicité vers trois points A, B, C par des forces respectivement égales à mr, $m'r'$, $m''r''$; r, r', r'' désignant les distances MA, MB, MC; m, m', m'' des coefficients constants. L'angle BAC est droit. Déterminer la position d'équilibre du point M.

Prenons AB pour axe des x, AC pour axe des y, l'axe des z normal aux deux premiers; $AB = a$, $AC = b$. Les cosinus directeurs de la force qui attire le point M (x, y, z) vers A étant

$$-\frac{x}{r}, \quad -\frac{y}{r}, \quad -\frac{z}{r},$$

les composantes de cette force sont $-mx$, $-my$, $-mz$, son travail virtuel est

$$-m(x\delta x + y\delta y + z\delta z).$$

Calculant de même ceux des deux autres forces, et égalant la somme à zéro, on obtient, en posant $M = m + m' + m''$,

$$(\alpha) \qquad (m'a - Mx)\,\delta x + (m''b - My)\,\delta y - Mz\delta z = 0.$$

Les vitesses virtuelles δx, δy, δz n'étant liées par aucune condition, on doit égaler à zéro leurs coefficients. On déduit de là

$$x = \frac{m'a}{m + m' + m''}, \quad y = \frac{m''b}{m + m' + m''}, \quad z = 0,$$

pour les coordonnées de la position d'équilibre : elle est donc dans le plan ABC.

Si le point M ne pouvait se mouvoir que dans un plan représenté par l'équation

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

les variations $\delta x, \ldots$ devraient vérifier la condition

$$(\beta) \qquad A\,\delta x + B\,\delta y + C\,\delta z = 0;$$

éliminant une variation entre (α) et (β) et égalant à zéro les coefficients des deux autres, qui restent indéterminées, on aura les équations

$$\frac{Mx - m'a}{A} = \frac{My - m''b}{B} = \frac{Mz}{C} = \frac{M(Ax + By + Cz) - m'Aa - m''Bb}{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$= -\frac{MD + m'Aa + m''Bb}{A^2 + B^2 + C^2},$$

qui fournissent immédiatement les valeurs de x, y, z correspondant à la position d'équilibre.

Exercices.

1. Une tige rigide AB peut tourner librement autour de son extrémité supérieure A, dans un plan vertical; un poids P est suspendu à son extrémité inférieure B(1); une force Q proportionnelle à l'inclinaison α de la tige sur l'horizontale agit normalement à la tige en un de ses points O; déterminer la valeur de α pour laquelle l'équilibre a lieu.

R. $AB = a$, $AO = b$, $Q = \mu\alpha$, μ étant une constante. La condition d'équilibre est donnée par l'équation

$$\frac{\cos\alpha}{\alpha} = \frac{\mu b}{Pa}.$$

2. Un système articulé de Peaucellier (ch. III, § 3, fig. 41) est dans un plan vertical, les points B, O étant fixes, la droite OB horizontale. Des poids donnés P, Q pendent respectivement en A et en C. Déterminer la position d'équilibre.

R. Soient $OA = a$ le rayon du cercle décrit par le bouton A; $BP = b$ la distance du pivot B à la droite qui parcourt le sommet C; φ l'angle $180° - AOB$.

On a pour l'équilibre

$$\cos\varphi(1 + \cos\varphi) = \frac{bQ}{aP}.$$

3. Un point matériel pesant se meut librement sur une parabole dont l'axe est

(1) Quoique les notions relatives à la pesanteur ne soient exposées que plus loin, nous les admettons dans les exercices comme ayant été données dans un cours antérieur.

vertical vers le haut : il est en outre soumis à une force répulsive normale à l'axe et proportionnelle à sa distance à cet axe. Trouver la condition d'équilibre.

R. Soient ϖ le poids du point mobile, μ l'intensité de la force répulsive à l'unité de distance, p le demi-paramètre de la parabole. Il faut que l'on ait

$$p = \frac{\varpi}{\mu},$$

et le point est en équilibre dans toutes les positions.

4. Un point matériel M, mobile sans frottement sur un ellipsoïde à trois axes inégaux, est sollicité par trois forces respectivement perpendiculaires à ces axes, proportionnelles à des constantes μ, μ', μ'', et en raison inverse des carrés de ses distances δ, δ', δ'' à ces axes. Déterminer la position d'équilibre.

R. Soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

l'équation de l'ellipsoïde. Soient A, B, C des constantes définies par les équations

$$\frac{\mu}{A^3} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}, \quad \frac{\mu'}{B^3} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}, \quad \frac{\mu''}{C^3} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}.$$

On aura, pour l'équilibre,

$$\frac{\delta}{A} = \frac{\delta'}{B} = \frac{\delta''}{C}.$$

On en déduit sans peine les valeurs de x, y, z correspondant à la position d'équilibre.

CHAPITRE VII.

ÉQUILIBRE D'UN CORPS SOLIDE.

§ 1. ÉQUILIBRE DES FORCES APPLIQUÉES A UN SOLIDE LIBRE.

71. Nous allons appliquer le principe des vitesses virtuelles à la recherche des conditions d'équilibre d'un système de figure invariable, ce que nous avons appelé un *solide*, soumis à l'action de forces données et d'ailleurs entièrement libre. Les solides naturels ne jouissent pas de cette rigidité absolue que nous leur attribuons ici ; néanmoins, comme on le verra, les équations que nous allons établir sont applicables à leur équilibre et, dans la plupart des cas, suffisent pour en déterminer les conditions.

Soient X, Y, Z les composantes rectangulaires de la force appliquée à un point M du solide; δx, δy, δz les variations des coordonnées de ce point dans un mouvement virtuel quelconque du solide. La condition nécessaire et suffisante de l'équilibre est exprimée par l'équation

$$(1) \qquad \Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0,$$

le signe Σ s'étendant à toutes les forces appliquées au solide.

D'après la remarque du n° 64 sur les vitesses virtuelles, on peut remplacer dans cette équation δx, δy, δz par les composantes de la vitesse du point M dans le mouvement virtuel considéré, et ces composantes, pour le mouvement le plus général d'un solide libre, ont pour expressions d'après les formules du n° 32 :

$$u_x + qz - ry, \quad u_y + rx - pz, \quad u_z + py - qx;$$

u_x, u_y, u_z étant les composantes de la vitesse virtuelle de translation; p, q, r les composantes de l'axe instantané de la rotation du solide, suivant les axes coordonnés. L'équation (1) devient ainsi

$$\Sigma[X(u_x + qz - ry) + Y(u_y + rx - pz) + Z(u_z + py - qx)] = 0.$$

Les composantes u_x, u_y, u_z, p, q, r étant des quantités indépendantes de (x, y, z), peuvent être mises hors du signe Σ; l'équation peut donc s'écrire

$$u_x\Sigma X + u_y\Sigma Y + u_z\Sigma Z + p\Sigma(yZ - zY) + q\Sigma(zX - xZ) + r\Sigma(xY - yX) = 0.$$

La vitesse de translation peut avoir une valeur et une direction quelconques, puisque l'équation doit être vérifiée pour tous les mouvements virtuels compatibles avec la rigidité du système; il en est de même de l'axe instantané de rotation. Les quantités u_x, u_y, u_z, p, q, r sont donc entièrement arbitraires dans cette équation, ce qui exige que l'on ait

$$(2) \qquad \Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0;$$

$$(3) \qquad \Sigma(yZ - zY) = 0, \quad \Sigma(zX - xZ) = 0, \quad \Sigma(xY - yX) = 0.$$

Réciproquement, si ces équations sont vérifiées, l'équation (1) sera vraie pour tout mouvement virtuel du solide. *Les six équations* (2) *et* (3) *expriment donc les conditions nécessaires et suffisantes de l'équilibre des forces appliquées à un solide libre.*

72. L'interprétation des équations (2) est facile; pour énoncer les trois suivantes, il faut introduire une nouvelle notion. Soient P une force appliquée à un point M; AA′ (fig. 46) un axe quelconque sur lequel on



Fig. 46.

distingue une direction *positive* A′A et une direction négative AA′. Par le point M, menons un plan MBC normal à AA′, et coupant cet axe en B; projetons la force P sur ce plan, soit P_1 la projection; enfin, soit $BC = p$ la perpendiculaire abaissée du point B sur cette composante MP_1. Le produit $P_1 p$ se nomme *le moment de la force* P *par rapport à l'axe* AA′; on le regarde comme positif ou négatif suivant que la force P_1 tend à faire tourner la perpendiculaire BC de gauche à droite par rapport à la direction positive BA, ou en sens contraire. Observons que BC est perpendiculaire à l'axe AA′ et à MP_1, par suite, au plan PMP_1 et à la direction MP de la force : p mesure donc la plus courte distance entre l'axe AA′ et la direction MP. Ainsi *le moment d'une force par rapport à un axe est le produit de la projection de la force sur un plan normal à l'axe, par la plus courte distance entre l'axe et la direction de la force*, le signe de ce moment étant déterminé par la convention ci-dessus.

Il y a donc deux cas où le moment est nul : celui où la force P est parallèle à l'axe AA′, et celui où la direction de la force P rencontre l'axe AA′.

On sait exprimer les moments d'une force P par rapport à trois axes rectangulaires OX, OY, OZ (fig. 47), en fonction des composantes X, Y, Z de P, et des coordonnées x, y, z de son point d'application



Fig. 47.

M. Prenons, par exemple, l'axe des z, et cherchons le produit $P_1 p = MP_1 \times BC$. Pour faciliter cette recherche, concevons pour un instant que MP_1 représente l'axe d'une rotation imprimée au solide, et cherchons la vitesse qu'aurait le point B dans la rotation autour de l'axe MP_1. Cette vitesse est égale au produit $BC \cdot MP_1$ ou $P_1 p$, dirigée suivant BZ, et de même signe, comme il est facile de le voir, que le moment $P_1 p$ que nous cherchons. Le problème est donc ramené à exprimer cette vitesse du point B en fonction des données x, y, z, X, Y, Z, au moyen des formules (3) du n° **17** qui expriment la composante v_z de la vitesse d'un point dans une rotation autour d'un axe partant d'une origine donnée. Or, les coordonnées x_1, y_1 de l'origine M sont ici x, y;

celles du point mobile B sont o, o; les composantes de l'axe MP_1 parallèlement aux axes OX, OY, sont précisément les composantes X, Y de la force P. Nous avons donc pour la vitesse cherchée.

$$xY - yX;$$

c'est donc là, en grandeur et en signe, l'expression du moment de la force P par rapport à l'axe des z; un calcul semblable donne $yZ - zY$, $zX - xZ$, pour les moments relatifs à OX, OY. Les équations (2) et (3) s'énonceront donc comme il suit :

Pour qu'un solide libre sollicité par des forces quelconques soit en équilibre, il faut et il suffit que la somme des composantes de toutes ces forces parallèlement à trois axes rectangulaires, soit nulle pour chaque axe; que la somme des moments de toutes ces forces par rapport à trois axes rectangulaires, soit nulle pour chaque axe.

On voit immédiatement que si ces conditions sont remplies pour trois axes rectangulaires donnés, elles le seront pour une droite quelconque de l'espace, puisque l'équilibre aura lieu, et que la droite pourrait être choisie pour axe des x.

72. Appliquons les équations (2) et (3) à la solution du problème suivant : deux forces seulement, P et P', étant appliquées à un solide libre, que faut-il pour qu'elles se fassent équilibre?

Soient X, Y, Z les composantes de P; X', Y', Z' celles de P'; $M(x, y, z)$, $M'(x', y', z')$ leurs points d'application. Les équations (2) et (3) donnent

$$X+X'=o,\quad Y+Y'=o,\quad Z+Z'=o,\quad (yZ-zY)+(y'Z'-z'Y')=o,$$
$$(zX-xZ)+(z'X'-x'Z')=o,\quad (xY-yX)+(x'Y'-y'X')=o.$$

Des trois premières, on tire $X'=-X$, $Y'=-Y$, $Z'=-Z$, c'est-à-dire que les forces P, P' doivent être égales, parallèles et de sens contraire. Les trois autres deviennent, par cette condition,

$$(y-y')Z-(z-z')Y=o,\quad (z-z')X-(x-x')Z=o,$$
$$(x-x')Y-(y-y')X=o,$$

ou

$$\frac{x-x'}{X}=\frac{y-y'}{Y}=\frac{z-z'}{Z},$$

ce qui nous montre que la droite qui passe par les points M, M' d'application se confond avec la direction des forces. Ainsi *les forces* P *et* P' *sont égales et directement opposées :* telle est la condition nécessaire et suffi-

sante de l'équilibre. Il importe d'observer que, si les trois premières équations seules avaient lieu, l'équilibre n'existerait pas.

L'importante propriété que nous venons d'établir nous indique sous quelles conditions une force P appliquée à un solide libre peut être remplacée par une autre force P′, sans que rien soit changé au mouvement du solide. Quelle que soit la force inconnue P′ qui jouit de cette propriété, il est permis de l'appliquer au solide en même temps qu'une force Q égale, opposée et appliquée au même point, puisque l'on ne change rien ainsi au mouvement que la force P tend à produire. Mais pour que la force P′ seule produise le même effet que la force P ou que le système P, P′, Q, il faut et il suffit, évidemment, que les forces P et Q se fassent équilibre, c'est-à-dire, d'après ce qui précède, soient égales, de sens contraire, et agissant suivant une même droite. Donc les forces P et P′ sont égales, de même sens, dirigées suivant une même droite. De là le principe suivant : *On peut, sans modifier l'état de mouvement ou d'équilibre d'un solide entièrement libre, transporter le point d'application d'une force qui agit sur lui en un autre point quelconque pris sur la direction de la force ou sur son prolongement, et ces points sont d'ailleurs les seuls qui jouissent de cette propriété.*

Ce principe est celui de la *transposition du point d'application.* On l'admet souvent comme une sorte d'axiome, mais il a besoin d'être démontré, car c'est uniquement au point de vue du mouvement du solide ou de son équilibre que la substitution dont il s'agit est indifférente. Quant aux actions intérieures développées entre les points matériels qui composent le solide, il est clair qu'elles peuvent être fortement modifiées par le transport d'une force d'un point à un autre sur sa propre direction; et c'est précisément pourquoi il fallait d'abord, en établissant le principe des vitesses virtuelles, éliminer ces réactions intérieures et établir, comme nous venons de le faire, que l'état de mouvement ou d'équilibre d'un solide n'est pas changé par une transformation qui modifie pourtant les actions intérieures dans le système.

74. *Équilibre et réduction des forces dirigées dans un même plan.* — Lorsque les forces P qui sollicitent un solide libre ont leurs directions dans un même plan, les conditions d'équilibre se simplifient. On choisit ce plan pour plan XY; on a, pour chaque force, $z = 0$, $Z = 0$. Les équations (2) et (3) se réduisent à

$$(4) \qquad \Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma (xY - yX) = 0.$$

Les deux premières expriment que les forces données transportées parallèlement à elles-mêmes en un même point, s'y font équilibre. Dans la troisième, $xY - yX$ représente le moment de la force P par rapport à l'axe des z; or, dans le cas actuel, la force P se confond avec sa projection P_1 sur un plan normal à l'axe OZ, et la plus courte distance p avec la perpendiculaire OC abaissée de l'origine O sur la direction même de la force P.

Lorsque l'on considère des forces dans un même plan, on appelle ***moment d'une force par rapport à un point* O *du plan*** le produit de cette force par la perpendiculaire abaissée du point O sur sa direction, le produit étant affecté du signe + ou du signe — selon que la force tendrait à faire tourner la perpendiculaire dans un sens ou dans l'autre autour du point O. On voit donc que, dans le problème actuel, le moment $xY - yX$ de la force P par rapport à l'axe OZ n'est autre chose que le ***moment*** de la force P par rapport à l'origine O. Donc, ***pour l'équilibre d'un solide libre, soumis à l'action de forces agissant dans un même plan, il faut et il suffit* 1° *que la résultante de ces forces, transportées parallèlement à elles-mêmes en un même point, soit nulle;* 2° *que la somme algébrique des moments de ces mêmes forces, par rapport à un point* O *du plan, soit nulle aussi.***

Comme tout point du plan peut être pris pour origine, il est clair que cette dernière condition devra être vérifiée, quel que soit le point du plan que l'on choisisse pour le point O.

Cherchons, en général, si des forces données P, P'..., agissant sur un solide libre dans un même plan XY, peuvent être remplacées par une force unique R, appliquée en un point C (x_1, y_1, z_1) du solide. Répétant le raisonnement que nous avons fait au n° 72 pour établir le principe de la transposition, on prouverait qu'il faut et qu'il suffit, pour cela, que les forces P, P',... fassent équilibre à une force Q, égale et opposée à R, appliquée au même point C. Nous tirons de là, et des équations (2) et (3), les conditions

$$-R_x + \Sigma X = 0, \quad -R_y + \Sigma Y = 0, \quad R_z = 0,$$
$$-y_1 R_z + z_1 R_y = 0, \quad -z_1 R_x + x_1 R_z = 0,$$
$$-x_1 R_y + y_1 R_x + \Sigma(xY - yX) = 0,$$

ou

(5) $$R_x = \Sigma X, \quad R_y = \Sigma Y, \quad R_z = 0, \quad z_1 = 0,$$
$$x_1 R_y - y_1 R_x = \Sigma(xY - yX).$$

La troisième et la quatrième équations montrent que la force cherchée R est dans le plan XY, les deux premières que R *a même grandeur et même direction que la résultante des forces données transportées en un même point parallèlement à elles-mêmes.* De la cinquième nous concluons que son point d'application C est un point *quelconque* de la droite, lieu de l'équation

$$x_1 \Sigma Y - y_1 \Sigma X = \Sigma (xY - yX),$$

où l'on regarde (x_1, y_1) comme coordonnées courantes. Cette droite est évidemment parallèle à la direction de la force R, ce qui s'accorde d'ailleurs avec le principe de la transposition du point d'application. La dernière équation montre, en outre, que *le moment de la force cherchée* R *par rapport à l'origine* O, c'est-à-dire par rapport à un point arbitraire du plan, *est égal à la somme algébrique des moments des forces données* P *par rapport au même point.*

75. *Équilibre et réduction des forces parallèles.* — Si les forces appliquées au solide libre sont parallèles entr'elles, agissant les unes dans un sens, les autres en sens contraire, désignons par α, β, γ, les angles directeurs d'une force P; ses composantes seront

$$X = P\cos\alpha, \quad Y = P\cos\beta, \quad Z = P\cos\gamma.$$

Nous pouvons attribuer à $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ les mêmes valeurs pour toutes les forces, car, s'il y en a qui agissent en sens contraire de P, on devrait pour celles-là changer les signes des cosinus directeurs, ce qui revient évidemment à affecter du signe — les forces qui seraient dans ce cas, et à laisser les cosinus directeurs invariables. Cette convention admise, les six équations d'équilibre du n° 71 deviennent

$$\cos\alpha\,\Sigma P = 0, \quad \cos\beta\,\Sigma P = 0, \quad \cos\gamma\,\Sigma P = 0, \tag{6}$$

$$\cos\gamma\,\Sigma Py - \cos\beta\,\Sigma Pz = 0, \quad \cos\alpha\,\Sigma Pz - \cos\gamma\,\Sigma Px = 0, \quad \cos\beta\,\Sigma Px - \cos\alpha\,\Sigma Py = 0. \tag{7}$$

Multiplions les équations (6) respectivement par $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ et ajoutons-les : nous en déduirons l'équation équivalente $\Sigma P = 0$. Les équations (7) se réduisent à deux, savoir

$$\frac{\Sigma Px}{\cos\alpha} = \frac{\Sigma Py}{\cos\beta} = \frac{\Sigma Pz}{\cos\gamma}. \tag{8}$$

Pour les énoncer commodément, appelons *moment d'une force* P *par rapport à un plan* le produit de la force par la distance de son point

d'application à ce plan, distance qui sera comptée positivement d'un côté du plan, négativement de l'autre. En vertu de cette définition, Px est le moment de la force P par rapport du plan YZ, etc. Les conditions d'équilibre des forces parallèles, appliquées à un solide libre, sont donc celles-ci : *Il faut et il suffit que la somme algébrique des forces données soit égale à zéro, et que les sommes des moments de ces forces, par rapport à trois plans rectangulaires, soient entr'elles comme les cosinus des angles que la direction commune des forces fait avec les axes respectivement normaux à ces plans.*

76. Cherchons encore s'il est possible de remplacer des forces parallèles P sollicitant un solide libre par une force unique R, appliquée en un point C (x_1, y_1, z_1), sans troubler l'équilibre ou le mouvement du solide. Si nous appliquons au point C une force Q égale et opposée à la force inconnue R, cette force Q devra faire équilibre au système des forces P, comme nous l'avons observé. On aura donc, d'après les équations (2),

$$-R_x + \cos\alpha\Sigma P = 0, \quad -R_y + \cos\beta\Sigma P = 0, \quad -R_z + \cos\gamma\,\Sigma P = 0;$$

ou bien

$$(9) \qquad R_x = \cos\alpha\Sigma P, \quad R_y = \cos\beta\Sigma P, \quad R_z = \cos\gamma P\Sigma.$$

Si donc la force R existe, elle aura pour angles directeurs α, β, γ et pour intensité ΣP, c'est-à-dire qu'elle sera parallèle aux forces motrices P et égale à la somme algébrique de ces forces, le signe dont ΣP est affecté indiquant si cette force R agit dans le sens (α, β, γ), ou en sens contraire.

Ensuite les deux équations (8), dans lesquelles nous introduirons les moments de la force Q appliquée au point (x_1, y_1, z_1), deviendront

$$(10) \qquad \frac{-Rx_1 + \Sigma Px}{\cos\alpha} = \frac{-Ry_1 + \Sigma Py}{\cos\beta} = \frac{-Rz_1 + \Sigma Pz}{\cos\gamma}.$$

Ces deux équations, auxquelles doit satisfaire le point d'application C de la force R, représentent, quand (x_1, y_1, z_1) sont des coordonnées courantes, une droite parallèle à la direction commune des forces. La force R, dont la direction, l'intensité et le sens d'action sont déjà déterminés, peut donc être appliquée en un point quelconque de cette droite sans cesser d'être équivalente au système des forces P, ce qui s'accorde avec le principe de la transposition du point d'application.

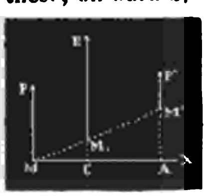
La force R, équivalente à un groupe de forces données, dans le cas actuel et dans celui du n° **74**, se nomme par extension la *résultante* de ces forces.

77. Il existe pourtant sur la droite (10) un point remarquable G tel que, si la direction commune des forces P par rapport au solide varie d'une manière quelconque, leurs points d'application, leurs intensités et le sens relatif de leur action ne changeant pas, la résultante R passera toujours par ce point G. En effet, quelques valeurs qu'on attribue à α, β, γ, les équations (10) sont vérifiées si l'on pose

$$(11) \qquad Rx_1 = \Sigma Px, \quad Ry_1 = \Sigma Py, \quad Rz_1 = \Sigma Pz.$$

Le point x_1, y_1, z_1 déterminé par ces équations se nomme le *centre des forces parallèles* P. De là la propriété suivante, fort importante : *Quand des forces parallèles, dont les points d'application et les intensités sont déterminés, agissent sur un solide libre, elles peuvent être remplacées, en général, par une force unique parallèle aux composantes et égale à leur somme algébrique. Cette résultante passe par un point déterminé du solide, quelle que soit la direction commune des forces parallèles données par rapport au solide.*

Si, comme il est naturel, on choisit pour point d'application de la force R le point G que nous venons de déterminer, les équations (11) fourniront le théorème suivant : *Les moments de la résultante d'un système de forces parallèles, par rapport à trois plans rectangulaires, sont respectivement égaux aux sommes des moments des composantes par rapport à ces mêmes plans.* La même propriété subsistera d'ailleurs, cela est clair, pour un plan quelconque. Les équations (11) montrent encore que *si la somme des moments des forces P, par rapport à un certain plan, est nulle, le centre des forces parallèles est dans ce plan.* Car, si l'on choisit ce plan pour plan XY, l'équation $\Sigma Pz = 0$ ayant lieu par hypothèse, on aura $z_1 = 0$, ce qui démontre la proposition.


Fig. 48.

78. Pour établir entre la statique et la cinématique un rapprochement utile, appliquons ce qui précède au cas où les forces parallèles se réduisent à deux, P et P'. Pour plus de facilité, prenons pour plan XY (fig. 48) celui qui contient ces forces, pour origine le point d'application M de P, pour axe des y positifs la direction MP, l'axe des x positifs étant perpendiculaire à

M'P'. La force P sera positive; P' sera positif ou négatif suivant que cette force agit ou non dans le même sens que P. Les équations (9) et (11) deviennent, (x', y') étant les coordonnées de M',

$$(12)\quad \begin{cases} R_x = 0, \quad R_y = P + P', \quad R_z = 0, \quad \text{d'où } R = P + P'; \\ Rx_1 = P'x', \quad Ry_1 = P'y', \quad Rz_1 = 0. \end{cases}$$

La résultante est donc parallèle aux forces données, située dans le même plan, égal à leur somme algébrique. L'équation $Rx_1 = P'x'$ donne ensuite

$$\frac{x'}{R} = \frac{x_1}{P'} = \frac{x' - x_1}{R - P'} = \frac{x' - x_1}{P},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{AC}{MP} = \frac{MC}{M'P'} = \frac{AM}{M_1R},$$

relations qui ont lieu quels que soient le sens d'action des forces et les signes des segments AC, MC, AM. Il en résulte le théorème suivant, dont l'analogie avec la loi de composition des rotations parallèles est évidente: ***Deux forces parallèles* P, P' *appliquées à un solide libre donnent une résultante* R *qui leur est parallèle, dans le même plan, et égale à leur somme algébrique dont le signe détermine le sens de son action. Sur une perpendiculaire commune aux directions de ces trois forces* P, P', R, *deux quelconques d'entr'elles déterminent un segment proportionnel à la troisième.***

La résultante R se trouve ainsi parfaitement déterminée. Le point M_1, où sa direction coupe la droite MM' qui joint les points d'application de P, P', est le centre de ces forces parallèles. On a en effet par les équations (12),

$$\frac{x_1}{x'} = \frac{y_1}{y'},$$

ce qui fait voir que le centre des forces parallèles ne peut être que sur la droite MM'.

79. La détermination de la résultante R dans le cas dont il s'agit présente une exception remarquable, semblable à celle qui se rencontre dans la réduction des rotations parallèles. Si l'on suppose $P' = -P$, R devient nul et x_1 devient infini, à moins que x' ne soit nul, c'est-à-dire que les forces P, P' ne soient égales et opposées, auquel cas elles se détruiraient.

Le système de deux forces P, P' égales, parallèles et de sens contraire n'est donc pas réductible à une simple force sur un solide libre, car, si

cette force existait, son point d'application devrait être déterminé par les formules ci-dessus, et nous venons de voir qu'elles conduisent à $x_1 = \infty$. D'autre part, quoique R soit nul, l'équilibre n'a pas lieu, car nous avons démontré au n° **72** qu'il faudrait pour cela que les forces P et P' agissent suivant une même droite. Le système P, P' est donc irréductible; on lui donne le nom de *couple*, et nous étudierons plus loin ses propriétés.

Il est bon d'observer que ce cas d'exception peut se présenter dans quelques-uns des problèmes que nous avons traités précédemment. Ainsi, dans le cas où les forces agissent dans un même plan, nous avons vu (**74**) que leur résultante est déterminée par les équations (5). Or, si l'on a $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, sans avoir en même temps $\Sigma(xX - yX) = 0$, il viendra

$$R_x = 0, \quad R_y = 0,$$

la résultante sera nulle, et la droite représentée par la troisième équation (5) s'éloignera à l'infini. En raisonnant comme plus haut, on verra que les forces P ne sont pas réductibles à une simple force; nous montrerons plus loin qu'elles se réduisent à un couple.

De même, si dans les équations (9) et (10) on avait $\Sigma P = 0$, sans que l'on eût en même temps

$$\frac{\Sigma Px}{\cos\alpha} = \frac{\Sigma Py}{\cos\beta} = \frac{\Sigma Pz}{\cos\gamma},$$

la résultante des forces parallèles serait nulle et les équations (10) seraient impossibles, en sorte qu'aucune force ne pourrait remplacer seule le système des forces P; celles-ci se réduiraient encore à un couple.

Exercices.

1. Un solide est sollicité par quatre forces dans un même plan, appliquées à quatre points donnés A, B, C, D (fig. 49) en ligne droite; la première ϖ, verticale de bas en haut; la deuxième P, verticale de haut en bas; les deux autres ϖ', ϖ'', perpendiculaires à la droite AD. La force P est donnée ainsi que l'angle α que fait AD avec l'horizontale AX. Trouver ϖ, ϖ', ϖ'' quand l'équilibre a lieu.

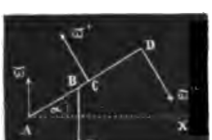


Fig. 49.

R. $AB = a$, $CD = b$; on a

$$\varpi = P, \quad \varpi' = \varpi'' = -\frac{Pa\cos\alpha}{b}.$$

Le signe —, indique que les forces ϖ', ϖ'' doivent être dirigées en sens contraire de celui qui est supposé dans la figure.

2. Un rectangle ABCD (fig. 50), placé dans un plan vertical, est en équilibre sous l'action de trois forces, l'une verticale donnée P appliquée au milieu de BC, la deuxième horizontale ϖ appliquée en A, la troisième ϖ', de direction inconnue, appliquée en D. On connaît l'angle α que fait AD avec l'horizontale OX, et l'on demande de déterminer les forces ϖ et ϖ'.

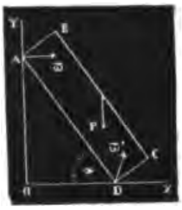


Fig. 50.

R. Soient $AB = b$, $BC = 2a$, X et Y les composantes horizontale et verticale de la force ϖ'. On trouve

$$\varpi = \frac{P(a \cos \alpha - b \sin \alpha)}{2a \sin \alpha}, \quad X = -\varpi, \quad Y = P.$$

3. Une barre rigide AB est en équilibre entre trois forces, l'une verticale donnée P appliquée au milieu de AB, une seconde ϖ appliquée en A, une troisième Q donnée, appliquée en B, et dont la direction doit passer par un point donné C du plan qui contient P, AB. On demande l'intensité et la direction de la force ϖ, l'angle θ que fait AB avec l'horizontale AX, l'angle θ' que fait BC avec AB.

R. Soient $AB = 2l$; ρ et α les coordonnées polaires de C rapportées au pôle A et à AX; en projetant les forces sur l'horizontale et la verticale, et prenant les moments par rapport au point A, on trouvera pour déterminer les inconnues le système d'équations :

$$\sin \theta' = \frac{P}{2Q} \cos \theta, \quad 2l \sin \theta' = \rho \sin(\theta + \theta' - \alpha),$$

$$\varpi \cos \overline{\varpi X} = -Q \cos(\theta + \theta'), \quad \varpi \sin \overline{\varpi X} = P - Q \sin(\theta + \theta').$$

4. Trois forces P, P', P'' sont appliquées à un parallélipipède rectangle solide, respectivement suivant trois arêtes qui ne se rencontrent pas. Quelle est la condition pour qu'une seule force R puisse leur faire équilibre? Déterminer cette force.

R. Prenons pour axes trois arêtes contiguës, OX suivant la force P, OY parallèle à P' et rencontrant P''; soient a, b, c les longueurs des arêtes parallèles à P, P', P''; X, Y, Z les composantes de la force R; (x, y, z) son point d'application. La condition demandée est

$$\frac{a}{P} + \frac{b}{P'} = \frac{c}{P''}$$

et si elle est réalisée, on a

$$X = -P, \quad Y = -P', \quad Z = -P'', \quad \frac{x}{P} = \frac{z}{P''}, \quad \frac{y-b}{P'} = \frac{z-c}{P''}.$$

5. Aux sommets B, C, D d'un tétraèdre ABCD sont appliquées trois forces parallèles P, Q, R. Déterminer la distance r du centre de ces forces au point A.

R. $$AB = b, \quad AC = c, \quad AD = d.$$

$$r^2(P^2 + Q^2 + R^2) = P^2b^2 + Q^2c^2 + R^2a^2 + 2PQbc \cos BAC + 2QRcd \cos CAD + 2RPda \cos DAB.$$

§ 2. THÉORIE DES COUPLES ET RÉDUCTION GÉNÉRALE DES FORCES APPLIQUÉES A UN SOLIDE.

80. Nous avons appelé *couple* le système irréductible de deux forces égales, parallèles, de sens contraire, appliquées à un solide. Le *moment* d'un couple est le produit de l'une des forces P, P′ qui le constituent par la distance p comprise entre les directions de ces forces; p est le *bras* du couple.

La première question que nous allons résoudre sera de chercher ce que deviennent, pour un couple donné K, les expressions $\Sigma X, \Sigma Y, \ldots$ $\Sigma(yZ - zY), \ldots$ c'est-à-dire les sommes des projections des forces P, P′ sur les axes rectangulaires et les sommes de leurs moments par rapport à ces axes. Les forces P, P′ étant égales, parallèles, de sens contraire, il est clair que $X' = -X \ldots$, donc ΣX, ΣY, ΣZ sont nuls. Soient $M(x, y, z)$ $M'(x', y', z')$ les points d'application des forces P, P′ : les sommes des moments auront pour valeurs,

$$(y-y')Z-(z-z')Y, \quad (z-z')X-(x-x')Z, \quad (x-x')Y-(y-y')X.$$

Pour nous représenter géométriquement ces quantités, concevons que l'on élève en un certain point du plan du couple, par exemple au point M′ (fig. 51) une droite M′K normale à ce plan, proportionnelle au moment Pp du couple, et du côté de ce plan où la rotation que la force P tend à imprimer à la perpendiculaire p se ferait de gauche à droite pour un observateur placé sur M′K, les pieds en M′, la tête en K. Ainsi déterminée, cette droite M′K, que l'on appelle l'*axe* du couple K, coïncide évidemment pour la grandeur, la direction et le sens avec la droite qui figurerait la vitesse du point M′, dans une rotation du solide autour d'un axe représenté par la droite MP, rotation dont la vitesse angulaire serait conséquemment proportionnelle à la force P.

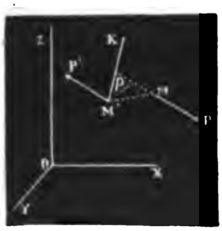


Fig. 51.

Or, les composantes de cet axe de rotation étant X, Y, Z; les coordonnées du point M′ étant x', y', z', il suit des formules (3) du n° **17** que les composantes de cette vitesse du point M′, ou les projections de M′K sur les axes, seront respectivement

$$Y(z'-z)-Z(y'-y), \quad Z(x'-x)-X(z'-z), \quad X(y'-y)-Y(x'-x),$$

c'est-à-dire auront précisément les mêmes valeurs que les moments du couple. De là cette proposition, très importante dans la théorie des couples : *Les sommes des moments des forces d'un couple par rapport à trois axes rectangulaires sont respectivement égales, en grandeur et en signe, aux composantes de l'axe du couple parallèlement à ces trois axes coordonnés.*

D'où il suit, toute droite pouvant être prise pour un des axes coordonnés, que *la somme des moments des forces d'un couple par rapport à une droite quelconque est égale à la projection de l'axe du couple sur cette droite.*

81. Ce qui précède permet de résoudre fort simplement la question suivante : sous quelles conditions un couple K' peut-il être substitué à un couple K donné (fig. 52), appliqué sur un solide libre, sans modifier le mouvement de celui-ci ? — On voit tout d'abord, par un raisonnement déjà plusieurs fois employé (**73**, **74**), qu'il est nécessaire et suffisant pour cela que le solide soit en équilibre entre le couple donné K, et un couple K'' formé de deux forces égales et directement opposées à celles qui constituent le couple K'. Écrivons donc que les six équations d'équilibre d'un solide libre sont vérifiées, lorsque l'on joint aux forces qui composent le couple K celles qui composent le couple K''. Les trois équations



Fig. 52.

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0$$

sont nécessairement vérifiées, puisqu'elles le sont pour chacun des couples K, K'' séparément. Quant aux trois équations des moments $\Sigma(yZ - zY) = 0$, etc., il suit de ce qui a été établi au numéro précédent que, si l'on désigne par K_x, K_y K_z les composantes de l'axe du couple K parallèlement à OX, OY, OZ; par K'_x, K'_y, K'_z celle de l'axe du couple K', et si l'on observe que, d'après les conventions adoptées (**80**), l'axe du couple K'' a pour composantes $-K'_x$, $-K'_y$, $-K'_z$, les trois équations des moments pourront s'écrire

$$K_x - K'_x = 0, \quad K_y - K'_y = 0, \quad K_z - K'_z = 0,$$

ou

$$K'_x = K_x, \quad K'_y = K_y, \quad K'_z = K_z,$$

ce qui signifie que les couples K, K' ont leurs axes égaux, parallèles et

dirigés dans le même sens. Cette condition est d'ailleurs suffisante, d'après le raisonnement qui précède, donc

Pour qu'un couple K′ puisse être substitué à un couple K sur un solide libre, il est nécessaire et suffisant que les axes de ces couples soient égaux, parallèles et dirigés dans le même sens.

En observant la manière dont se détermine l'axe d'un couple, ce théorème peut encore s'énoncer ainsi :

Deux couples sont équivalents sur un solide libre pourvu que leurs plans soient parallèles, que leurs moments soient égaux, et que le sens de la rotation qu'ils tendent à imprimer à leurs bras soit le même.

Il suit de là cette conséquence fort importante, qu'un couple est complétement déterminé, au point de vue du mouvement qu'il peut imprimer à un solide libre, dès que son axe est connu de grandeur et de direction, puisque cet axe fait connaître tout ce qui doit être déterminé pour que l'effet du couple soit déterminé.

Quant au point où l'on place l'origine de l'axe représentatif du couple, il est tout-à-fait arbitraire : on peut, par exemple, prendre pour chaque couple le milieu de son bras, ou encore, et c'est ce qu'il y a de plus commode, choisir pour origine commune des axes de tous les couples que l'on a à considérer, l'origine même des coordonnées. Il résulte du théorème ci-dessus que cela n'a aucune influence.

82. *Réduction des couples.* — Examinons si, lorsque des couples en nombre quelconque agissent sur un solide libre, il est possible de les remplacer par un couple unique sans modifier le mouvement ou l'équilibre du solide. Tirons de l'origine O des droites OK, OK′, OK″,... représentant les axes des couples donnés : ceux-ci sont par là entièrement déterminés. Raisonnons comme dans le problème précédent : pour qu'il existe un couple G équivalent au système des couples K, K′, K″,... il faut et il suffit que le solide soit en équilibre entre les couples K, K′, K″,... d'une part, et un couple égal et de sens contraire au couple G, de l'autre.

Donc, les six équations (2) et (3) de l'équilibre (**71**) devront être vérifiées si l'on joint aux forces qui composent les couples K, K′... celles qui composent le couple égal et contraire à G. Les équations des projections $\Sigma X = 0$, ... ne donnent lieu à aucune condition (**81**). Soient K_x, K_y, K_z les projections sur OX, OY, OZ de l'axe d'un couple quelconque K; d'après ce que nous avons établi au n° **80**, ΣK_x, ΣK_y, ΣK_z représentent en grandeur et en signe les sommes des moments des forces données par

rapport à OX, OY, OZ; de même, si G_x, G_y, G_z sont les composantes de l'axe du couple G, $-G_x, -G_y, -G_z$ représenteront les sommes des moments des forces du couple égal et contraire à G. Les trois équations des moments seront donc ici

$$\Sigma K_x - G_x = 0, \quad \Sigma K_y - G_y = 0, \quad \Sigma K_z - G_z = 0,$$

ou

$$G_x = \Sigma K_x, \quad G_y = \Sigma K_y, \quad G_z = \Sigma K_z,$$

ce qui détermine en grandeur et en direction l'axe du couple cherché G. On voit donc que *des couples en nombre quelconque, appliquées à un solide libre, sont toujours réductibles à un couple unique; l'axe du couple qui peut ainsi remplacer le système des couples proposés est la résultante des axes de ces couples.*

Ainsi, en particulier, *si des couples* K, K'..., *ont leurs plans parallèles* et conséquemment leurs axes dirigés suivant une même droite, *l'axe du couple résultant sera égal à la somme algébrique des axes des couples composants, et le signe de cette somme indiquera le sens dans lequel il est dirigé.*

Si les couples K, K' *se réduisent à deux, l'axe du couple équivalent sera la diagonale du parallélogramme construit sur les axes des couples* K *et* K'.

S'ils sont au nombre de trois K, K', K'', *l'axe du couple équivalent sera la diagonale du parallélipipède construit sur leurs axes, et ainsi de suite.*

Réciproquement, un couple quelconque K pourra être remplacé par deux ou plusieurs autres; il suffit que son axe soit la résultante de leurs axes. On peut, par exemple, lui substituer trois couples, ayant leurs axes dirigés suivant les axes OX, OY, OZ et donnés, en grandeur et en signe, par les projections de l'axe du couple K sur OX, OY, OZ ou K_x, K_y, K_z. Il suit de là que, si l'on considère un nombre quelconque de couples K, si G désigne l'axe du couple équivalent, λ, μ, ν les angles directeurs de cet axe, les formules relatives aux résultantes donneront

$$G_x = \Sigma K_x, \quad G_y = \Sigma K_y, \quad G_z = \Sigma K_z, \quad G = \sqrt{(\Sigma K_x)^2 + (\Sigma K_y)^2 + (\Sigma K_z)^2},$$

$$\cos\lambda = \frac{\Sigma K_x}{G}, \quad \cos\mu = \frac{\Sigma K_y}{G}, \quad \cos\nu = \frac{\Sigma K_z}{G},$$

ce qui déterminera en grandeur et en direction l'axe du couple G.

83. ***Relations entre la cinématique et la statique.*** — Au point de vue de la forme géométrique, il y a analogie complète entre les lois qui régissent les translations et les rotations imprimées à un solide, et celles qui régissent respectivement les couples et les forces qui lui sont appliquées. On peut faire glisser un axe de rotation comme on veut sur sa propre direction sans altérer le mouvement, comme on peut transporter une force sans changer son effet. Les forces appliquées à un même point, les forces parallèles, se composent suivant les mêmes lois que les axes de rotation passant par un même point et que les axes parallèles. Aux couples de forces, correspondent les couples de rotation, c'est-à-dire les translations; et de même que la droite qui figure une translation peut être portée indifféremment en tout point du solide, de même l'axe représentatif d'un couple de forces peut avoir, comme on l'a vu, son origine en un point quelconque. Les axes des couples en nombre quelconque se composent suivant les mêmes lois que les vitesses des translations, etc.

Le théorème du n° **82**, sur le déplacement d'un axe de rotation parallèlement à lui-même, a pour analogue le suivant, qui se démontre absolument de la même manière. Soit P une force appliquée en un point O d'un solide; nous ne changeons rien à l'action de cette force P en appliquant en un point O′, choisi arbitrairement, deux forces P′, P″ égales et parallèles à P, et directement opposées l'une à l'autre. Les forces P, P″ constituent un couple dont l'axe O′V (fig. 53) est normal au plan POO′, égal au produit de la force P par la distance *p* du point O′ à OP, dirigé du côté du plan POO′ où la rotation que la force P tend à imprimer à *p* aurait lieu de gauche à droite (**80**). Mais on voit immédiatement que cet axe O′V se confond pour la grandeur et la direction, avec la droite représentative de la vitesse du point O′ dans une rotation du solide représentée par OP, donc *toute force* P *appliquée en un point* O *d'un solide peut être transportée parallèlement à elle-même en un autre point quelconque* O′ *du solide, pourvu qu'on lui joigne un couple dont l'axe* O′V *est figuré par la vitesse du point* O′ *dans une rotation dont l'axe serait représenté par la force primitive* OP.

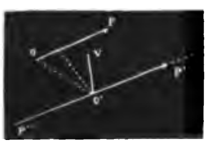


Fig. 53.

La règle est donc encore le même qu'au n° **82**, les forces remplaçant les axes de rotation, l'axe du couple remplaçant la translation, et toutes les conséquences que nous avons déduites de la première règle pour la

réduction des mouvements d'un solide se déduiront de celle-ci pour la réduction des forces.

84. Soient P, P'..., des forces en nombre quelconque, appliquées à un solide libre. Transportons la force P parallèlement à elle-même en un point O choisi arbitrairement dans le solide (ou même en dehors pourvu qu'il lui soit invariablement lié), ce qui engendrera un certain couple K. Répétons la même opération pour toutes les autres forces P',... appliquées au solide.

Toutes les forces, égales et parallèles aux forces données, qui agissent maintenant au point O, se réduisent à une force unique R, représentée par la résultante des droites qui représentent ces forces (**60**) : nous l'appellerons la *force résultante*. Tous les couples K se réduiront à un seul couple G, dont l'axe OG sera la résultante des axes des couples K, comme nous l'avons établi au n° **82** : c'est le *couple résultant*. D'où ce théorème, dont nous avons vu l'analogue en cinématique (**32**) : *Tant de forces que l'on voudra, appliquées à un solide libre, sont toujours réductibles à une seule force appliquée en un point arbitrairement choisi, et à un seul couple.*

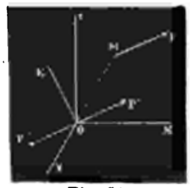
La force résultante R est indépendante du point choisi O, que nous nommons le *centre de réduction*, puisqu'elle n'est autre que la résultante de toutes les forces P transportées parallèlement à elles-mêmes au point O. Mais l'axe du couple G varie de grandeur et de direction suivant le point du solide où se fait la réduction des forces, et l'analogie nous permet d'énoncer les théorèmes suivants, qui se démontreraient comme leurs correspondants en cinématique :

Parmi tous les modes de réduction des forces P *à une force et à un couple, on peut choisir le centre de réduction de telle manière que la force résultante et l'axe du couple résultant soient dirigés suivant une même droite. Tous les points d'une certaine droite* (D), *parallèle à la force résultante, jouissent de cette propriété.*

L'axe du couple résultant relatif à un centre de réduction non situé sur la droite (D) *donne une projection constante sur celle-ci, projection égale à l'axe du couple résultant relatif à un centre de réduction situé sur cette droite* (D), qui prend le nom d'*axe central* du système des forces données.

L'axe central est donc le lieu des centres de réduction pour lesquels l'axe du couple résultant est un *minimum*.

85. Tous ces théorèmes relatifs à l'axe du couple résultant se transforment en théorèmes relatifs aux moments des forces, si l'on a égard à la relation suivante : Lorsqu'on transporte à l'origine O la force P (fig. 54), dont les composantes rectangulaires sont X, Y, Z, et dont le point d'application M a pour coordonnées x, y, z, ce transport fait naître un couple K. On a vu (80) que la projection K_x de l'axe de ce couple sur OX égale, en grandeur et en signe, la somme des moments des forces du couple par rapport à OX; ou, puisque l'une des forces du couple K est ici appliquée en O et donne un moment nul par rapport à OX, la projection de OK sur OX se réduit au moment de la force P appliquée en M, c'est-à-dire à $yZ - zY$. Observant que l'axe OX est une droite quelconque et l'origine O un point quelconque de cette droite, on tire de là ce premier théorème : *Le moment d'une force* P *par rapport à une droite donnée exprime, en grandeur et en signe, la projection sur cette droite de l'axe du couple* K *que l'on ferait naître, en transportant la force* P *parallèlement à elle-même en un point quelconque de cette droite.*


Fig. 54.

On a de même, pour les projections sur OY, OZ, les valeurs

$$K_y = zX - xZ, \qquad K_z = xY - yX.$$

Nous pouvons maintenant déterminer analytiquement la force résultante et le couple résultant d'un système de forces données, pour un centre de réduction O choisi comme origine des axes rectangulaires. La force résultante R coïncidant avec la résultante des forces P transportées à l'origine O, nous aurons

$$R_x = \Sigma X, \quad R_y = \Sigma Y, \quad R_z = \Sigma Z,$$

et si a, b, c sont les angles directeurs de R,

$$R = \sqrt{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 + (\Sigma Z)^2},$$

$$\cos a = \frac{\Sigma X}{R}, \quad \cos b = \frac{\Sigma Y}{R}, \quad \cos c = \frac{\Sigma Z}{R}.$$

De même, l'axe du couple résultant G étant la résultante des axes des couples K définis plus haut, si λ, μ, ν désignent les angles directeurs de

cet axe et G sa valeur, nous aurons

$$G_x = \Sigma K_x = \Sigma\,(yZ - zY), \quad G_y = \Sigma K_y = \Sigma\,(zX - xZ),$$
$$G_z = \Sigma K_z = \Sigma\,(xY - yX).$$

$$G = \sqrt{\Sigma\,[yZ - zY]^2 + \cdots}, \quad \cos\lambda = \frac{G_x}{G}, \quad \cos\mu = \frac{G_y}{G}, \quad \cos\nu = \frac{G_z}{G}.$$

On voit clairement ici ce qu'expriment les six équations d'équilibre d'un solide, données au n° 71 : *les trois premières expriment que la force résultante* R *est nulle ; les trois dernières que l'axe du couple résultant* G *est nul.*

86. La relation entre les couples et les moments, donnée plus haut, conduit immédiatement aux conséquences suivantes : 1° *La somme des moments des forces* P *appliquées à un solide, par rapport à un axe* OX, *est égale à la projection algébrique, sur cette droite, de l'axe du couple résultant des forces* P *relatif à un centre de réduction* O *pris sur* OX. 2° *De toutes les droites passant par un même point* O, *celle pour laquelle la somme des moments des forces est maximum coïncide avec la direction de l'axe du couple résultant* OG *des forces* P, *pour le centre de réduction* O. 3° *Pour toutes celles de ces droites qui font un même angle avec* OG, *la somme des moments a la même valeur; pour celles qui sont perpendiculaires à* OG, *le moment est nul.* 4° *La somme des moments des forces* P *par rapport à une droite qui fait* OX, OY, OZ *des angles* α, β, γ *a pour expression*

$$\cos\alpha\Sigma K_x + \cos\beta\Sigma K_y + \cos\lambda\Sigma K_z.$$

5° *Il existe une droite unique telle que, en chacun de ses points, la direction de la droite pour laquelle la somme des moments est maximum coïncide avec celle de la droite elle-même* (AXE CENTRAL). *Cette somme des moments est d'ailleurs un* MINIMUM, *par rapport au moment maximum relatif à toute autre droite dans l'espace.*

87. Résolvons une dernière question. Nous avons prouvé (**84**) qu'en général le système de forces P, appliquées à un solide libre, est réductible à une force et à un couple. Quelles sont les conditions qui doivent avoir lieu pour que le système soit réductible 1° à une simple force R ; 2° à un simple couple G?

1° Soit C (x_1, y_1, z_1) le point où il faut appliquer la force résultante

R pour que le couple résultant s'évanouisse. Les forces P devront être équilibrées par une force égale et opposée à R, donc

$$(1)\quad \begin{cases} -R_x + \Sigma X = 0, \quad -R_y + \Sigma Y = 0, \quad -R_z + \Sigma Z = 0, \\ -y_1 R_z + z_1 R_y + \Sigma(yZ - zY) = 0, \quad -z_1 R_x + x_1 R_z + \Sigma(zX - xZ) = 0, \\ -x_1 R_y + y_1 R_x + \Sigma(xY - yX) = 0. \end{cases}$$

Les trois premières donnent $R_x = \Sigma X$, $R_y = \Sigma Y$, $R_z = \Sigma Z$, ce qui détermine la force R sans aucune condition. Les trois autres peuvent s'écrire

$$(2)\quad y_1 \Sigma Z - z_1 \Sigma Y = \Sigma K_x, \quad z_1 \Sigma X - x_1 \Sigma Z = \Sigma K_y, \quad x_1 \Sigma Y - y_1 \Sigma X = \Sigma K_z;$$

multipliées respectivement par ΣX, ΣY, ΣZ et ajoutées, elles donnent l'équation

$$(3)\qquad \Sigma X \cdot \Sigma K_x + \Sigma Y \cdot \Sigma K_y + \Sigma Z \cdot \Sigma K_z = 0$$

qui, ne renfermant pas x_1, y_1, z_1, exprime la condition à laquelle doivent satisfaire les forces données P pour que le problème admette une solution. Comme $\Sigma X, \ldots$ sont les projections de la force résultante R, et $\Sigma K_x, \ldots$ les projections de l'axe du couple résultant G relatif à l'origine actuelle des coordonnées (qui est quelconque), cette condition peut s'exprimer ainsi :

Pour que les forces P *appliquées à un solide libre soient réductibles à une force unique, il faut que la force résultante et l'axe du couple résultant du système des forces* P, *relatifs à un centre de réduction donné quelconque, soient perpendiculaires l'un à l'autre.*

Cette condition est d'ailleurs suffisante en général, car, si l'équation (3) est vérifiée, les équations (2) auxquelles le point C doit satisfaire se réduisent à deux et représentent, x_1, y_1, z_1 étant pris pour coordonnées courantes, une droite (D) dont il est facile de voir qu'elle est parallèle à la force résultante, ses cosinus directeurs étant proportionnels à ΣX, ΣY, ΣZ. Chaque point de cette droite peut être pris pour le point C où la force R doit être appliquée, et toutes les conditions (1) étant alors remplies, il est clair que le système des forces P est remplacé par la force R que nous venons de déterminer.

Les équations (2) donnent encore

$$x_1 \Sigma K_x + y_1 \Sigma K_y + z_1 \Sigma K_z = 0,$$

ce qui prouve que la droite (D) a sa direction comprise dans un plan

mené par l'origine actuelle O, normalement à l'axe du couple résultant G relatif au centre O.

2° Pour que le système des forces P soit réductible à un simple couple G, il faut évidemment que la force résultante R, qui est indépendante du centre de réduction (84), se réduise à zéro, c'est-à-dire que l'on ait

$$\Sigma X = o, \quad \Sigma Y = o, \quad \Sigma Z = o,$$

donc, *que les forces* P, *transportées parallèlement à elles-mêmes en un même point, s'y fassent équilibre.*

Mais il faut de plus que le couple G ne soit pas nul, car alors l'équilibre aurait lieu; donc, les trois quantités

$$\Sigma(yZ - zY), \quad \Sigma(zX - xZ), \quad \Sigma(xY - yX)$$

ne devront pas être nulles simultanément. Si ces conditions sont réunies, le système des forces P est réductible à un couple, que l'on peut d'ailleurs transporter partout où l'on veut d'après les propriétés des couples (81).

Rapprochant ce qui vient d'être dit de la remarque faite à la fin du n° 79, concernant les forces dirigées dans un même plan ou les forces parallèles, on reconnaît que les cas où la résultante de ces forces devient illusoire sont précisément ceux où le système des forces P est réductible à un couple, comme cela devait être.

Exercices.

1. Le système des forces quelconques P appliquées à un solide libre est généralement réductible à deux forces T, S non comprises dans un même plan, et cela d'une infinité de manières.

2. Soit MP la droite qui représente une force P; AB un segment de droite quelconque dans l'espace; le moment de la force P par rapport à AB vaut 6 fois le volume du tétraèdre qui a AB, MP pour arêtes opposées, divisé par le segment AB.

3. Soient MP_1, MP_2,... des droites partant d'un point M; le volume du tétraèdre construit sur un segment AB et sur la résultante de ces droites comme arêtes opposées est égal à la somme des volumes des tétraèdres construits sur l'arête commune AB et sur les droites MP_1, MP_2,... comme arêtes respectivement opposées. (Dans cet énoncé et dans les suivants, les signes des volumes des tétraèdres sont les mêmes que ceux des moments, par rapport à AB, des forces représentées par MP_1, MP_2 ..)

4. La somme algébrique des volumes des tétraèdres construits sur une arête commune AB et sur les droites représentatives d'un système de forces P comme arêtes respectivement opposées, est égale à la somme des volumes des tétraèdres ayant cette même arrête AB, et pour arêtes respectivement opposées les deux forces T, S auxquelles est réductible le système des forces P.

Si cette somme est nulle quelle que soit l'arête AB, le système des forces P est en équilibre.

5. Le tétraèdre construit en prenant pour arêtes opposées les deux forces T, S auxquelles est réductible un système de forces P, a un volume constant, de quelque manière que les forces T, S soient choisies.

6. Si P_1, P_2, .. P_n ; Q_1, Q_2, ... Q_m sont deux systèmes de forces équivalents sur un solide, la somme des volumes des tétraèdres formés en prenant pour arêtes opposées deux forces quelconques du premier système est égale à la somme correspondante pour le second système (Möbius).

7. Si l'on projette sur une direction arbitraire les forces appliquées à un solide, le centre de ces composantes parallèles des forces données sera dans un plan déterminé, quelle que soit cette direction (Darboux, *Mémoire sur l'équilibre astatique*).

8. Des forces appliquées à un solide libre se faisant équilibre, on suppose que leurs intensités, leurs directions et leurs points d'application ne varient pas ; quelles sont les conditions pour que l'équilibre subsiste 1° après une rotation du corps autour de l'axe des z ; 2° après une rotation autour d'un axe quelconque.

R. On trouve, dans le cas général, douze équations : $\Sigma X = o$, $\Sigma Y = o$, $\Sigma Z = o$, $\Sigma xX = o$, $\Sigma yX = o$, $\Sigma zX = o$, $\Sigma xY = o$, etc... (*Ibid.*)

9. Démontrer 1° que tout système de forces agissant sur un solide libre est réductible à une résultante appliquée en un point donné O, et à trois couples appliqués sur des segments égaux à l'unité pris respectivement sur les axes OX, OY, OZ, la force du premier couple ayant pour composantes ΣxX, ΣxY, ΣxZ, etc...; 2° que si l'on fait la même décomposition pour un système d'axes rectangulaires quelconques, la force du couple appliqué sur un axe donné sera l'inverse du rayon de même direction que cet axe dans un certain ellipsoïde ; 3° que l'on peut choisir, en général d'une seule manière, les trois axes de façon que les forces des couples correspondants forment aussi un système rectangulaire. (*Ibid.*)

10. Lorsque la force résultante totale est nulle, il existe en général quatre positions du corps et quatre seulement, pour lesquelles le système des forces données est en équilibre. (*Ibid.*)

§ 3. DE L'ÉQUILIBRE D'UN SOLIDE QUI N'EST PAS ENTIÈREMENT LIBRE.

88. Lorsque des forces P, P',... agissent sur un solide dont les mouvements sont limités par certains obstacles fixes, par certaines conditions, deux méthodes peuvent conduire aux conditions d'équilibre. La première consiste à appliquer directement au solide la méthode des vitesses virtuelles, en ayant égard aux conditions qui limitent les mouvements virtuels du solide. La seconde consiste à joindre aux forces P, P',... qui sollicitent le solide, les réactions que les obstacles fixes exercent sur lui,

réactions généralement inconnues, au moins de grandeur : on peut alors évidemment faire abstraction des conditions imposées aux mouvements du solide, regarder celui-ci comme entièrement libre, et faire usage des équations d'équilibre du n° 71, ainsi que de toutes les transformations et réductions de forces et de couples que nous avons effectuées sur un solide libre.

Si l'on élimine entre les équations d'équilibre obtenues de cette manière les réactions inconnues provenant des obstacles, on obtiendra un certain nombre d'équations ne contenant plus que les données de la question, c'est-à-dire les composantes des forces P, P',... et les coordonnées de leurs points d'application ; ces équations exprimeront proprement les conditions d'équilibre, ou les relations auxquelles les données devront satisfaire pour que l'équilibre ait lieu. Si l'on suppose qu'elles soient vérifiées, les équations primitives qui ont servi à l'élimination fourniront ensuite les valeurs des réactions inconnues, et par suite, les pressions que le solide exerce contre les obstacles fixes, puisque ces pressions sont toujours égales et opposées aux réactions des obstacles.

Cette seconde méthode étant simple et fournissant immédiatement les pressions, nous l'appliquerons de préférence aux exemples suivants.

89. ***Équilibre d'un solide fixé par un point.*** — Prenons ce point fixe O pour origine des axes rectangulaires OX, OY, OZ ; soient X, Y, Z les composantes d'une force quelconque P appliquée au solide ; M(x, y, z) son point d'application ; U, V, W les composantes de la réaction inconnue que l'obstacle fixe, sur lequel le solide s'appuie, exerce au point O. Nous pouvons faire abstraction de l'obstacle fixe à condition de joindre cette réaction aux forces motrices P. Le solide, rendu libre, doit vérifier les six équations d'équilibre du n° 71, d'où

$$(1) \qquad \Sigma X + U = 0, \quad \Sigma Y + V = 0, \quad \Sigma Z + W = 0,$$

$$(2) \qquad \Sigma(yZ - zY) = 0, \quad \Sigma(zX - xZ) = 0, \quad \Sigma(xY - yX) = 0,$$

les moments des forces U, V, W étant nuls puisque les coordonnées du point O sont $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Les équations (2) ne renferment que les forces données ; elles expriment donc la condition nécessaire pour que l'équilibre ait lieu, savoir, *que la somme des moments des forces appliquées au solide, par rapport à trois axes rectangulaires se coupant au point fixe, soit nulle pour chaque axe*. Il est clair qu'alors elle sera nulle pour tout autre axe passant par le point O. On peut dire aussi que

l'axe du couple résultant des forces P, *relatif au point fixe pris pour centre de réduction, doit être nul.*

Les équations (1) font simplement connaître, en grandeur et en direction, la réaction du point fixe; elles donnent en effet

(3) $$U = -\Sigma X, \quad V = -\Sigma Y, \quad W = -\Sigma Z,$$

et comme les composantes de la pression que le solide exerce sur l'appui fixe sont — U, — V, — W, ou ΣX, ΣY, ΣZ, on en conclut que *la charge du point d'appui est égale, dans le cas d'équilibre, à la résultante des forces* P *transportées parallèlement à elles-mêmes en ce point.*

Les conditions d'équilibre exprimées par les équations (2) sont d'ailleurs suffisantes, puisqu'il résulte du système (1) et (2) que l'équilibre aurait lieu, si l'appui exerçait sur le solide une réaction dont les composantes U, V, W auraient les valeurs (3) : or, comme nous admettons que l'appui soit capable d'une résistance indéfini, il développera nécessairement une réaction suffisante pour maintenir le point O en équilibre.

Si l'on ne supposait pas que l'appui puisse résister indéfiniment, il faudrait joindre aux conditions exprimées par les équations (2) celle-ci, que la résultante des forces P transportées au point O ne soit pas supérieure à la pression à laquelle le point d'appui peut résister.

90. Dans le cas où toutes les forces P sont comprises dans un même plan passant par le point O, si l'on choisit ce plan pour plan XY, on a, pour chacune des forces, $z = 0$, $Z = 0$. Les équations d'équilibre se réduisent à celle-ci :

$$\Sigma(xY - yX) = 0,$$

qui exprime, comme nous l'avons vu au n° **77**, que *la somme algébrique des moments des forces motrices* P *par rapport au point fixe est nulle.* On écrit encore cette condition sous la forme

$$\Sigma Pp = 0,$$

p désignant la distance du point O à la direction de la force P, et le moment Pp ayant le signe + ou le signe — suivant le sens de la rotation que la force P tend à imprimer à la perpendiculaire p.

91. *Équilibre d'un solide qui a un axe fixe.* — Quand deux points O, O′ du solide sont fixes, le solide ne peut que tourner autour de la droite OO′, qui est son *axe fixe*. Prenons le point O pour origine, l'axe des z positifs suivant OO′, les axes OX, OY rectangulaires. Introduisons les réactions que les appuis fixes exercent en O et O′ sur le solide; soient U, V, W les

composantes de la réaction agissant en O; U', V', W' celles de la réaction sur O', a la distance OO'. Le solide étant regardé comme libre, nous aurons, pour l'équilibre, les six équations connues

$$(4)\quad \Sigma X + U + U' = 0, \quad \Sigma Y + V + V' = 0, \quad \Sigma Z + W + W' = 0,$$
$$(5)\quad \Sigma(yZ - zY) - aV' = 0, \quad \Sigma(zX - xZ) + aU' = 0, \quad \Sigma(xY - yX) = 0,$$

en observant que, pour le point O, $x = y = z = 0$, et pour O', $x = 0$, $y = 0$, $z = a$.

La troisième des équations (5) est la seule qui soit indépendante des réactions inconnues : elle exprime donc la condition d'équilibre, les autres ne servant qu'à déterminer les réactions U, V, W, U', V', W'. Donc *il faut et il suffit, pour l'équilibre, que la somme algébrique des moments, par rapport à l'axe fixe, des forces appliquées au solide soit égale à zéro.*

Les autres équations (5) donnent

$$U' = -\frac{\Sigma(zX - xZ)}{a}, \quad V' = \frac{\Sigma(yZ - zY)}{a};$$

U' et V' étant connus, les deux premières équations (4) font connaître U et V. Quant aux composantes W, W' des réactions des points d'appui suivant la direction de l'axe OO', leur somme seulement est déterminée par l'équation

$$W + W' = -\Sigma Z,$$

chacune individuellement restant inconnue.

Ceci nous apprend que les conditions d'équilibre du solide ne suffisent pas pour déterminer les pressions qu'il exerce sur ses points d'appui dans le sens de la droite OO' qui passe par ces deux points, résultat facile à prévoir. En effet, nous ne considérons actuellement l'effet des forces sur le solide qu'au point de vue du repos ou du mouvement qu'elles peuvent lui communiquer, et non au point de vue des réactions intérieures qu'elles développent entre les points matériels qui le composent, et nous cherchons quelles sont les forces que l'on doit substituer aux points fixes pour que le solide, rendu libre, reste en équilibre. Or, nous avons prouvé que toute force appliquée à un solide libre peut être transportée en un point quelconque de sa direction sans que cela altère en rien le mouvement ou l'équilibre du solide; donc, les réactions W, W' que le solide éprouve suivant la direction OO', de la part des appuis O et O', peuvent être distribuées comme l'on veut sur chacun de ces deux points, pourvu

que leur somme demeure invariable : cela ne saurait avoir d'influence sur l'équilibre du solide. Conséquemment, il est impossible que les équations d'équilibre fournissent autre chose que la somme $W + W'$.

Dans la réalité, lorsque des forces données se font équilibre sur un solide naturel appuyé sur deux points fixes, chacun des points d'appui supporte une pression bien déterminée, et la composante de cette pression suivant l'axe fixe est également déterminée : W et W' ont donc des valeurs réellement déterminées. Seulement, les équations de l'équilibre du solide sont impuissantes à les faire connaître, et il faut recourir pour les trouver à des considérations tirées de la nature physique du solide et des petits changements de forme qu'il éprouve toujours sous l'influence des efforts qu'il supporte.

92. ***Équilibre d'un solide qui s'appuie contre un plan fixe.*** — Soit S un solide qui s'appuie par un certain nombre de points A, A',... (fig. 55) contre un plan fixe qui ne produit aucun frottement. Prenons ce plan pour plan XY, l'axe des z positifs dirigé du côté où se trouve le solide. Les réactions du plan fixe étant normales à ce plan, sont parallèles entr'elles et appliquées aux points A, A'...; elles donnent une résultante Z_1 parallèle à OZ, et rencontrant le plan XY en un point B, dont les coordonnées sont (x_1, y_1). Nous pouvons donc regarder le solide comme libre en joignant aux forces P qui le sollicitent, les réactions du plan d'appui ou simplement leur résultante Z_1. Nous aurons donc, en appliquant les équations d'équilibre d'un solide libre,



Fig. 55.

$$(6)\left\{\begin{array}{l} \Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z + Z_1 = 0, \quad \Sigma(yZ - zY) + y_1 Z_1 = 0, \\ \qquad \Sigma(zX - xZ) - x_1 Z_1 = 0, \quad \Sigma(xY - yX) = 0. \end{array}\right.$$

le signe Σ s'étendant, comme précédemment, à toutes les forces motrices P.

Les deux premières et la sixième équation sont les seules qui ne renferment que des données ; elles expriment des conditions d'équilibre : il faut que *les sommes des composantes des forces appliquées au solide, parallèlement à deux axes rectangulaires dans le plan fixe, et la somme de leurs moments par rapport à un axe normal à ce plan, soient nulles séparément.*

La troisième équation (6) donne

$$Z_1 = -\Sigma Z,$$

et fait connaître la résultante des réactions du plan contre le solide, donc aussi la pression totale ΣZ que le solide exerce sur le plan : *elle est égale à la somme des composantes des forces* P *normalement au plan d'appui.* Mais comme le plan ne peut réagir que vers *l'extérieur,* puisque nous supposons le solide simplement appuyé contre lui, les réactions appliquées en A, A',... et par suite leur résultante Z_1 sont nécessairement dirigées dans le sens de l'axe des z positifs, donc ΣZ *doit nécessairement être négatif,* ce qui est une nouvelle condition nécessaire pour l'équilibre.

Enfin, la quatrième et la cinquième équation (6) déterminent x_1, y_1, et font connaître le point d'application de la résultante Z_1. On a

$$x_1 = \frac{\Sigma(zX - xZ)}{Z_1}, \quad y_1 = -\frac{\Sigma(yZ - zY)}{Z_1},$$

et il en résulte une nouvelle condition de l'équilibre. Comme le point d'application de la résultante de deux forces parallèles de même sens est compris entre les points d'application de ces forces (**78**), on voit facilement que si l'on compose successivement les réactions appliquées en A, A',..., le point d'application de la résultante Z_1 sera nécessairement compris dans l'intérieur du polygone *convexe* comprenant tous les points A, A',... Il faut donc encore *que les valeurs de* x_1, y_1 *déterminées ci-dessus correspondent à un point compris dans l'intérieur du polygone dont il s'agit,* sinon l'équilibre est impossible.

En joignant cette condition aux précédentes, on aura toutes les conditions nécessaires et suffisantes de l'équilibre du solide appuyé contre un plan résistant.

Les équations ci-dessus ne font connaître que la pression totale $-Z_1$ du solide contre le plan; proposons-nous de déterminer les pressions individuelles qui correspondent respectivement à chacun des points d'appui A, A',... Nommons ϖ la réaction du plan fixe en A, (x, y) les coordonnées de ce point; soient (ϖ', x', y') les mêmes quantités pour le point A', etc. La réaction totale Z_1 étant la résultante des réactions $\varpi, \varpi', \ldots,$ la théorie des forces parallèles fournit les équations suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} \varpi + \varpi' + \varpi'' + \cdots &= Z_1 = -\Sigma Z, \\ \varpi x + \varpi' x' + \varpi'' x'' + \cdots &= Z_1 x_1 = \Sigma(zX - xZ), \\ \varpi y + \varpi' y' + \varpi'' y'' + \cdots &= Z_1 y_1 = -\Sigma(yZ - zY). \end{aligned}\right.$$

Les seules inconnues dans ces équations sont $\varpi, \varpi', \ldots$; on les déterminera donc en résolvant ce système d'équations du premier degré, et

l'on connaîtra ainsi les pressions que le solide produit respectivement en A, en A',..., puisque ces pressions sont égales et opposées aux réactions ϖ, ϖ',... Comme nous n'avons que *trois* équations, si le nombre des points d'appui est plus grand que trois, les pressions ϖ, ϖ',... seront indéterminées. En réalité, dans le cas de solides naturels, toutes ces pressions individuelles seront nécessairement déterminées, mais les conditions de l'équilibre du solide sont insuffisantes pour nous les faire connaître : il faudrait recourir à la considération des petites déformations que le solide éprouve toujours sous l'influence des forces et des réactions du plan. L'indétermination apparente qui se présente ici est tout-à-fait de même nature que celle dont nous avons parlé, à propos d'un solide fixé par deux de ses points.

Exercices.

1. Une sphère pesante dont le centre de gravité coïncide avec le centre de figure, s'appuie sur deux plans inclinés se coupant suivant une horizontale. Déterminer les pressions de la sphère sur ces deux plans.

R. P le poids de la sphère; α, α' les inclinaisons des plans d'appui sur le plan horizontal; ϖ, ϖ' leurs réactions respectives. On a

$$\varpi' = \frac{P \sin \alpha'}{\sin(\alpha + \alpha')}, \quad \varpi' = \frac{P \sin \alpha}{\sin(\alpha + \alpha')}.$$

2. Une barre AB s'appuie sur une horizontale OX et sur une verticale OY, sans frottement; une force P, verticale de haut en bas, agit au milieu C de AB; une force inconnue F, appliquée en un point donné D de AB et dirigée vers l'intersection O des deux lignes d'appui, maintient l'équilibre : quelle est l'intensité de cette force F et quelles sont les réactions ϖ et ϖ' de la verticale et de l'horizontale sur AB.

R. $AB = 2a$, α l'inclinaison de la barre sur l'horizontale OX; ε l'angle DOX; on a

$$F = \frac{P}{2} \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha - \varepsilon)}, \quad \varpi = \frac{P}{2(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \varepsilon)}, \quad \varpi' = P + \frac{P \sin \varepsilon \cos \alpha}{2 \sin(\alpha - \varepsilon)}.$$

L'equilibre n'est possible que si $\alpha > \varepsilon$.

3. Un système formé de deux tiges AB, BC (fig. 56) assemblées sous un angle droit B, est mobile dans le plan vertical autour du sommet B. Des forces verticales P, P' sont appliquées aux milieux de AB, BC, et une force donnée Q agit verticalement à l'extrémité C. Déterminer la position d'équilibre.



Fig. 56.

R. Soient $AB = 2a$, $BC = 2b$; X, Y les réactions horizontale et verticale du point fixe B; θ l'inclinaison du côté BC sur l'horizontale. On trouvera

$$X = 0, \quad Y = P + P' + Q, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{(P' + 2Q)\, b}{Pa}.$$

4. Une barre droite AB s'appuie en A contre une coulisse verticale OZ, en A' sur une cheville horizontale. Une force verticale P agit au milieu de AB. Déterminer la position d'équilibre, les réactions de la coulisse et de la cheville.

R. AB $= 2a$, α l'angle BAZ que fait la barre avec la coulisse, dans le cas d'équilibre; b la distance de la cheville A' à la coulisse; ϖ, ϖ' les réactions, respectivement normales à la coulisse et à la barre, de la coulisse et de la cheville. On a

$$\sin\alpha = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \varpi = \mathrm{P}\cot\alpha, \quad \varpi' = \mathrm{P}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

5. Deux glissières AB, AB' font avec l'horizontale des angles α, α'; une barre MM', dont le milieu est soumis à l'action d'une force P verticale de haut en bas, s'appuie sur ces deux glissières sans frottement. Déterminer la position d'équilibre de cette barre, ainsi que les pressions qu'elle exerce sur les glissières.

R. Les conditions d'équilibre montrent d'abord que les deux glissières et la barre doivent être dans un même plan vertical. Soient MM' $= 2a$, θ l'inclinaison cherchée de MM' sur l'horizontale; ϖ, ϖ' les réactions normales des glissières sur la barre. On a

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{\sin(\alpha'-\alpha)}{2\sin\alpha\sin\alpha'}, \quad \varpi = \frac{\mathrm{P}\sin\alpha'}{\sin(\alpha+\alpha')}, \quad \varpi' = \frac{\mathrm{P}\sin\alpha}{\sin(\alpha+\alpha')}.$$

6. Une demi-sphère homogène et pesante de rayon a est posée sur un plan horizontal sans frottement. Un poids vertical Q est pendu à la circonférence de sa base. Déterminer la position d'équilibre de la demi-sphère.

R. On verra plus loin que le centre de gravité G de la demi-sphère est sur son axe, à une distance du centre O égale à $3a : 8$. Soient P le poids de la demi-sphère, θ l'angle que fait son axe avec la verticale, ϖ la réaction du plan d'appui. On a, dans le cas de l'équilibre,

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{8\mathrm{Q}}{3\mathrm{P}}, \quad \varpi = \mathrm{P} + \mathrm{Q}.$$

CHAPITRE VIII.

DE L'ÉQUILIBRE DES SYSTÈMES DE FIGURE VARIABLE.

92. Lorsque les points d'un système matériel ne sont plus liés invariablement entr'eux, on peut encore déterminer les conditions de son équilibre, sous l'action de forces données P, P'..., soit par l'emploi direct du principe des vitesses virtuelles, soit, plus facilement encore, par la *méthode des réactions* comme il suit :

Le système se composera, en général, d'un certain nombre de systèmes

invariables ou de solides S, S'... reliés entr'eux par des organes de figure variable. On considérera chaque solide S isolément, comme étant en équilibre entre les forces P qui lui sont appliquées, d'une part, et les réactions inconnues ϖ, ϖ',... qu'exercent sur lui ses liaisons avec les autres solides du système, ou les obstacles fixes contre lesquels il est appuyé, d'autre part. On lui appliquera donc les six équations d'équilibre d'un solide entièrement libre, et l'on opérera ainsi pour tous les solides du système. On exprimera ensuite que les liaisons elles-mêmes, chacune suivant sa nature, sont en équilibre. Éliminant entre toutes les équations ainsi obtenues les réactions inconnues des liaisons ou des obstacles fixes, on obtiendra entre les données de la question un certain nombre de relations qui exprimeront les conditions proprement dites de l'équilibre. Si ces conditions sont vérifiées, les équations primitivement posées feront connaître les réactions inconnues.

Pour bien comprendre cette méthode, considérons le problème suivant : Deux sphères solides O et O' (fig. 57) s'appuient l'une contre l'autre et sur deux plans fixes qui se coupent suivant une droite horizontale ; des forces verticales connues P, P' sont appliquées à leurs centres respectifs. Trouver les conditions d'équilibre et les pressions.

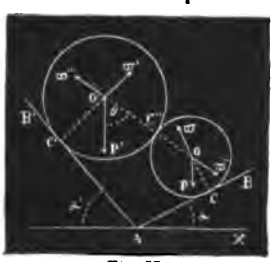


Fig. 57.

Soient α, α' les inclinaisons des deux plans AB, AB' sur le plan horizontal ; ϖ, ϖ' les réactions respectives de ces plans sur les sphères, ϖ'' la réaction mutuelle de celles-ci l'une contre l'autre. Comme on fait abstraction des frottements, ces réactions sont normales aux surfaces en contact. Ainsi, les réactions ϖ, ϖ'' sont normales en C, C'' à la sphère O, et on ne trouble pas l'équilibre en les transportant au centre O. De même, les réactions ϖ', ϖ'' sont normales en C', C'' à la sphère O' et peuvent être supposées agir en O'. Il faut et il suffit donc que les forces P, ϖ, ϖ'' se fassent équilibre autour du point O ; les forces P', ϖ', ϖ'' autour du point O'. Pour cela, les trois premières forces doivent être dans un même plan (**61**), les trois dernières également, et comme P, P' sont parallèles et les réactions ϖ'' qui s'exercent en C'' opposées l'une à l'autre, il est clair que le plan vertical passant par les centres O et O' devra passer par les points C, C', C'' ; il sera normal aux plans d'appui et, par suite, à leur inter-

section. De là cette première condition d'équilibre : *Les centres des deux sphères doivent se trouver dans un plan vertical normal à l'intersection des plans d'appui;* la figure est alors une coupe faite par le plan vertical en question. Soit θ l'angle que fait la ligne OO′ avec la direction des forces P, P′ lorsque l'équilibre a lieu.

L'équilibre des forces P, ϖ, ϖ'' autour du point O donne les équations (**61**)

$$\frac{P}{\sin(\theta-\alpha)}=\frac{\varpi}{\sin\theta}=\frac{\varpi''}{\sin\alpha}.$$

L'équilibre du point O′ donne de même

$$\frac{P'}{\sin(\theta+\alpha')}=\frac{\varpi'}{\sin\theta}=\frac{\varpi''}{\sin\alpha'}.$$

De là

$$\varpi''\sin(\theta-\alpha)=P\sin\alpha,\quad \varpi''\sin(\theta+\alpha')=P'\sin\alpha',$$

et par l'élimination de ϖ'',

$$P\sin\alpha\sin(\theta+\alpha')-P'\sin\alpha'\sin(\theta-\alpha)=0,$$

d'où

$$\operatorname{tg}\theta=-\frac{(P+P')\sin\alpha\sin\alpha'}{P\sin\alpha\cos\alpha'-P'\sin\alpha'\cos\alpha}=\frac{P+P'}{P'\cot\alpha-P\cot\alpha'}.$$

L'angle θ étant connu, on peut construire le polygone ACOO′C′ dont on connaît l'angle en A, les côtés CO, CO′, OO′, et les angles COO′ $=180^\circ+\alpha-\theta$, C′O′O $=\theta+\alpha'$. On a donc la figure d'équilibre du système proposé. Les pressions des sphères sur les plans et l'une contre l'autre sont ensuite données par les équations

$$\varpi=\frac{P\sin\theta}{\sin(\theta-\alpha)},\quad \varpi'=\frac{P'\sin\theta}{\sin(\theta+\alpha')},\quad \varpi''=\frac{P\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)}.$$

94. Dans cet exemple, la liaison entre les deux solides O et O′ étant établie par le contact de deux surfaces rigides dépourvues de frottement; leurs réactions étaient donc normales aux surfaces en contact, et de plus, d'après le troisième principe de la mécanique, égales et directement opposées. C'est par cette considération que les réactions provenant des liaisons se sont réduites à trois forces inconnues ϖ, ϖ', ϖ'', et qu'il a été possible de résoudre le problème par les équations du n° **71**. Outre ce mode de liaisons entre les divers solides d'un système (représenté dans les

applications par les engrenages, les galets, etc.), il en existe beaucoup d'autres, parmi lesquels nous traiterons seulement des *tiges rigides* articulées et des *fils flexibles* et inextensibles. Examinons les conditions d'équilibre de ces sortes de liens.

1° Deux solides S, S′ sont liés entr'eux par une *barre* ou *droite* rigide AA′, fixée par ses extrémités A et A′ à ces deux solides respectivement, et pouvant tourner librement autour de ces points d'attache sans aucun frottement. L'équilibre de la tige AA′ exige, comme condition nécessaire et suffisante (72), que les forces totales qui agissent à ses extrémités A, A′ soient égales, directement opposées, dirigées suivant la droite AA′, si l'on suppose d'ailleurs qu'aucune force n'agisse entre A et A′. Ces forces sont les pressions des solides S, S′ sur la tige, pressions qui sont respectivement égales et contraires aux réactions de la tige contre les deux solides. La tige AA′ produit donc en A et A′ sur les solides S et S′ qu'elle réunit, des réactions ϖ, ϖ' égales, dirigées suivant la droite AA′, et de sens contraire. Ces réactions peuvent être d'ailleurs des forces de *traction*, tendant à rapprocher S et S′ l'un de l'autre, ou de *pression*, tendant à les écarter. On joindra ces réactions inconnues ϖ, ϖ' aux forces motrices P qui sollicitent les solides S, S′, on supposera ceux-ci libres, et l'on écrira les équations de l'équilibre de chacun d'eux.

2° Nous appelons *fil*, *cordon*, un lien dont la section transversale est négligeable, parfaitement flexible et inextensible, de sorte que la longueur de l'arc formé par le fil entre deux de ses points donnés soit invariable. Pour que ce lien soit en équilibre sous l'action de deux forces seulement, P, P′, agissant à ses extrémités A et A′, il faut d'abord, comme pour un lien rigide, que ces forces soient égales et directement opposées. En effet, la condition d'équilibre de deux forces sur un solide libre a été tirée de la considération des mouvements virtuels du solide, et il est clair que les mêmes mouvements virtuels peuvent être attribués à un fil flexible; les mêmes conditions d'équilibre sont donc *nécessaires*. On accordera ensuite facilement que cette condition nécessaire est aussi suffisante, si le fil est tendu en ligne droite et les forces P, P′ dirigées de manière à maintenir le fil tendu. Ce point admis, soit M (fig. 58) un point quelconque du fil AA′ en équilibre; la réaction qu'exerce sur la portion AM du fil, l'autre portion A′M, doit être, d'après la remarque précédente, dirigée dans le sens MA′ et égale à la force P appliquée en A,

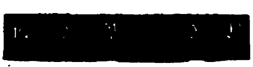


Fig. 58.

puisque le fil AM est en équilibre. La réaction du brin AM sur le brin MA′ est d'ailleurs égale et directement opposée à la précédente, donc dirigée de M vers A et égale à P ou à P′. Ces réactions qui s'exercent en chacun des points du fil en équilibre entre les deux brins du fil qui aboutissent à ce point, constituent ce qu'on nomme la *tension* T du fil. La tension est donc constante dans toute la longueur du fil AA′ et égale à l'une des forces qui se font équilibre à ses extrémités.

Si donc deux solides S, S′ sont reliés par un fil flexible et inextensible AA′, l'équilibre du cordon exigera que les efforts exercés par les solides en A et en A′ soient égaux, dirigés en sens contraire suivant la droite AA′, et de façon à tendre le fil; donc, réciproquement, le fil produira sur les solides S, S′, en A et A′ respectivement, deux forces de *traction* dirigées suivant AA′ en sens contraire l'une de l'autre. Ces réactions seront inconnues en intensité, mais connues en direction et égales entr'elles. En les joignant aux autres forces qui sollicitent les solides S, S′, on regardera ceux-ci comme libres et on leur appliquera la méthode exposée au n° **92**. Les équations qui déterminent les réactions inconnues feront connaître la tension T du fil. Il faudra, en pratique, satisfaire encore à cette condition, que le cordon soit capable de résister à la rupture que la tension tend à produire; dans la mécanique pure, on regarde sa résistance comme indéfinie.

95. *Équilibre du polygone funiculaire.* — Appliquons ces principes à l'équilibre d'un système de figure variable dans lequel les solides S, S′... se réduisent à des points matériels auxquels sont appliquées des forces données, et qui sont réunis deux-à-deux par des fils flexibles et inextensibles. Un tel système s'appelle un *polygone funiculaire :* les points d'application des forces en sont les *sommets*.



Fig. 59.

Désignons par $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (fig. 59) les n sommets du polygone; par $P_1, P_2, \ldots, P_n$ les forces données qui leur sont respectivement appliquées. Les cordons extrêmes A_1T_0, A_nT_n, attachés au premier et au dernier sommet, devront pour l'équilibre être sollicités par des forces déterminées T_0, T_n, égales aux tensions respectives de ces cordons, et que nous regarderons d'abord comme des forces *données*.

Soient A un sommet quelconque; T, T′ les tensions des fils qui y aboutissent; le point A, regardé comme libre, devra être en équilibre entre la force P qui agit en ce point et les réactions T, T′ des fils adjacents. Cet équilibre s'exprimera, comme on sait, par trois équations (61); les n sommets donneront donc $3n$ équations, renfermant les composantes des forces P, T, T′... Mais les $n - 1$ tensions $T_1, T_2, \ldots T_{n-1}$ des $n - 1$ cordons $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ n'étant assujetties *a priori* à aucune condition de grandeur et de direction, leurs $3n - 3$ composantes rectangulaires figureront comme des inconnues dans le système d'équations dont il s'agit. Si on les élimine, on obtient seulement *trois équations* auxquelles devront satisfaire les forces données

$$T_0, P_1, P_2, \ldots, P_n, T_n,$$

pour que l'équilibre soit possible. Les $3n$ équations primitives feront ensuite connaître la direction à donner à chacun des côtés du polygone, et la tension qu'il aura dans l'état d'équilibre. Si l'une des forces ci-dessus, par exemple T_n, n'est pas donnée, on pourra la déterminer de manière à satisfaire aux trois équations de condition, et il existera dans ce cas une figure d'équilibre du polygone.

98. Il est facile de trouver directement ces trois équations auxquelles doivent satisfaire les forces $T_0, P_1, P_2, \ldots P_n, T_n$ pour que l'équilibre soit possible. En effet, le polygone funiculaire tout entier, rendu solide par la pensée, doit vérifier les conditions d'équilibre d'un solide entièrement libre, puisque, comme on l'a déjà vu plus haut, on peut lui attribuer les mêmes déplacements virtuels qu'à un solide. Les relations $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma Z = 0$ du n° 71 doivent être vérifiées, c'est-à-dire que *les forces* $T_0, P_1, P_2, \ldots P_n, T_n$, *transportées parallèlement à elles-mêmes en un même point, doivent s'y faire équilibre.* C'est précisément là ce qu'expriment les équations dont il s'agit.

La même remarque permet de déterminer directement en grandeur et en direction, par une construction très simple, la tension d'un cordon quelconque. Considérons une portion $A_1 A_2 \ldots A_i$ du polygone, et cherchons la tension T_i du cordon suivant. La portion du polygone $A_1 A_2 \ldots A_i$ est en équilibre entre les forces $T_0, P_1, P_2, \ldots, P_i$, qui lui sont appliquées, et la réaction T_i du cordon qui joint le sommet A_i au suivant. Donc, si nous raisonnons comme ci-dessus, nous verrons que les forces $T_0, P_1, P_2, \ldots, P_i, T_i$ transportées en un même point O, s'y font équi-

libre, de sorte que chacune d'elles est égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres. Donc *la tension T_i d'un cordon quelconque est donnée, en grandeur et en direction, par la résultante des forces $T_0, P_1, P_2, \ldots, P_i$* (fig. 60) *appliquées au polygone depuis une de ses extrémités jusqu'au sommet où commence ce cordon.* Cette construction détermine en même temps la direction du cordon auquel se rapporte la tension T_i : il est donc facile d'en déduire la construction de la figure du polygone en équilibre.

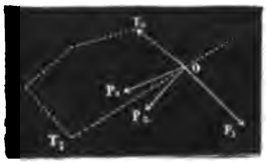


Fig. 60.

Le plus souvent, au lieu d'être sollicités par des forces données T_0 et T_n, les cordons extrêmes du polygone sont attachés à deux points fixes M, N. Les raisonnements précédents subsistent, mais T_0, T_n y désignent alors les réactions des points d'attache M et N sur ces derniers cordons, réactions qui sont toujours égales aux tensions de ceux-ci. Le problème est plus compliqué, à cause de l'ignorance où l'on est des valeurs de T_0, T_n; nous n'en considérerons ici que le cas particulier le plus important.

97. Supposons les points M, N fixes et les forces P, qui agissent aux sommets du polygone, parallèles entr'elles; admettons, pour fixer les idées, qu'elles soient *verticales*. L'équilibre de chaque sommet A exigeant que la force P qui lui est appliquée et les cordons qui y aboutissent soient dans un même plan, ce plan contiendra la force P' parallèle à P et appliquée au sommet suivant; le côté suivant du polygone sera donc encore dans ce même plan, et ainsi de suite. On voit par là que *le polygone funiculaire en équilibre sera tout entier dans le plan vertical passant par les points d'attache* M, N.

Admettons, de plus, qu'un côté soit horizontal et ait son milieu en A_0, sa tension égale à T_0; appliquons les principes exposés plus haut à la portion du polygone située *à droite* du point A_0. Nommons $A_1, A_2, \ldots A_n$ (fig. 61) les n sommets du polygone compris dans cette portion, et $P_1, P_2, \ldots, P_n$ les forces verticales qui y sont appliquées; A_i l'un de ces sommets, T_i la tension du cordon suivant; φ_i son inclinaison sur l'horizontale A_0X. Les forces $T_0, P_1, P_2, \ldots P_i, T_i$ se faisant équilibre sur le polygone $A_0A_1A_2 \ldots A_i$, les sommes de leurs composantes horizontales



Fig. 61.

et de leurs composantes verticales sont nulles; donc

$$-T_0+T_i\cos\varphi_i=0,\quad -(P_1+P_2+\cdots+P_i)+T_i\sin\varphi_i=0,$$

d'où

$$T_i\cos\varphi_i=T_0,\quad T_i\sin\varphi_i=P_1+P_2+\cdots+P_i.$$

La composante horizontale de la tension d'un cordon quelconque est constante et égale à la tension du cordon horizontal. Sa composante verticale est égale à la somme des forces P_1, P_2, .., P_i *appliquées au polygone depuis le milieu du côté horizontal jusqu'au sommet où commence le cordon considéré.*

L'inclinaison du côté du polygone sur l'horizontale A_0X se tire de l'équation

$$\operatorname{tg}\varphi_i=\frac{P_1+P_2+\cdots+P_i}{T_0}.$$

Soient $h_1, h_2,\ldots, h_n$ les projections horizontales des côtés A_1A_2, $A_2A_3,\ldots$, A_nN du polygone; ces projections sont ordinairement données. Soient $k_1, k_2,\ldots k_n$ les projections verticales des mêmes côtés. On aura, en général,

$$\operatorname{tg}\varphi_i=\frac{k_i}{h_i},\quad \text{d'où}\quad k_i=\frac{P_1+P_2+\cdots+P_i}{T_0}h_i$$

Soient encore x_i, y_i les coordonnées du sommet A_i rapporté à l'horizontale A_0X et à la verticale A_0Y; on a donc

$$x_i=A_0A_1+h_1+h_2+\cdots+h_{i-1},\quad y_i=k_1+k_2+\cdots+k_{i-1},$$

ou

$$y_i=\frac{1}{T_0}[P_1h_1+(P_1+P_2)h_2+\cdots+(P_1+P_2+\cdots+P_{i-1})h_{i-1}].$$

La tension T_0 du côté horizontal est encore inconnue, mais l'équation précédente conduit à sa détermination, car si on l'applique au calcul de l'ordonnée f du point N, extrémité du dernier côté du polygone, ce qui suppose que l'on fasse $i=n+1$, il viendra

$$f=\frac{1}{T_0}[P_1h_1+(P_1+P_2)h_2+\cdots+(P_1+P_2+\cdots+P_n)h_n],$$

d'où

$$T_0=\frac{P_1h_1+(P_1+P_2)h_2+\cdots+(P_1+P_2+\cdots+P_n)h_n}{f}.$$

La hauteur f du point d'attache N au-dessus de la droite AX est généralement donnée; c'est ce que l'on nomme la *flèche*. Toutes les quantités qui figurent dans le second membre sont donc connues et T_0 est ainsi connu. Les relations ci-dessus fournissent alors les valeurs de φ_i, T_i, k_i, y_i, et permettent de construire la portion A_0N du polygone en équilibre; la partie A_0M du polygone, à gauche du côté horizontal, se construirait de même. S'il n'y avait pas de côté horizontal, il suffirait de réduire la distance A_0A_1 à zéro et de raisonner de la même manière.

Dans le cas le plus important, celui des *ponts suspendus*, les projections $h_1, h_2, \ldots, h_n$ sont égales à une même longueur h; les forces P_1, $P_2 \ldots$, sont égales à une même force P. On a donc, d'abord, pour la tension du côté horizontal,

$$T_0 = \frac{Ph}{f}(1 + 2 + \cdots + n) = \frac{n(n+1)}{2}\frac{Ph}{f},$$

et par suite

$$y_i = \frac{Ph}{T_0}(1 + 2 + \cdots + i - 1) = \frac{i(i-1)}{2}\frac{Ph}{T_0} = \frac{i(i-1)}{n(n+1)}f,$$

ce qui est l'expression très simple de l'ordonnée du sommet A_i; son abscisse x_i a pour valeur, à cause de $A_0A_1 = \frac{h}{2}$,

$$x_i = \frac{h}{2} + (i-1)h = \left(i - \frac{1}{2}\right)h.$$

Enfin, on obtient facilement l'équation de la courbe qui passe par tous les sommets du polygone, car on tire de la valeur de x_i

$$i = \frac{1}{2} + \frac{x_i}{h},$$

d'où, portant cette valeur de i dans l'expression de y_i,

$$y_i = \frac{f}{n(n+1)}\left(\frac{x_i}{h} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{x_i}{h} - \frac{1}{2}\right) = \frac{f}{n(n+1)}\left(\frac{x_i^2}{h^2} - \frac{1}{4}\right).$$

On voit donc que la courbe qui a pour équation

$$y = \frac{f}{n(n+1)}\left(\frac{x^2}{h^2} - \frac{1}{4}\right)$$

jouit de la propriété énoncée : c'est une parabole à axe vertical. Enfin,

la tension et l'inclinaison d'un côté quelconque $A_i A_{i+1}$ sont données par les formules

$$T_i = P\sqrt{i^2 + \frac{h^2}{4f^2} n^2 (n+1)^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi_i = \frac{2if}{n(n+1)h}.$$

98. Il arrive que les forces P, au lieu d'être appliquées en des points déterminés A_1, A_2,... d'un fil inextensible, agissent sur des points qui peuvent glisser librement le long du fil, comme, par exemple, sur des anneaux mobiles sans frottement. Il est facile de s'assurer que les conditions d'équilibre trouvées pour le polygone funiculaire doivent subsister, mais il y aura, pour chaque force P, une condition de plus, résultant de la mobilité de son point d'application A sur le fil.



Fig. 62.

Donnons un mouvement virtuel au point A (fig. 62), dans lequel les deux points voisins A', A'' du fil restent immobiles; le point A se meut donc, la somme AA' + AA'' restant constante, sur la surface d'un ellipsoïde de révolution dont A', A'' sont les foyers; pour que le travail virtuel de la force P soit nul, il faut que la force soit normale à cette surface, ou que sa direction divise en deux parties égales l'angle A'AA'' compris entre les deux brins de la corde qui aboutissent en A. Les angles PAA', PAA'' étant égaux, les réactions de ces brins sont égales; la tension du fil est donc la même de part et d'autre du point A.

99. Nous prenons maintenant un exemple des systèmes formés de tiges rigides AA', A'A'',..., réunies par leurs extrémités autour desquelles elles peuvent d'ailleurs jouer librement. Soient AA' l'une quelconque de ces barres; P, P',... les forces qui lui sont appliquées; ϖ, ϖ' les réactions des tiges voisines, agissant respectivement en A, A' et d'ailleurs inconnues de grandeur et de direction. L'équilibre de la barre AA' entre les forces P, P',..., ϖ, ϖ' s'exprimera en général par six équations, et chacune des barres donnera lieu à un semblable système, mais on devra observer que les réactions réciproques de deux barres contigues sont toujours égales et opposées.

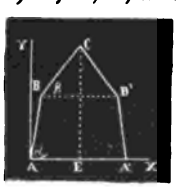


Fig. 63.

Exemple : *Quatre barres rigides d'égale longueur* 2a *forment un polygone articulé plan et vertical* ABCB'A' (fig. 63), *appuyant ses extrémités fixes* A, A' *sur une ligne horizontale* AX; *les milieux des côtés sont sollicités par des forces verticales égales* P; *la verticale du point* C *doit tomber au*

milieu de AA′ = 2b. On demande la figure d'équilibre et les pressions.

Tout étant symétrique de part et d'autre de la verticale CE, soient α, β les inclinaisons de AB, BC sur AX; U, V les composantes horizontale et verticale de la réaction du point fixe A sur la tige AB; X, Y les composantes de la réaction de BC sur AB. Toutes les forces agissant dans un même plan, l'équilibre de la barre AB donne d'abord les équations (74)

$$U + X = 0, \quad V + Y - P = 0,$$

d'où

$$(\alpha) \qquad X = -U, \quad Y = P - V.$$

Puis, le milieu de AB et le point B ayant respectivement pour coordonnées $a \cos\alpha$, $a \sin\alpha$; $2a\cos\alpha$, $2a \sin\alpha$, l'équation des moments (74) par rapport au point A donnera

$$-P \cdot a\cos\alpha + Y \cdot 2a\cos\alpha - X \cdot 2a\sin\alpha = 0,$$

ou, réduisant et remplaçant X, Y par leurs valeurs ci-dessus,

$$(P - 2V)\cos\alpha + 2U\sin\alpha = 0,$$

d'où

$$(\beta) \qquad U \operatorname{tg}\alpha = V - \frac{1}{2}P.$$

Les conditions d'équilibre de la droite BC, si l'on observe que la réaction de CB′, appliquée en C, doit être horizontale à cause de la symétrie et si on la représente par X_1, donneront les équations

$$-X + X_1 = 0, \quad -Y - P = 0, \quad -Pa\cos\beta - 2X_1 a\sin\beta = 0,$$

la dernière étant obtenue en prenant les moments par rapport au point B. De là et des relations (α),

$$X_1 = X = -U, \quad Y = -P = P - V, \quad \text{ou} \quad V = 2P,$$

et enfin

$$P\cos\beta = 2U\sin\beta \quad \text{ou} \quad (\gamma)\; U\operatorname{tg}\beta = \frac{P}{2}.$$

L'équation (β) devient, par la substitution de la valeur de V,

$$U \operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{2}P,$$

et si l'on élimine U entre cette équation et (γ), on obtient

$$\operatorname{tg}\alpha = 3\operatorname{tg}\beta,$$

égalité qui exprime la condition d'équilibre. On a d'ailleurs, entre α et β, la relation

$$2a(\cos\alpha + \cos\beta) = b,$$

qui exprime que la projection horizontale de AB + BC est égale à AE. Cette équation et la précédente déterminent α et β; la pression sur le point A se tire des équations

$$U = \frac{P}{2}\cot\beta, \quad V = 2P,$$

et les pressions X, Y, X_1 sont également données par les relations ci-dessus.

Des questions de ce genre peuvent se rencontrer dans la construction des charpentes, où l'on doit chercher à rendre la stabilité du système indépendante de la résistance des assemblages, en faisant en sorte que le système satisfasse de lui-même aux conditions d'équilibre.

Exercices.

1. Deux barres AC, BC aux milieux desquelles agissent des forces verticales P, P', s'appuient par leurs extrémités inférieures A, B sur un même plan horizontal sans pouvoir glisser. Leurs extrémités supérieures s'appuient l'une contre l'autre, en C, par des facettes verticales. Trouver l'inclinaison des barres dans le cas d'équilibre.

R. Soient α, β les angles BAC, ABC. On doit avoir

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{P}{P'}.$$

2. Deux cylindres circulaires solides sont serrés l'un contre l'autre par un fil inextensible contenu dans un plan normal aux génératrices. Quel est le rapport de la tension T du fil à la réaction réciproque ϖ des cylindres.

R. Soient r, r' les rayons des cylindres;

$$T : \varpi = r + r' : 4\sqrt{rr'}.$$

3. Un système articulé de Hart (fig. 42, p. 65) ABCD est fixé par un point O du côté AB; le côté DC est sollicité par deux forces P, Q, appliquées respectivement en D, C et dirigées vers les points B, A. Déterminer les conditions d'équilibre du système et les réactions mutuelles des tiges.

R. Soient $OA = a$, $OB = b$, $AD = c$; α, β les angles BAC, DAC. Il faut pour que l'équilibre soit possible, que l'on ait $P : Q = a : b$, et la figure d'équilibre est déter-

minée par les équations

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{c}{a+b}, \quad \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}=\frac{a+b}{a-b}.$$

Soient ϖ, ϖ' les réactions des tiges BC, AD sur AB, ϖ'' celles de DC sur ses extrémités; on a

$$\varpi=\varpi'=\frac{P+Q}{2\cos\beta}, \quad \varpi''=\frac{P-Q}{2\cos\alpha}.$$

4. Quatre barres forment un quadrilatère gauche articulé ABCD; aux sommets A, B, C, D agissent respectivement des forces P, Q, R, S. Conditions d'équilibre et réactions des barres.

R. 1° Chaque force doit être dans le plan de l'angle au sommet duquel elle agit. 2° On doit avoir entre les directions des forces la relation

$$\frac{\sin(P, AB)\sin(Q, BC)\sin(R, CD)\sin(S, DA)}{\sin(P, AD)\sin(Q, BA)\sin(R, CB)\sin(S, DC)}=1.$$

Les directions des 4 forces sont 4 génératrices d'un même système d'un hyperboloïde à une nappe, dont les diagonales AC, BD forment deux génératrices de l'autre système. P, Q coupant BD, AC en a, b, on a

$$P : Q = BD \cdot Aa \cdot Cb : AC \cdot Bb \cdot Da.$$

De même pour les autres forces.

5. Des droites rigides réunies par leurs sommets forment un polygone articulé plan et fermé; chaque côté est sollicité par une force normale, appliquée au milieu de sa longueur et proportionnelle à celle-ci. Condition d'équilibre.

R. En appliquant à trois tiges consécutives la méthode des réactions, on trouve que lorsque l'équilibre a lieu 1° tous les sommets sont sur une circonférence C; 2° les réactions réciproques des tiges sont égales; 3° chacune de ces réactions est au rayon de C, comme la force appliquée à une tige est à sa longueur.

CHAPITRE IX.

APPLICATION DES LOIS DE LA STATIQUE A LA PESANTEUR. THÉORIE DES CENTRES DE GRAVITÉ.

100. L'une des forces naturelles les plus importantes à considérer est la *pesanteur* ou *gravité*, qui s'exerce sur tous les corps placés à la surface de la terre d'une manière constante. On appelle ainsi la force qui détermine le mouvement de chûte des corps abandonnés à eux-mêmes, au-dessus de la surface du globe. L'expérience a constaté les lois suivantes :

1° La pesanteur agit sur tous les corps indistinctement, quels que soient leur volume, leur forme, leur nature, et sur chacune des parties dans lesquelles on les divise, si petites qu'elles soient : d'où l'on conclut naturellement que cette force agit sur les derniers éléments, sur tous les points matériels qui composent les corps.

2° Le mouvement que la pesanteur imprime à un corps, à un point matériel, parfaitement dégagé de toute action étrangère, est *rectiligne et uniformément varié*. On en conclut (54) que la pesanteur est une force constante. Sa direction, celle de la droite qu'elle ferait parcourir à un point matériel tombant librement, est normale à la surface des eaux tranquilles : c'est ce que l'on nomme la *verticale*. Le sens de son action est de haut en bas. On vérifie d'ailleurs facilement, en retenant un corps par un fil qui l'empêche de tomber, que l'action de la pesanteur est encore constante en grandeur et en direction pendant le repos comme pendant le mouvement du corps.

3° Si l'on compare les mouvements que prennent les différents corps sous l'influence de la pesanteur, en écartant toujours autant que possible toute action étrangère, on trouve que l'*accélération* du mouvement dû à la pesanteur *a la même valeur pour tous les corps* en un même lieu, et par suite, pour tous les points matériels quels qu'ils soient. Cette valeur, à Paris, a été trouvée égale à 9ᵐ809, c'est-à-dire que ce nombre mesure la vitesse acquise au bout d'une seconde par un corps tombant librement. On désigne habituellement par g cette accélération, en sorte que

$$g = 9{,}809.$$

Il suit de là et de la définition de la masse (55) que, si p désigne l'intensité de l'action de la pesanteur sur un point matériel de masse m, on a

$$p = mg,$$

donc *la force que la pesanteur exerce sur un point matériel est mesurée par le produit de la masse de ce point et du nombre constant g*. Elle est donc proportionnelle à la masse.

4° D'après ce qui précède, les forces qui sollicitent les différents points matériels d'un corps en vertu de la pesanteur peuvent être considérées comme sensiblement parallèles entr'elles. Si le corps est un solide, il résulte de la théorie des forces parallèles que nous avons exposée plus haut (76-77) que ces forces donnent une résultante unique, égale

à leur somme, dirigée comme elles verticalement de haut en bas, et passant toujours par un point déterminé G du corps, quelle que soit la position de celui-ci par rapport à la direction des forces. Cette résultante se nomme le *poids* du corps; ce point G, centre des forces parallèles dues à la pesanteur, est le *centre de gravité* du solide. On le détermine expérimentalement en suspendant successivement le corps dans deux positions différentes par un fil très délié.

5° Les lois qui précèdent ne sont exactes qu'approximativement : si l'on se déplace de quantités considérables, soit sur la direction verticale, soit à la surface de la terre sur un même méridien, on reconnait des variations sensibles dans la *direction* et dans l'*intensité* de la pesanteur. Ces variations, dont la cause et les lois sont bien connues, ne nous occuperont pas ici.

101. La détermination analytique du centre de gravité d'un solide résulte des formules du n° **77**. Soient p l'action de la pesanteur sur un point (x, y, z) du corps, P le poids total du corps; x_1, y_1, z_1, les coordonnées de son centre de gravité. Nous aurons, en vertu de la théorie des forces parallèles,

$$P = \Sigma p, \quad Px_1 = \Sigma px, \quad Py_1 = \Sigma py, \quad Pz_1 = \Sigma pz,$$

le signe Σ indiquant une sommation qui s'étend à tous les points matériels du corps. On peut transformer ces équations en introduisant les masses au lieu des poids. Soient m la masse du point (x, y, z); M la masse du corps ou la somme des masses de ses points; à cause de la relation $p = mg$, on a évidemment

$$P = \Sigma mg = g\Sigma m = Mg,$$

de sorte que *le poids d'un corps quelconque est le produit de sa masse par le nombre constant g*. Les équations qui donnent x_1, y_1, z_1 deviennent, par la suppression du facteur g dans les deux membres,

$$(1) \qquad Mx_1 = \Sigma mx, \quad My_1 = \Sigma my, \quad Mz_1 = \Sigma mz.$$

Les notions de *poids* et de *centre de gravité*, d'après ce qui précède, semblent ne convenir qu'à des corps solides : cependant, on a souvent à déterminer le poids et le centre de gravité d'un système matériel déformable, tel qu'une masse liquide. Il est évident qu'il faut entendre par là une quantité P et un point (x_1, y_1, z_1) déterminés par les formules ci-dessus; ou, en d'autres termes, le poids et le centre de gravité du solide qu'on obtiendrait en supposant tous les points de la masse proposée unis

invariablement, sans que rien soit changé dans les positions qu'ils occupent à l'instant que l'on considère.

102. Les équations (1) sont, théoriquement, les vraies équations qui déterminent le centre de gravité d'un corps et définissent ses propriétés, mais elles ne conviennent pas au calcul effectif de la masse M et de la position du point G, parce que les points matériels échappent à nos mesures directes ainsi que leurs masses, et les *sommations* indiquées ne sont pas réalisables. C'est pourquoi on les remplace par des *intégrations*, à l'aide d'un artifice fort important dont nous verrons de nombreux exemples. Établissons quelques notions nécessaires.

On dit qu'un corps est *homogène* lorsqu'il présente dans tous ses points une constitution physique identique; sa *densité* est alors le rapport constant de la masse qu'il renferme sous un volume quelconque à ce volume. Si donc ρ désigne la densité du corps, V son volume, nous aurons

$$\rho = \frac{M}{V}, \quad \text{ou} \quad M = V\rho.$$

Dans les corps *hétérogènes*, le rapport désigné par le nom de densité varierait d'une portion du corps à une autre; on procède donc comme il suit : si l'on décompose le volume du corps en éléments très petits, le rapport de la masse d'une de ces parties à son volume sera la *densité moyenne* de l'élément, et l'on appelle *densité* du corps *en un point donné* (x, y, z) la densité moyenne d'une portion de volume extrêmement petite et renfermant ce point. On conçoit qu'il est permis de regarder cette densité, avec une très grande approximation, comme une fonction continue ρ des coordonnées (x, y, z) du point auquel elle se rapporte. Nous supposerons cette fonction connue; dans les corps homogènes elle se réduira à une constante.

Cela posé, admettons que l'on veuille appliquer l'équation

$$Mx_1 = \Sigma mx$$

à un corps quelconque. On divisera son volume V en éléments très petits, dont l'un quelconque sera désigné par $\Delta\omega$; la masse de cet élément sera, d'après ce qui précède, $\rho\Delta\omega$, ρ étant la densité moyenne de l'élément, ou, ce qui revient au même, la densité du corps en un point déterminé (x, y, z) de l'élément. D'ailleurs, à cause de la petitesse extrême de $\Delta\omega$, on peut, sans erreur sensible, regarder x comme ayant la même valeur

pour tous les points matériels qui y sont compris. La portion de la somme Σmx qui se rapporte à l'élément $\Delta\omega$ est donc égale, très-sensiblement, à $x \cdot \rho\Delta\omega$, et l'on a par conséquent

$$Mx_1 = \Sigma \rho x \Delta\omega,$$

le signe Σ se rapportant maintenant, non plus à tous les points matériels du corps, mais à tous les éléments de volume $\Delta\omega$ de celui-ci. Or, cette somme ne diffère pas sensiblement de l'intégrale définie (1), s'étendant à tout le volume du corps, qui serait la limite de $\Sigma\rho x\Delta\omega$ si l'on faisait converger tous les éléments $\Delta\omega$ vers zéro. On remplacera donc l'équation précédente par celle-ci :

$$Mx_1 = \int_V \rho x d\omega,$$

$d\omega$ désignant un élément infiniment petit du volume du corps, et le signe $\int_V$ une intégrale triple, qui s'étend à tout ce volume. Un raisonnement semblable est applicable au calcul de M, y_1, z_1, et l'on a ainsi, au lieu des formules (1), les suivantes qui sont immédiatement appropriées au calcul :

$$(2) \quad M = \int_V \rho d\omega, \quad Mx_1 = \int_V \rho x d\omega, \quad My_1 = \int_V \rho y d\omega, \quad Mz_1 = \int_V \rho z d\omega.$$

103. On considère fréquemment le centre de gravité d'une ligne, d'une surface. Pour cela, on conçoit que l'on ait distribué une certaine masse, soit uniformément, soit suivant une loi donnée, sur toute la ligne ou la surface dont il s'agit. La *densité en un point* M de la figure est toujours la densité moyenne (ou le rapport de la masse à l'étendue) d'une portion excessivement petite de la ligne ou de la surface, renfermant le point M; elle est exprimée par une fonction ρ, que l'on suppose connue, des coordonnées de ce point. Les équations (2) s'appliquent d'ailleurs immédiatement à la détermination de la masse et du centre de gravité d'une portion de ligne ou de surface; il suffit d'y considérer $d\omega$ comme représentant, dans le premier cas, un arc infiniment petit ds de la courbe; dans le second, un élément $d\sigma$ de la surface, et les intégrales indiquées comme simples dans le premier cas, doubles dans le second.

Si l'on se borne, comme nous le ferons dans les problèmes suivants, au

(1) Cours d'Analyse, 200.

cas d'une figure homogène, ρ est une constante donnée, et la première des équations (2) devient

$$M = \rho \int d\omega,$$

équation dans laquelle il est visible que $\int d\omega$ représente la longueur totale de l'arc, ou l'aire totale de la surface, ou le volume total du corps. Les trois autres deviennent, par la substitution de la valeur de M et la suppression du facteur ρ,

(3) $$x_1 \int d\omega = \int x d\omega, \quad y_1 \int d\omega = \int y d\omega, \quad z_1 \int d\omega = \int z d\omega.$$

Nous allons appliquer ces formules, successivement, à la détermination des centres de gravité des lignes, des surfaces et des solides homogènes.

104. *Centres de gravité des lignes.* — Soit s la longueur d'un arc de courbe AB; on a ici, d'après la formule qui donne la différentielle d'un arc de courbe, x, y, z étant des fonctions d'une variable t (COURS D'AN., **342**),

$$d\omega = ds = dt\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \quad \int d\omega = s,$$

et x_1, y_1, z_1 sont déterminés par les équations

(4) $$sx_1 = \int x ds, \quad sy_1 = \int y ds, \quad sz_1 = \int z ds.$$

On commence par chercher la valeur de s par la formule donnée dans le calcul intégral; puis on remplace dans les équations (4) ds par sa valeur ci-dessus, x', y' et z' étant fournis par les équations de la courbe proposée. Les limites des intégrales (4) se rapportent aux extrémités de l'arc AB, et sont les mêmes que pour évaluer la longueur de l'arc s.

Si la courbe est plane, il suffit de prendre son plan pour plan XY; z, z_1 sont nuls, $t = x$; on a

(5) $$ds = dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}, \quad sx_1 = \int x ds, \quad sy_1 = \int y ds.$$

105 *Centres de gravité des aires planes.* — Soit S l'aire comprise entre la courbe BM (fig. 64), l'axe des x, et deux ordonnées AB, MP. Décomposons cette aire en éléments infiniment petits par les parallèles à OX et à OY, en sorte que l'élément $d\omega$ soit ici le rectangle dont les côtés ont pour valeurs dx, dy. Nous aurons donc

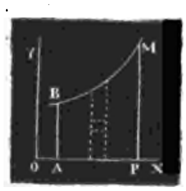


Fig. 64.

$$d\omega = dxdy, \quad \int d\omega = S,$$

et l'aire S se calculera par les méthodes connues (COURS D'AN., ch. XXIII).

Ensuite, appliquant les formules (3) et transformant les intégrales doubles en deux intégrales simples comme on l'a vu dans le COURS D'ANALYSE (362), nous aurons

$$Sx_1 = \int x dx \int dy, \quad Sy_1 = \int dx \int y dy,$$

les limites des intégrations relatives à y et à x étant définies par le contour qui limite l'aire S; ou encore, en effectuant l'intégration relative à y, et désignant actuellement par y l'ordonnée de la courbe BM,



Fig. 65.

$$(6) \qquad Sx_1 = \int_{x_0}^{x} xy\,dx, \quad Sy_1 = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} y^2\,dx,$$

les valeurs x_0, x de l'abscisse se rapportant aux points B, M.

Si l'aire S était comprise entre deux courbes BM, B'M' (fig. 65), et deux ordonnées AB, MP, en désignant par y_0 la fonction de x qui représente l'ordonnée de la courbe B'M', et opérant comme ci-dessus, on aurait y_0 au lieu de o pour limite inférieure de l'intégrale par rapport à y, et l'on trouverait

$$(7) \qquad Sx_1 = \int_{x_0}^{x} (y - y_0)\,x\,dx, \quad Sy_1 = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} (y^2 - y_0^2)\,dx.$$

106. *Centres de gravité des surfaces courbes quelconques.* — Soit S l'aire d'une portion de surface courbe limitée par un contour donné (C') qui se projette sur le plan XY suivant un contour (C). Désignons par T la région plane circonscrite par ce contour (C), par ν l'angle aigu que fait avec l'axe des z la normale à la surface en un point (x, y, z); par p, q les dérivées partielles de z en x et y tirées de l'équation de la surface donnée. D'après ce qu'on a vu (COURS D'AN., 375) sur la quadrature des surfaces courbes, on devra faire dans les formules (3),

$$d\omega = d\sigma = \frac{dT}{\cos\nu}, \quad 1 : \cos\nu = \sqrt{1 + p^2 + q^2}, \quad S = \int_T \frac{dT}{\cos\nu},$$

$$Sx_1 = \int_T \frac{x\,dT}{\cos\nu}, \quad Sy_1 = \int_T \frac{y\,dT}{\cos\nu}, \quad Sz_1 = \int_T \frac{z\,dT}{\cos\nu},$$

ou, en réduisant à deux intégrales simples,

$$(8) \quad S = \int dx \int \frac{dy}{\cos\nu}, \quad Sx_1 = \int x dx \int \frac{dy}{\cos\nu}, \quad Sy_1 = \int dx \int \frac{y\,dy}{\cos\nu}, \ldots$$

Les variables z, p, q sont des fonctions de x, y déduites de l'équation de la surface; les limites des intégrations en y et x se tirent de l'équation du contour (C) comme on l'a vu dans le calcul intégral.

107. Considérons un corps homogène ou hétérogène compris sous une surface fermée ayant pour équation en coordonnées rectangulaires $F(x, y, z) = 0$. Soit V son volume, que l'on décompose en éléments infiniment petits $d\omega$ par trois systèmes de plans parallèles aux plans coordonnés. Les formules (2) deviendront, en réduisant chaque intégrale triple à trois intégrales simples,

$$M = \int dx \int dy \int \rho dz,$$

$$Mx_1 = \int x dx \int dy \int \rho dz, \quad My_1 = \int dx \int y dy \int \rho dz, \quad Mz_1 = \int dx \int dy \int \rho z dz;$$

on substituera à ρ la fonction de x, y, z qui représente la densité du corps, et l'on déterminera les limites d'intégration comme il est indiqué pour les intégrales triples (Cours d'Analyse, **268**).

Si l'on suppose le corps homogène, $M = V\rho$, le facteur ρ disparaît, et en désignant par z_0 et z ($z_0 < z$) les deux valeurs de z qui répondent à (x, y) dans l'équation de la surface, on aura

$$(9) \begin{cases} V = \int dx \int (z - z_0) dy, \quad Vx_1 = \int x dx \int (z - z_0) dy, \quad Vy_1 = \int dx \int (z - z_0) y dy, \\ Vz_1 = \dfrac{1}{2} \int dx \int (z^2 - z_0^2)\, dy. \end{cases}$$

108. *Remarques diverses.* — 1° La décomposition d'un volume ou d'une surface en éléments infiniment petits dans tous les sens peut se faire de bien des manières différentes : celle que nous avons adoptée ci-dessus se présente naturellement lorsque l'on fait usage de coordonnées rectangulaires, mais il est des cas où les intégrations se simplifient beaucoup lorsqu'on adopte d'autres modes de décomposition. Nous en avons donné des exemples dans le calcul intégral (Cours d'An., **274**, **278**), et ce que nous avons dit à ce sujet suffit.

2° La recherche des centres de gravité des espaces homogènes est simplifiée, dans bien des cas, par certaines remarques dont voici les plus essentielles : si cet espace (ligne, surface, volume) admet un centre de figure O, le centre de gravité coïncide avec le point O. En effet, on peut alors décomposer la figure en éléments infinement petits $d\omega$ qui soient deux-à-deux égaux et symétriquement placés par rapport au point O. Les moments $x\, d\omega$ de deux de ces éléments par rapport à un plan YZ passant par le point O seront donc égaux, mais de signes contraires; l'intégrale

$\int x d\omega$ étendue à tout l'espace dont on cherche le centre de gravité sera donc nulle, et, en vertu des équations (3), on aura $x_1 = 0$. On prouverait de même que y_1 et z_1 sont nuls si O est pris pour origine, donc le centre de gravité coïncide avec ce point.


Fig. 66.

3° Si le contour d'une aire plane admet un diamètre AB (fig. 66) qui partage en deux parties égales toutes les cordes parallèles à une certaine direction, le centre de gravité G de l'aire est sur AB. Car on peut, par des parallèles aux cordes et au diamètre, partager cette aire en éléments deux-à-deux égaux, et situés à égale distance de part et d'autre du diamètre AB. Si l'on prend AB pour axe des x, les moments $y d\omega$ de ces deux éléments seront égaux et de signes contraires, l'intégrale $\int y d\omega$ étendue à l'aire entière sera nulle, et en vertu des formules (3), y_1 sera nul, ce qui démontre la proposition.

On verrait de même que si la surface qui termine un solide admet un plan diamétral partageant en deux parties égales toutes les cordes parallèles à une même direction, le centre de gravité du solide est dans ce plan.

4° Enfin, si une ligne homogène possède un axe de symétrie, un raisonnement pareil aux précédents montre que le centre de gravité de la ligne est sur cet axe.

Les exemples suivants sont destinés à éclaircir l'application des formules générales.

109. *Lignes homogènes.* — I. *Arc de cercle.* — Rapportons le cercle à deux diamètres rectangulaires, dont l'un OX (fig. 67) passe par le milieu C de l'arc AB. Cet axe étant un axe de symétrie, le centre de gravité de l'arc AB est sur OX, il suffit de déterminer x_1. Soient a le rayon du cercle, s la longueur de l'arc AB, c sa corde, θ l'angle qui fait avec OX le rayon correspondant à un élément ds, θ_0, θ_1 ses valeurs en A et B. Les formules (4) donnent


Fig. 67.

$$sx_1 = \int x ds,$$

et l'on a

$$x = a\cos\theta, \quad ds = a d\theta,$$

$$\int x\, ds = a^2 \int_{\theta_0}^{\theta_1} \cos\theta\, d\theta = a^2(\sin\theta_1 - \sin\theta_0) = a^2 \cdot \frac{c}{a},$$

$$sx_1 = ac.$$

Le centre de gravité de l'arc de cercle est sur le rayon mené par le milieu de l'arc, à une distance du centre qui est une quatrième proportionnelle à l'arc, au rayon et à la corde.

II. *Arc de cycloïde.* — Les équations de la courbe étant sous la forme ordinaire,

$$x = a(\omega - \sin\omega), \quad y = a(1 - \cos\omega),$$

soient o et ω les valeurs de l'angle ω qui correspondent aux extrémités de l'arc donné. On a, comme on sait,

$$ds = 2a \sin\frac{\omega}{2}\, d\omega, \qquad s = 4a\left(1 - \cos\frac{\omega}{2}\right),$$

$$\int x\,ds = 2a^2 \int (\omega - \sin\omega)\sin\frac{\omega}{2}\, d\omega, \qquad \int y\,ds = 2a^2 \int (1 - \cos\omega)\sin\frac{\omega}{2}\, d\omega.$$

Mais

$$\int (\omega - \sin\omega)\sin\frac{\omega}{2}\, d\omega = -2(\omega - \sin\omega)\cos\frac{\omega}{2} + \int (1 - \cos\omega)\cos\frac{\omega}{2}\, d\omega$$

$$= -2(\omega - \sin\omega)\cos\frac{\omega}{2} + \frac{8}{3}\sin^3\frac{\omega}{2} + C,$$

$$\int (1 - \cos\omega)\sin\frac{\omega}{2}\, d\omega = 2\int \sin^3\frac{\omega}{2}\, d\omega = 4\cos\frac{\omega}{2}\left(-1 + \frac{1}{3}\cos^2\frac{\omega}{2}\right) + C.$$

On a donc

$$sx_1 = -4a^2\left[(\omega - \sin\omega)\cos\frac{\omega}{2} - \frac{4}{3}\sin^3\frac{\omega}{2}\right], \quad sy_1 = 8a^2\left(\frac{2}{3} - \cos\frac{\omega}{2} + \frac{1}{3}\cos^3\frac{\omega}{2}\right).$$

Pour une arcade complète, $\omega = 2\pi$; il vient

$$s = 8a, \quad sx_1 = 8\pi a^2, \quad sy_1 = \frac{32}{3}a^2,$$

d'où, enfin,

$$x_1 = \pi a, \quad y_1 = \frac{4}{3}a.$$

Le centre de gravité est donc sur l'ordonnée maximum, à une distance de la base égale aux deux tiers de cette ordonnée.

III. *Arc d'hélice.* — Les équations de l'hélice étant (Cours d'An., Ch. XXI, Ex. 1)

$$x = a\sin t, \quad y = a\cos t, \quad z = bt,$$

et les extrémités de l'arc répondant à $t = 0$, $t = t$, on trouve facilement

$$ds = dt\sqrt{a^2+b^2}, \quad s = \frac{z}{b}\sqrt{a^2+b^2},$$

$$\int x ds = a\sqrt{a^2+b^2}\int_0^t \sin t dt = \sqrt{a^2+b^2}\,(a-y),$$

$$\int y ds = x\sqrt{a^2+b^2}, \quad \int z ds = \frac{z^2}{2b}\sqrt{a^2+b^2},$$

d'où, par les équations (4),

$$x_1 = \frac{b(a-y)}{z}, \quad y_1 = \frac{bx}{z}, \quad z_1 = \frac{z}{2},$$

ce qui fournit une construction facile du centre de gravité de l'arc d'hélice.

110. *Aires planes.* — I. *Triangle.* — La droite AD (fig. 68) qui joint un sommet A au milieu D du côté opposé est un diamètre dont les cordes conjuguées sont parallèles à ce côté; le centre de gravité de l'aire du triangle est donc sur cette droite. Le même raisonnement s'appliquant aux deux autres médianes BL, CF, *les trois médianes d'un triangle* ABC *se coupent en un même point* G, *centre de gravité de l'aire du triangle.*

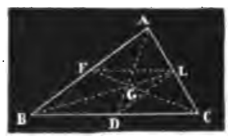


Fig. 68.

La droite DL est parallèle au côté AB et en vaut la moitié ; les triangles semblables AGB, DGL donnent donc l'égalité

$$DG = \frac{1}{2}AG = \frac{1}{3}AD.$$

Le centre de gravité de l'aire du triangle est donc sur la droite qui joint un sommet au milieu du côté opposé, aux deux tiers de cette droite à partir du sommet.

On détermine le centre de gravité de l'aire d'un polygone quelconque en le décomposant en triangles par des diagonales, et appliquant au centre de gravité de chacun de ces triangles, construit par la règle ci-dessus, un poids proportionnel à l'aire du triangle.

II. *Segment circulaire.* — L'équation du cercle étant

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad \text{ou} \quad y = \sqrt{a^2 - x^2},$$

l'aire S du segment OBMP compris entre la courbe, l'axe des x, et deux ordonnées correspondant aux abscisses o et x, a pour expression

$$S = \int_0^x dx \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \text{arc sin} \frac{x}{a}.$$

On a ensuite par les formules (6),

$$Sx_1 = \int_0^x xydx = \int_0^x xdx \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{a^3 - (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{3},$$

$$Sy_1 = \frac{1}{2}\int_0^x y^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^x (a^2 - x^2)\, dx = \frac{a^2 x}{2} - \frac{x^3}{6}.$$

Si l'on fait $x = a$, le segment devient égal au quart du cercle, et l'on a

$$S = \frac{\pi a^2}{4}, \quad x_1 = \frac{4}{3}\frac{a}{\pi}, \quad y_1 = \frac{4}{3}\frac{a}{\pi} = x_1,$$

ce qui montre, chose d'ailleurs évidente, que le centre de gravité est sur la bissectrice de l'angle XOY.

III. *Secteur circulaire.* — Le secteur compris entre la circonférence et deux rayons donnés se décompose en secteurs infiniment petits égaux par des rayons équidistants. Chacun de ces éléments étant considéré comme un triangle, son centre de gravité se trouve sur le rayon bissecteur, aux deux tiers de sa longueur à partir du centre. Considérant le poids de chaque élément comme appliqué à son centre de gravité, on est ramené à chercher le centre de gravité d'un arc de cercle homogène, dont le rayon égale les deux tiers du rayon donné, c'est-à-dire à un problème résolu (**109**).

IV. *Segment de cycloïde.* — Les équations de la courbe sont celles du n° **109**, ex. II. L'aire S du segment compris entre la courbe, sa base et l'ordonnée qui répond à l'angle donné ω, a pour valeur

$$S = a^2 \int_0^\omega (1 - \cos\omega)^2 d\omega = a^2 \left(\frac{3}{2}\omega - 2\sin\omega + \frac{1}{2}\sin\omega\cos\omega\right) (1).$$

On a ensuite

$$\int xydx = a^3 \int (\omega - \sin\omega)(1 - \cos\omega)^2 d\omega = a^3 \left[\frac{3}{4}\omega^2 - 2\cos\omega - 2\omega\sin\omega \right.$$
$$\left. - \frac{1}{4}\sin^2\omega + \frac{1}{2}\omega\sin\omega\cos\omega - \frac{1}{3}(1 - \cos\omega)^3\right] + C,$$

(1) Cours d'Analyse, 334

ou, en prenant l'intégrale entre les limites o et ω,

$$Sx_1 = a^3\left[2+\frac{3}{4}\omega^2 - 2\cos\omega - 2\omega\sin\omega - \frac{1}{4}\sin^2\omega + \frac{1}{2}\omega\sin\omega\cos\omega - \frac{1}{3}(1-\cos\omega)^3\right].$$

De même, on aura

$$Sy_1 = \frac{1}{2}\int y^2 dx = \frac{a^3}{2}\int_0^\omega (1-\cos\omega)^3 d\omega = \frac{a^3}{2}\left(\frac{5}{2}\omega - 4\sin\omega + \frac{3}{4}\sin 2\omega + \frac{1}{3}\sin^3\omega\right).$$

Pour appliquer ces formules à une arcade entière de la cycloïde, on fera $\omega = 2\pi$, ce qui donnera

$$S = 3\pi a^2,\quad Sx_1 = 3\pi^2 a^3,\quad Sy_1 = \frac{5\pi a^3}{2},$$

$$x_1 = \pi a,\quad y_1 = \frac{5}{6}a.$$

111. *Aires courbes.* — Considérons la surface engendrée par la révolution, autour d'une droite OX, d'une courbe plane donnée par son équation

$$y = f(x),$$

et cherchons le centre de gravité de l'aire S comprise sur cette sufacc entre deux plans, x_0 et x, perpendiculaires à l'axe. Comme le centre de gravité cherché est sur l'axe OX, puisque tout plan passant par cet axe est un plan de symétrie, il suffit de trouver S et x_1. On a, comme on sait (Cours d'An., **249**),

$$S = 2\pi\int_{x_0}^{x} y\,ds.$$

Coupons la surface par des plans infiniment voisins perpendiculaires à OX; dans l'équation

$$Sx_1 = \int x\,d\sigma,$$

comme x est constant pour tous les éléments $d\sigma$ de la surface compris entre deux plans sécants x et $x + dx$, on peut faire d'abord la somme de tous ces éléments, ce qui donne, comme nous l'avons vu dans le *Cours d'Analyse*, en négligeant un infiniment petit d'ordre supérieur,

$$2\pi y\,ds.$$

L'équation ci-dessus devient donc

$$Sx_1 = 2\pi\int_{x_0}^{x} xy\,ds.$$

C'est la formule d'où l'on déduit le centre de gravité d'une surface de révolution. En voici quelques exemples :

I. *Zône sphérique.* — La zône comprise entre deux petits cercles parallèles sur la sphère est engendrée par un arc de cercle BM, tournant autour de l'axe commun des deux cercles. Cet axe étant pris pour axe des x, l'équation de la courbe génératrice est

$$y = \sqrt{a^2 - x^2},$$

et l'on a

$$ds = dx\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} = \frac{adx}{y}, \quad yds = ads;$$

donc, en désignant par x_0, x les valeurs de x correspondant aux extrémités B, M de l'arc générateur,

$$S = 2\pi a \int_{x_0}^{x} dx = 2\pi a (x - x_0), \quad Sx_1 = 2\pi a \int_{x_0}^{x} xdx = \pi a (x^2 - x_0^2),$$

d'où

$$x_1 = \frac{x_0 + x}{2}.$$

Ainsi *le centre de gravité d'une zône sphérique se trouve au milieu de la droite qui joint les centres de ses bases.*

II. *Tronc de cône à bases parallèles.* — Plaçant l'origine au sommet du cône, on a ici

$$y = ax, \quad ds = dx\sqrt{1 + a^2}, \quad S = \pi a\sqrt{1 + a^2}(x^2 - x_0^2),$$

x_0, x se rapportant aux deux bases. Ensuite

$$Sx_1 = 2\pi a\sqrt{1 + a^2}\int_{x_0}^{x} x^2 dx = \frac{2}{3}\pi a\sqrt{1 + a^2}(x^3 - x_0^3),$$

d'où enfin

$$x_1 = \frac{2}{3}\frac{x^3 - x_0^3}{x^2 - x_0^2}.$$

III. *Surface engendrée par la révolution de la lemniscate autour de son axe focal.* — On a, en coordonnées polaires, pour l'équation de la courbe génératrice,

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta, \quad \text{d'où} \quad ds = \frac{ad\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} = \frac{a^2 d\theta}{r},$$

l'arc s étant compté dans le même sens que l'angle θ. Soient θ_0, θ les

valeurs de cet angle aux extrémités de l'arc générateur. On aura

$$S = 2\pi \int_{\theta_0}^{\theta} r \sin\theta \cdot \frac{a^2 d\theta}{r} = 2\pi a^2 (\cos\theta_0 - \cos\theta),$$

$$Sx_1 = 2\pi \int_{\theta_0}^{\theta} r^2 \sin\theta \cos\theta \cdot \frac{a^2 d\theta}{r} = \pi a^3 \int_{\theta_0}^{\theta} (\cos 2\theta)^{\frac{1}{2}} \sin 2\theta d\theta$$

$$= \frac{\pi a^3}{3}\left(\cos^{\frac{3}{2}} 2\theta_0 - \cos^{\frac{3}{2}} 2\theta\right) = \frac{\pi}{3}(r_0^3 - r^3).$$

L'abscisse du centre de gravité de l'aire proposée est donc

$$x_1 = \frac{1}{6a^2}\,\frac{r_0^3 - r^3}{\cos\theta_0 - \cos\theta}.$$

Pour $\theta_0 = 0$, $\theta = \frac{\pi}{4}$, l'arc générateur devient le quart de la lemniscate, et l'on a

$$S = \sqrt{2}\cdot\pi a^2(\sqrt{2} - 1), \quad x_1 = \frac{a}{3\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)}.$$

112. ***Surfaces courbes quelconques.*** — I. Centre de gravité de l'aire du *cône* $z^2 = 2xy$ comprise entre les plans $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$.

On trouve facilement (COURS D'AN., **376**)

$$\frac{1}{\cos\nu} = \sqrt{1 + p^2 + q^2} = \frac{x + y}{\sqrt{2xy}}, \quad S = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{3}\sqrt{ab(a + b)}.$$

Appliquant ensuite les formules (8), on trouve

$$Sx_1 = \int_0^a x dx \int_0^b \frac{(x + y)}{\sqrt{2xy}} dy = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^a x^{\frac{3}{2}} dx \int_0^b \frac{dy}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^a x^{\frac{1}{2}} dx \int_0^b y^{\frac{1}{2}} dy$$

$$= 2^{\frac{3}{2}} a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{5} + \frac{b}{9}\right).$$

$$Sy_1 = \int_0^a dx \int_0^b \frac{(x + y)y}{\sqrt{2xy}} dy = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^a x^{\frac{1}{2}} dx \int_0^b y^{\frac{1}{2}} dy + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x}} \int_0^b y^{\frac{3}{2}} dy$$

$$= 2^{\frac{3}{2}} a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{2}}\left(\frac{a}{9} + \frac{b}{5}\right).$$

$$Sz_1 = \int_0^a dx \int_0^b z dy \cdot \frac{x + y}{z} = \frac{ab}{2}(a + b).$$

Substituant à S sa valeur, on aura donc

$$x_1 = \frac{3a}{a+b}\left(\frac{a}{5}+\frac{b}{9}\right), \quad y_1 = \frac{3b}{a+b}\left(\frac{a}{9}+\frac{b}{5}\right), \quad z_1 = \frac{3\sqrt{ab}}{2^{\frac{5}{2}}}.$$

II. ***Centres de gravité des figures sphériques.*** — Soient a le rayon de la sphère; YZ, XZ, XY trois plans diamétraux rectangulaires; S l'aire d'une figure quelconque tracée sur la surface; S_x, S_y, S_z ses projections sur les plans YZ, XZ, XY. Soient enfin $d\sigma$, $d\sigma'$ un élément de la surface et sa projection sur le plan XY, en sorte que

$$d\sigma' = d\sigma \cos \nu.$$

Les formules (3) donnent ici directement

$$Sz_1 = \int z d\sigma = \int a \cos \nu d\sigma = a\int d\sigma' = aS_z.$$

On trouve de même, en projetant sur YZ et XZ,

$$Sx_1 = aS_x, \quad Sy_1 = aS_y,$$

d'où les équations

$$\frac{x_1}{S_x} = \frac{y_1}{S_y} = \frac{z_1}{S_z} = \frac{a}{S},$$

qui déterminent x_1, y_1, z_1. Ce théorème remarquable facilite dans beaucoup de cas la recherche des centres de gravité des aires sphériques, car la propriété exprimée par l'équation $Sz_1 = aS_z$ s'applique évidemment à la projection sur un plan diamétral quelconque.

112. *Volumes homogènes.* — I. *Tétraèdre.* — Soit ABCD (fig. 69) le tétraèdre donné; le plan AED mené par l'arête AD et le milieu E de l'arête opposée est évidemment un plan diamétral pour les cordes parallèles à BC : il renferme donc (**108**, 3°) le centre de gravité du volume du tétraèdre. Cette propriété étant vraie pour chacun des plans médians AFB, etc., on voit que, ***dans le tétraèdre, les six plans menés chacun par une des arêtes et par le milieu de l'arête opposée se coupent en un même point, centre de gravité du tétraèdre.***



Fig. 69.

L'intersection AH des plans AED, AFB renferme donc le centre de gravité cherché. Mais H, rencontre des médianes DE, BF du triangle BCD, est le centre de gravité de l'aire de ce triangle; donc, ***dans le tétraèdre les quatre droites qui joignent chacune un sommet du tétraèdre***

au centre de gravité de la face opposée se coupent en un même point, centre de gravité du tétraèdre.

Soit donc K le centre de gravité de la face ABC; le centre de gravité du tétraèdre est à l'intersection G des droites AH, DK, d'après ce qui précède. Mais on sait que

$$EH = \frac{1}{3} ED, \qquad EK = \frac{1}{3} EA,$$

donc KH est parallèle à AD et en vaut le tiers. D'où il suit, par les triangles semblables KGH, AGD, que

$$GH : GA = KH : AD = 1 : 3, \quad \text{d'où} \quad GH = \frac{1}{4} AH.$$

Le centre de gravité du volume du tétraèdre est sur la droite qui joint un sommet au centre de gravité de la face opposée, aux trois quarts de cette droite à partir du sommet.

Enfin, la droite IF, intersection de deux plans médians AFB, CID, renferme nécessairement le centre de gravité G, et comme I, F sont respectivement les milieux des arêtes AB, CD; comme la même chose a lieu pour les autres couples d'arêtes opposées, *les trois droites qui joignent deux-à-deux les milieux des arêtes opposées du tétraèdre se coupent en un même point, centre de gravité du tétraèdre.* — On vérifie sans peine que le point G est le milieu de chacune de ces droites.

II. *Pyramide à base polygonale.* — On la décompose en tétraèdres par des plans menés par le sommet S et par les diagonales AC, AD, AE,... du polygone base ABCDE... Menant un plan *abcde*... parallèle à la base, qui partage la hauteur SP de la pyramide dans le rapport de 3 à 1, ce plan, d'après ce qui précède, contiendra les centres de gravité G, G′, G″,... des tétraèdres, et par suite celui de la pyramide. Les poids des tétraèdres, appliqués en G, G′, G″,... sont proportionnels à leurs volumes, ou à leurs bases ABC, ACD, ADE,... puisque la hauteur SH est commune; ou encore, aux aires *abc, acd, ade*... des triangles suivant lesquels le plan *abcde*... coupe les tétraèdres. Donc le centre de gravité cherché coïncide avec celui de l'aire du polygone *abcde*...; donc *le centre de gravité* G_1 *de la pyramide est sur la droite qui joint le sommet au centre de gravité de la base, aux trois quarts de cette droite à partir du sommet.*

On conclut de là, par la méthode des limites, que le centre de gravité du volume d'un cône à base quelconque se détermine par la même règle.

III. ***Centre de gravité du volume compris entre les plans coordonnés et la surface qui a pour équation.***

$$z = \frac{c}{ab}(a - x)(b - y).$$

D'après ce que nous avons établi (Cours d'An., 370), on a

$$V = \frac{c}{ab}\int_0^a dx \int_0^b (a - x)(b - y)\, dy = \frac{abc}{4}.$$

Appliquant ensuite les formules (9), nous aurons

$$Vx_1 = \frac{c}{ab}\int_0^a (a - x)\, x dx \int_0^b (b - y)\, dy = \frac{a^2bc}{12};$$

$$Vy_1 = \frac{c}{ab}\int_0^a (a - x)\, dx \int_0^b (b - y)\, y dy = \frac{ab^2c}{12};$$

$$Vz_1 = \frac{c^2}{2a^2b^2}\int_0^a (a - x)^2\, dx \int_0^b (b - y)^2\, dy = \frac{abc^2}{18}.$$

De là on tire

$$x_1 = \frac{a}{3}, \quad y_1 = \frac{b}{3}, \quad z_1 = \frac{2c}{9}.$$

IV. *Ellipsoïde.* — Cherchons le centre de gravité du volume compris entre l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

les plans coordonnés, et un plan x quelconque.

Nous avons ici

$$z = c\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

et en posant

$$y' = b\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{d'où} \quad z = \frac{c}{b}\left(y'^2 - y^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$V = \frac{c}{b}\int_0^x dx \int_0^{y'} (y'^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}\, dy.$$

Posons $y = y' \sin\varphi$, d'où $dy = y' \cos\varphi d\varphi$; il viendra

$$V = \frac{c}{b}\int_0^x y'^2 dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi d\varphi = \frac{\pi c}{4b}\int_0^x y'^2 dx,$$

ou, en mettant pour y' sa valeur et effectuant le calcul,

$$V = \frac{\pi bc}{4}\left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right).$$

Calculons de la même manière Vx_1, par les formules (9):

$$Vx_1 = \frac{c}{b}\int_0^x xdx\int_0^{y'}(y'^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}dy = \frac{c}{b}\int_0^x y'^2xdx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi d\varphi = \frac{\pi c}{4b}\int_0^x y'^2xdx$$

$$= \frac{\pi bcx^2}{8}\left(1 - \frac{x^2}{2a^2}\right).$$

Pour Vy_1, nous aurons de même

$$Vy_1 = \frac{c}{b}\int_0^x dx\int_0^{y'}(y'^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}ydy = \frac{c}{b}\int_0^x y'^3dx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\sin\varphi d\varphi = \frac{c}{3b}\int_0^x y'^3dx.$$

Si l'on fait encore $x = a\sin\psi$, d'où $dx = a\cos\psi d\psi$, on aura

$$\int_0^x y'^3dx = ab^3\int_0^\psi \cos^4\psi d\psi = ab^3\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\psi + \frac{3}{2\cdot 4}\sin\psi\cos\psi + \frac{1}{4}\sin\psi\cos^3\psi\right);$$

donc

$$Vy_1 = \frac{ab^2c}{8}\left(\psi + \sin\psi\cos\psi + \frac{2}{3}\sin\psi\cos^3\psi\right),\quad \psi = \arcsin\frac{x}{a}.$$

Enfin l'on trouve

$$Vz_1 = \frac{c^2}{2}\int_0^x dx\int_0^{y'}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)dy = \frac{c^2}{2b^2}\int_0^x y'^3dx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi d\varphi$$

$$= \frac{c^2}{3b^2}\int_0^x y'^3dx = \frac{abc^2}{3}\int_0^\psi \cos^4\psi d\psi,$$

la valeur de cette intégrale étant donnée ci-dessus.

Si, dans ces diverses équations, on fait $x = a$, d'où $\psi = \frac{\pi}{2}$, on obtient pour le volume et le centre de gravité de la huitième partie de l'ellipsoïde:

$$V = \frac{\pi abc}{6},\quad x_1 = \frac{3a}{8},\quad y_1 = \frac{3b}{8},\quad z_1 = \frac{3c}{8}.$$

114. *Théorèmes de Guldin.* — Comme dernière application des formules relatives aux centres de gravité, démontrons les deux théorèmes remarquables qui portent le nom de Guldin.

1° Soient $y = f(x)$ l'équation d'une courbe plane ; x_0, x les abscisses correspondant à deux points B, M de cette courbe ; s l'arc BM. L'ordonnée y_1 du centre de gravité de l'arc BM est donnée par la formule (4) :

$$sy_1 = \int_{x_0}^{x} y ds ;$$

d'autre part, l'aire S de la surface de révolution engendrée par l'arc BM tournant autour de l'axe des x a pour expression

$$S = 2\pi \int_{x_0}^{x} y ds \quad \text{(Cours d'An., 349).}$$

Eliminant l'intégrale entre ces deux équations, on a

$$S = s \cdot 2\pi y_1.$$

L'aire engendrée par un arc de courbe plane tournant autour d'un axe situé dans son plan a pour mesure le produit de l'arc générateur par la circonférence que décrit son centre de gravité. C'est le premier théorème de Guldin.

2° Soit S l'aire comprise entre les deux courbes planes BM, B'M', et deux ordonnées correspondant aux abscisses x_0 et x. D'après les formules (7), l'ordonnée du centre de gravité de cette aire est donnée par l'équation

$$Sy_1 = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x} (y^2 - y_0^2)\, dx,$$

y_0 et y se rapportant aux courbes B'M', BM. Mais le volume V engendré par l'aire S tournant autour de l'axe des x est donné (Cours d'An., 348) par l'équation

$$V = \pi \int_{x_0}^{x} (y^2 - y_0^2)\, dx ;$$

donc

$$V = S \cdot 2\pi y_1,$$

c'est-à-dire que *le volume engendré par une aire plane tournant autour d'un axe situé dans son plan a pour mesure le produit de l'aire génératrice par la circonférence qui décrit son centre de gravité.*

Ces deux théorèmes s'emploient utilement pour évaluer les surfaces et les volumes de révolution.

Exercices.

1. Soient M la masse, G le centre de gravité d'un système de points matériels P ; R sa distance à un point quelconque O ; m la masse d'un des points, r et ρ ses distances respectives aux points O et G. Démontrer 1° que l'on a

$$\Sigma mr^2 = \mathrm{MR}^2 + \Sigma m\rho^2 ;$$

2° Que si l'on applique en O des forces dirigées vers les points P, proportionnelles à leurs masses et à leurs distances au point O, leur résultante passera par le centre de gravité G et aura pour valeur MR. Les masses peuvent être positives et négatives, ce qui donne des forces attractives ou répulsives. Si M = 0, la résultante est constante en grandeur et en direction.

3° Soient u la distance de deux points m et m', S une somme s'étendant à tous les couples de points deux à deux. On a

$$\mathrm{S}mm'u^2 = \mathrm{M}\,(\Sigma mr^2 - \mathrm{MR}^2) = \mathrm{M}\Sigma m\rho^2.$$

2. Soient n points de masses égales. La somme des carrés des volumes des tétraèdres qui ont pour sommets les n points pris 4 à 4 de toutes les manières possibles, égale n fois la somme des volumes des tétraèdres ayant pour sommets le centre de gravité du système et trois points quelconques de celui-ci.

3. Centre de gravité de l'arc de chaînette entre le sommet A et un point quelconque M (x, y).

R. Soient a le paramètre de la courbe, φ l'inclinaison de la tangente en M, on a

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{a}{\cos\varphi}, \quad s = a\,\mathrm{tg}\varphi, \quad x_1 = x + (a - y)\cot\varphi, \quad 2y_1 = y + s\cot\varphi$$

Le c. de gr. est le point où se coupent 1° une parallèle à l'axe de la courbe menée par le point d'intersection des tangentes en A et en M ; 2° une perpendiculaire à cet axe menée à égale distance de l'origine O et du point où l'axe est coupé par la normale en M.

4. C. de gr. d'une demi-boucle de la lemniscate $r^2 = a^2\cos 2\theta$.

R. $$x_1 = \frac{a^2}{s\sqrt{2}}, \quad y_1 = \frac{a^2(\sqrt{2} - 1)}{s\sqrt{2}}.$$

5. Trouver les coordonnées du c. de gr. d'un arc plan homogène, par rapport à la tangente et à la normale à l'origine de l'arc, l'équation de la courbe étant donnée entre l'arc et l'inclinaison de la tangente, $s = f(\varphi)$ (Cours d'An., 455). Appliquer à l'épicycloïde (Haton de la Goupillière, *Rech. sur les c. de gr.*).

R. Soient x', y' les coordonnées de l'extrémité de l'arc ; x_1, y_1 celles de son centre de gr. On trouve

$$x' = \int_0^\varphi f'(\varphi)\cos\varphi\, d\varphi, \quad y' = \int_0^\varphi f'(\varphi)\sin\varphi\, d\varphi,$$

$$x_1 = x' - \frac{1}{f(\varphi)}\int_0^\varphi f(\varphi) f'(\varphi)\cos\varphi\, d\varphi, \quad y_1 = y' - \frac{1}{f(\varphi)}\int_0^\varphi f(\varphi) f'(\varphi)\sin\varphi\, d\varphi.$$

Dans l'épicycloïde, r étant le rapport du rayon du cercle roulant à celui du cercle fixe et l'origine des arcs au sommet, on a

$$s = 4r(r+1)\sin\frac{\varphi}{2r+1}.$$

Pour une arcade entière, le c. de gr. est sur le rayon mené du centre du cercle fixe au sommet, à une distance de ce centre égale à

$$\frac{3\cos r\pi}{(2r+3)(1-2r)}.$$

Si $2r = 2n+1$, (n entier > 0), le c. de gr. est au centre du cercle fixe.

6. C. de gr. de l'arc compris entre l'origine et le point (x, y, z) sur la courbe

$$y = \frac{x^2}{2a}, \quad z = \frac{x^3}{6a^2}.$$

R. $$s = x + z, \quad x_1 = \frac{(2a+y)\,y}{2(x+z)}, \quad y_1 = \frac{(5a+3y)\,z}{5(x+z)}, \quad z_1 = \frac{(2a+z)\,z}{2(x+z)}.$$

7. C. de gr. de l'aire du trapèze ABCD (fig. 70). — *R.* Prolongeons la base supérieure AB de $BK = CD$; la base inférieure CD, en sens contraire, de $CH = AB$. La droite HK coupe la droite FE qui joint les milieux des bases au c. de gr. du trapèze.



Fig. 70.

8. C. de gr. de l'aire du quadrilatère ABCD. — *R.* Soit L le point d'intersection des diagonales AC, BD (fig. 71). Prenons sur une diagonale AC un point F tel que $AF = CL$. La droite FE qui joint ce point F au milieu E de l'autre diagonale passe par le c. de gr. G, et l'on a


Fig. 71.

$$GE = \frac{1}{3} EF.$$

9. C. de gr. de l'aire comprise entre la cissoïde

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x} \quad \text{(Cours d'An., 335)}$$

et son asymptote $x = 2a$.

R. $$S = 3\pi a^2, \quad y_1 = 0, \quad x_1 = \frac{5}{6}2a.$$

10. C. de gr. de l'air comprise entre la courbe

$$y^2 = b^2\frac{a-x}{x}$$

et son asymptote $x = 0$.

R. $$S = \pi ab, \quad y = 0, \quad x_1 = \frac{a}{4}.$$

21. C. de gr. du segment compris entre la courbe

$$y = ax^m,$$

l'axe des x, et l'ordonnée du point (x, y).

R. $$S = \frac{xy}{m+1}, \quad x_1 = \frac{m+1}{m+2}x, \quad y_1 = \frac{m+1}{2m+1}\frac{y}{2}.$$

22. C. de gr. de l'aire comprise entre la droite $y = \beta x$ et la parabole $y^2 = 2px$.

R. Le point d'intersection a pour coordonnées

$$x' = \frac{2p}{\beta^2}, \quad y' = \frac{2p}{\beta}.$$

On trouve

$$S = \frac{2p^2}{3\beta^3}, \quad x_1 = \frac{2x'}{5}, \quad y_1 = \frac{y'}{2}.$$

23. C. de gr. de l'aire engendrée par un arc de cycloïde partant de l'origine, tournant autour de la base.

R. $$S = 16\pi a^2\left(\frac{2}{3} - \cos\frac{\omega}{2} + \frac{1}{3}\cos^3\frac{\omega}{2}\right).$$

$$Sx_1 = 16\pi a^3\left[\cos\frac{\omega}{2}\left(\omega - \sin\omega\right)\left(\frac{1}{3}\cos^2\frac{\omega}{2} - 1\right) + \frac{8}{9}\sin^3\frac{\omega}{2} + \frac{4}{15}\sin^5\frac{\omega}{2}\right].$$

Pour $\omega = 2\pi$,

$$x_1 = \frac{26}{15}a.$$

24. C. de gr. de la surface du paraboloïde de révolution, entre le sommet et un plan x perpendiculaire à l'axe.

R. $$y^2 = 2px, \quad x_1 = \frac{1}{5}\frac{(3x - p)(2x + p)^{\frac{3}{2}} + p^{\frac{5}{2}}}{(2x + p)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}}}.$$

25. C. de gr. de l'aire d'un triangle sphérique ABC.

R, Application du théorème sur les c. de gr. des aires sphériques. Soient α, β, γ les côtés respectivement opposés aux angles A, B, C; a le rayon de la sphère; ξ, η, ζ les distances du c. de gr. aux plans des côtés α, β, γ. On a

$$\xi = \frac{a}{2}\frac{\alpha - \beta\cos C - \gamma\cos B}{A + B + C - 180^\circ}, \quad \eta = \frac{a}{2}\frac{\beta - \gamma\cos A - \alpha\cos C}{A + B + C - 180^\circ},$$

$$\zeta = \frac{a}{2}\frac{\gamma - \alpha\cos B - \beta\cos A}{A + B + C - 180^\circ}.$$

26. C. de gr. de la portion de surface du cône

$$x^2 + y^2 = b^2z^2$$

comprise entre les plans XZ, YZ, $x = a$.

R. On simplifie la solution en décomposant par des plans perpendiculaires à OX et

des plans passant par OX. On obtient

$$S=\frac{\pi a^2 b}{4}\sqrt{1+b^2},\quad x_1=\frac{2a}{3},\quad y_1=\frac{4ab}{3\pi},\quad z_1=\pm\frac{4ab}{3\pi}.$$

17. C. de gr. du volume d'un secteur sphérique.

R. Soient a le rayon de la sphère, 2β l'angle au sommet du secteur. On a

$$x_1=\frac{3}{4}a\cos^2\frac{1}{2}\beta.$$

18. C. de gr. du volume d'une tranche de paraboloïde de révolution.

R. a, b rayons des deux bases, h leur distance, x_1 la distance du c. de gr. à la base de rayon a.

$$x_1=\frac{h}{3}\frac{a^2+2b^2}{a^2+b^2}.$$

19. Soit $\varphi(x)=a+bx+cx^2$ l'aire de la section faite dans un solide homogène par un plan x quelconque; S_0, S_1, S' celles de trois sections équidistantes, h la distance des sections extrêmes, δ_0 et δ_1 les distances du c. de gr. du vol. V aux sections extrêmes. Démontrer que l'on a

$$V=\frac{h}{6}(S_0+4S'+S_1),\quad V\delta_0=\frac{h^2}{6}(S_1+2S'),\quad \frac{\delta_0}{\delta_1}=\frac{S_1+2S'}{S_0+2S'}.$$

20. C. de gr. du solide compris entre les surfaces engendrées par la révolution des paraboles

$$y^2=2px,\quad y^2=2p'(a-x),$$

autour de leur axe commun.

R. Les limites d'intégration sont $x_0=0$, $x=\dfrac{ap'}{p+p'}$, et l'on a

$$x_1=\frac{a}{3}\frac{p+2p'}{p+p'}.$$

21. C. de gr. du volume compris entre les plans XZ, XY, $x=a$, dans le cône de l'ex. 16.

R. $$V=\frac{\pi b^2a^3}{12},\quad x_1=\frac{3a}{4},\quad y_1=z_1=\frac{ab}{\pi}.$$

22. C. de gr. du volume compris entre la sphère

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

et les trois plans YZ, XZ, XY.

23. C. de gr. du volume compris entre le cône

$$z^2=2xy$$

et les plans $z=0$, $x=a$, $y=b$.

R. $$V=\frac{4\sqrt{2}}{9}(ab)^{\frac{3}{2}},\quad x_1=\frac{3a}{5},\quad y_1=\frac{3b}{5},\quad z_1=\frac{9}{16\sqrt{2}}\sqrt{ab}.$$

24. Trouver le volume compris entre le cylindre

$$y^2 = 2ax - x^2$$

et les plans $z = \beta x$, $z = \beta' x$, et le c. de gr. de ce volume.

R. $$V = \pi(\beta' - \beta)a^3, \quad x_1 = \frac{5}{4}a, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = \frac{5}{8}a(\beta + \beta').$$

25. Centre de gravité du volume compris entre les trois plans coordonnés YZ, XZ, XY et la surface qui a pour équation

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

R. $$V = \frac{\pi a^3}{70}, \quad x_1 = y_1 = z_1 = \frac{3 \cdot 7}{2^7}a$$

26. *Théorèmes de Guldin.* — Volume engendré par la révolution de l'aire d'une arcade de cycloïde tournant autour de sa base.

R. $$V = 5\pi^2 a^3.$$

27. Volumes engendrés par la révolution du segment compris entre la parabole

$$y^2 = 2px,$$

son axe et une ordonnée quelconque, tournant 1° autour de l'axe; 2° autour de la tangente au sommet; 3° autour de l'ordonnée qui le termine.

R $$V = \frac{\pi}{2}xy^2; \quad V' = \frac{4\pi}{5}x^2y; \quad V'' = \frac{8\pi}{15}x^2y.$$

28. Le volume du solide indéfiniment effilé engendré par la révolution de la cissoide (Ex. 9) autour de son asymptote est égal au volume du tore engendré par la révolution du cercle générateur autour de cette même asymptote (Sluse).

29. *Densité variable.* — Une courbe plane dont la densité ρ est une fonction donnée $f(s)$ de l'arc s compté d'une origine A, est déterminée par la condition que l'ordonnée du centre de gravité d'un arc quelconque AM soit elle-même une fonction donnée $\varphi(s)$ de l'arc s. Trouver l'équation de cette courbe.

R. On trouve

$$y = \frac{1}{f(s)}\frac{d}{ds}\varphi(s)f(s) = \psi(s),$$
$$x = \int_0^s ds\sqrt{1 - \psi'(s)^2}.$$

Ex. : soient $\rho = \frac{s^5}{4}$, $y_1 = s^2$. On trouve, en posant

$$s = \frac{1}{3}\sin\varphi, \quad y = \frac{1}{6}\sin^2\varphi, \quad x = \frac{1}{6}\left(\varphi + \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right),$$

équations où l'on reconnait une cycloïde.

30. Trouver la masse et le c. de gr. d'un arc d'hélice (100), qui s'étend du plan $z = 0$ à l'infini, la densité étant donnée par la loi $\rho = e^{-ct}$.

R. $$M = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{c}, \quad x_1 = \frac{ac}{1 + c^2}, \quad y_1 = \frac{ac^2}{1 + c^2}, \quad z_1 = \frac{b}{c}.$$

22. *Centre de gravité de la courbure.* — La densité varie, sur une courbe plane, en raison inverse du rayon de courbure. Trouver le centre de gravité d'un arc quelconque, dans le même système de coordonnées que dans l'ex. **5**, et appliquer à la cycloïde (Haton de la Goupillière).

R. $$x_1 = x' - \frac{1}{\varphi}\int_0^{\varphi} \varphi f'(\varphi) \cos\varphi \, d\varphi, \quad y_1 = y' - \frac{1}{\varphi}\int_0^{\varphi} \varphi f'(\varphi) \sin\varphi \, d\varphi.$$

La cycloïde $s = 4a \sin\varphi$ donne

$$x_1 = a\left(\varphi - \frac{\cos 2\varphi}{2\varphi}\right), \quad y_1 = a\left(1 - \frac{\sin 2\varphi}{2\varphi}\right).$$

Pour une demi-cycloïde,

$$x_1 = a\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\right), \quad y_1 = a.$$

CHAPITRE X.

APPLICATION DES PRINCIPES DE LA STATIQUE A L'ÉQUILIBRE D'UN FIL FLEXIBLE. THÉORIE DE LA CHAINETTE.

115. Lorsqu'on suppose, dans le polygone funiculaire considéré au n° **95**, que tous les points matériels du fil soient sollicités par des forces données et très petites, les côtés du polygone ou les distances des points consécutifs du fil étant alors d'une petitesse extrême, il est avantageux de regarder la figure du fil comme une courbe continue, et d'employer une artifice de calcul semblable à celui dont on a fait usage dans la théorie des centres de gravité (**102**), pour introduire la continuité là où, en réalité, elle n'existe pas.



Fig. 72.

Rapportons les points du fil en équilibre à trois axes rectangulaires OX, OY, OZ (fig. 72); soit M (x, y, z) un de ces points. Si l'on divise la somme des composantes, parallèles à chaque axe, des forces données qui sollicitent un élément très-petit du fil dont le point M fasse partie, par la longueur de cet élément, et si l'on désigne par X, Y, Z ces rapports, la résultante P des forces X, Y, Z sera ce qu'on nomme *la force motrice au point* M, *rapportée à l'unité de longueur du fil.* On admet que P, X, Y, Z sont des fonctions données de x, y, z.

La tension T du fil au point M sera évidemment dirigée suivant la tangente en M à la courbe dessinée par le fil; elle sera, ainsi que ses composantes T_x, T_y, T_z, une fonction à déterminer des coordonnées x, y, z. Soient s la longueur de l'arc de courbe terminé en M; Δs une très petite portion MM′ du fil. Si on la considère comme libre, elle sera évidemment en équilibre entre les tensions MT, M′T′ qu'elle éprouve à ses extrémités, et les forces données qui agissent sur ses divers points : la somme des composantes de toutes ces forces parallèlement à OX devra donc être nulle. Or, les composantes des tensions en M et M′ sont $-T_x$, $T_x + \Delta T_x$; la somme des composantes des forces élémentaires est égale, d'après la définition ci-dessus, à $X\Delta s$. Nous avons donc

$$-T_x + T_x + \Delta T_x + X\Delta s = 0,$$

ou en réduisant, remplaçant les quantités très petites par des infiniment petits, et opérant de même pour les axes OY, OZ,

$$(1) \qquad dT_x + X ds = 0, \quad dT_y + Y ds = 0, \quad dT_z + Z ds = 0.$$

Ces équations sont *nécessaires* pour l'équilibre du fil; réciproquement, si elles sont vérifiées en chaque point du fil et si les extrémités A et B de celui-ci sont maintenues en équilibre par des forces convenables ou par des points fixes, on voit facilement que l'équilibre aura lieu. En effet, concevons que l'on parte du point A et que l'on donne successivement au fil en tous ses points la figure et la tension convenables pour que l'équilibre ait lieu entre les forces données qui sollicitent le fil et la tension au point A, ce qui sera évidemment possible. Comme la grandeur et la direction de la tension en chaque point devront satisfaire aux équations (1), d'après ce qui précède, et que d'autre part ces équations déterminent complètemet la loi de variation des composantes T_x, T_y, T_z à partir du point A jusqu'à un point quelconque du fil, il est clair que les valeurs de T_x, T_y, T_z, et par conséquent la figure du fil en équilibre et sa tension, coïncideront respectivement en chaque point avec les valeurs de ces composantes dans l'état du fil où on le supposait primitivement. Celui-ci était donc en équilibre. Les équations (1) sont donc les équations nécessaires et suffisantes de l'équilibre d'un fil flexible soumis à l'action de forces données et dont les extrémités sont en équilibre.

116. On donne aux équations (1) une autre forme. Soient α, β, γ les cosinus directeurs de la tangente au fil en M, dans le sens où s croît;

nous aurons

$$T_x = \alpha T, \quad T_y = \beta T, \quad T_z = \gamma T, \quad \alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \gamma = \frac{dz}{ds},$$

et par suite

$$(2) \qquad \frac{d \cdot \alpha T}{ds} + X = 0, \quad \frac{d \cdot \beta T}{ds} + Y = 0, \quad \frac{d \cdot \gamma T}{ds} + Z = 0.$$

On en déduit en multipliant par α, β, γ et observant que

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

$$(3) \qquad dT + X dx + Y dy + Z dz = 0.$$

L'équation (3) montre que, si $X dx + Y dy + Z dz$ est la différentielle totale d'une fonction $\varphi(x, y, z)$, cas qui se présente fréquemment dans la nature, on aura

$$dT + d\varphi = 0, \quad \text{d'où} \quad T = C - \varphi(x, y, z),$$

C étant constant en tous les points du fil, et la tension sera ainsi connue en fonction des coordonnées du point auquel elle se rapporte.

On peut encore observer que, si λ, μ, ν sont les cosinus directeurs de la normale principale en M à la courbe du fil, R son rayon de courbure, on a

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\lambda}{R}, \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\mu}{R}, \quad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\nu}{R},$$

et les équations (2) prennent la forme

$$(4) \qquad \alpha \frac{dT}{ds} + \frac{\lambda T}{R} + X = 0, \quad \beta \frac{dT}{ds} + \frac{\mu T}{R} + Y = 0, \ldots$$

d'où l'on tire, par la relation $\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = 0$,

$$\frac{dT}{ds} + \alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0, \quad \frac{T}{R} + \lambda X + \mu Y + \nu Z = 0,$$

ou, P_t et P_n étant les composantes tangentielle et normale à la courbe de la force P,

$$\frac{dT}{ds} = -P_t, \quad \frac{T}{R} = -P_n.$$

117. Lorsque la force P est *normale* en chaque point du fil, comme cela a lieu quand le fil est simplement tendu sur une surface dont le

frottement est négligeable, on a, dans l'équation (3),

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0, \quad dT = 0, \quad T = \text{const.}$$

La tension est la même sur toute la longueur du fil. Les équations (4) donnent ensuite, en désignant par N la réaction normale de la surface,

$$(5) \qquad \frac{\lambda}{X} = \frac{\mu}{Y} = \frac{\nu}{Z} = -\frac{R}{T} = -\frac{1}{N}.$$

La normale principale à la courbe affectée par le fil est donc dirigée, en chaque point, suivant la normale à la surface; propriété qui caractérise *les lignes géodésiques* ou lignes de longueur minimum sur une surface donnée. La dernière équation montre que *le rayon de courbure varie en raison inverse de la réaction normale de la surface.*

Observons encore que, si l'on multiplie les deux dernières équations (2) par z, y et qu'on les soustraie, en ayant égard aux valeurs de β, γ on trouvera

$$(6) \qquad \frac{d}{ds}T(\beta z - \gamma y) = yZ - zY,$$

et deux autres relations semblables qui s'en déduisent par permutation circulaire.

118. Appliquons les équations (2) au cas où le fil est tendu sur la surface de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

En désignant par ϖ la distance du centre au plan tangent en M, par δ le rayon de l'ellipsoïde parallèle à la tangente au fil en M, on a

$$X = \frac{N\varpi x}{a^2}, \quad Y = \frac{N\varpi y}{b^2}, \quad Z = \frac{N\varpi z}{c^2},$$

$$(\alpha) \qquad \frac{1}{\varpi^2} = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}, \quad \frac{1}{\delta^2} = \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}.$$

Les équations (2) deviennent, T étant constant,

$$(\beta) \qquad \frac{d\alpha}{ds} + \frac{N\varpi}{T}\frac{x}{a^2} = 0, \quad \frac{d\beta}{ds} + \frac{N\varpi}{T}\frac{y}{b^2}, \quad \frac{d\gamma}{ds} + \frac{N\varpi}{T}\frac{z}{c^2} = 0.$$

Multiplions les équations (β) par $x : a^2$, $y : b^2$, $z : c^2$ et ajoutons-les, en ayant égard aux équations (α) et à celles-ci :

$$\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}+\frac{\gamma z}{c^2}=0, \quad \frac{x}{a^2}\frac{d\alpha}{ds}+\frac{y}{b^2}\frac{d\beta}{ds}+\frac{z}{c^2}\frac{d\gamma}{ds}=-\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right)=-\frac{1}{\delta^2},$$

il viendra

$$(\gamma) \qquad -\frac{1}{\delta^2}+\frac{N}{T\varpi}=0.$$

Multiplions ces mêmes équations (β) par $\alpha : a^2$, $\beta : b^2$, $\gamma : c^2$ et ajoutons en ayant égard encore aux équations (α) ; il viendra

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\delta^2}\right)+\frac{N\varpi}{T}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varpi^2}\right)=0, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\delta^3}\frac{d\delta}{ds}+\frac{N}{T\varpi^2}\frac{d\varpi}{ds}=0,$$

et si l'on élimine $N : T$ entre cette équation et l'équation (γ), on trouvera

$$\frac{d\delta}{\delta}+\frac{d\varpi}{\varpi}=0, \quad d\,.\,\delta\varpi=0, \quad \delta\varpi=C,$$

C désignant une constante. Cette équation renferme le théorème de Joachimsthal : *Le long d'une ligne géodésique de l'ellipoïde, la distance du centre au plan tangent et le rayon de la surface parallèle à la tangente donnent un produit constant*

De l'équation (γ) on tire

$$\frac{N}{T}=\frac{\varpi}{\delta^2}=\frac{\varpi^3}{C^2}, \quad R=\frac{T}{N}=\frac{\delta^2}{\varpi}=\frac{C^2}{\varpi^3}.$$

La réaction normale de la surface varie comme le cube de la distance du centre au plan tangent, et le rayon de courbure du fil varie en raison inverse de ce même cube.

119. *Équilibre d'un fil pesant.* — Concevons qu'un fil, dont les extrémités A et B sont fixes, soit soumis à l'action de la pesanteur seulement. D'après une remarque déjà faite (**97**), le fil en équilibre sera dans le plan vertical mené par les points A et B. Prenons ce plan pour plan XY, l'axe des x horizontal, l'axe des y vertical en sens contraire de la pesanteur; soit ρ la densité du fil en un point quelconque (x, y). Les équations (1) nous donnent évidemment, dans ce cas où $X=0$, $Y=-g\rho$,

$$d\,.\,T\frac{dx}{ds}=0, \quad d\,.\,T\frac{dy}{ds}-g\rho ds=0,$$

c'est-à-dire, en intégrant et désignant par T_0, A des constantes,

$$T\frac{dx}{ds}=T_0,\quad T\frac{dy}{ds}=A+g\int_0^s \rho ds.$$

Donc, *la composante horizontale de la tension du fil est constante, et sa composante verticale est proportionnelle au poids du fil, compté d'une origine déterminée jusqu'au point considéré.*

Supposons ρ constant ou le fil homogène. Nous aurons, en prenant pour origine de l'arc s le point C où la tangente est horizontale,

$$T\frac{dx}{ds}=T_0,\quad A=0,\quad T\frac{dy}{ds}=g\rho s,\quad \frac{dy}{dx}=\frac{g\rho}{T_0}s,$$

ou encore, en posant $T_0=g\rho a$,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{s}{a},\quad s=a\frac{dy}{dx}=ap.$$

Pour déduire de là l'équation entre x et y, dérivons par rapport à x; nous aurons

$$\frac{dp}{dx}=\frac{1}{a}\sqrt{1+p^2},\quad \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{dx}{a},\quad \text{l.}\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)=\frac{x}{a},$$

en faisant passer OY par le point C. Résolvant cette équation par rapport à p (Cours d'An., 420), on a

$$p=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right),\quad (6)\; y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

la constante étant déterminée de manière que $x=0$ donne $y=a$ pour le point C (fig. 73). La courbe représentée par l'équation (6) est celle que l'on nomme *chaînette;* elle est symétrique par rapport à l'axe des y, et jouit de diverses propriétés remarquables. Ainsi, φ étant l'inclinaison de la tangente sur l'axe des x, on voit sans peine que l'on a les relations

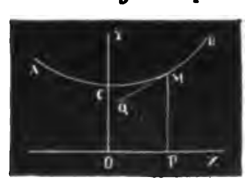


Fig. 73.

$$s=a\,\text{tg}\,\varphi=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right),\quad y=\frac{a}{\cos\varphi},\quad s=y\sin\varphi;$$

si donc on abaisse du pied P *de l'ordonnée une perpendiculaire* PQ *sur la tangente, la longueur* PQ *est constante et égale à* OC; *la distance* MQ

est égale à la longueur CM *de l'arc de la chaînette.* Le rayon de courbure R a pour expression

$$R = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{a}{\cos^2 \varphi} = \frac{y^2}{a}.$$

Quant à la tension du fil, sa valeur est évidemment

$$T = \frac{T_0}{\cos \varphi} = \frac{g\rho a}{\cos \varphi} = g\rho y;$$

elle est proportionnelle à la sécante de l'inclinaison de la courbe ou à l'ordonnée verticale de celle-ci.

120. Résolvons encore la question suivante : *étant donnés les points d'attache* A, B *et la longueur* l *du fil, déterminer la chaînette.*

Tout revient à trouver le point C et le paramètre a. Soient x_0, y_0 les coordonnées du point A par rapport à l'origine O qui est inconnue, et $x_0 + h$, $y_0 + k$ celles du point B; h et k sont donnés, ce sont les projections horizontale et verticale de la droite AB. On a d'ailleurs pour la longueur d'un arc quelconque s compté du point le plus bas,

$$s = a \operatorname{tg} \varphi = a \frac{dy}{dx} = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

d'où l'on tire, par l'équation (4),

$$y + s = ae^{\frac{x}{a}}, \quad y - s = ae^{-\frac{x}{a}}.$$

Appliquons ces équations au point A et au point B, et désignons par s_0 la valeur de s qui se rapporte au point A; nous aurons

$$y_0 + s_0 = ae^{\frac{x_0}{a}}, \quad y_0 - s_0 = ae^{-\frac{x_0}{a}},$$

$$y_0 + k + s_0 + l = ae^{\frac{x_0 + h}{a}}, \quad y_0 + k - s_0 - l = ae^{-\frac{x_0 + h}{a}}.$$

De là nous tirons par soustraction

$$l + k = ae^{\frac{x_0}{a}}\left(e^{\frac{h}{a}} - 1\right), \quad l - k = ae^{-\frac{x_0}{h}}\left(1 - e^{-\frac{h}{a}}\right),$$

et par la multiplication membre à membre de ces dernières égalités,

$$l^2 - k^2 = a^2\left(e^{\frac{h}{2a}} - e^{-\frac{h}{2a}}\right)^2.$$

Si donc nous posons

$$\frac{h}{2a} = z, \quad \frac{2\sqrt{l^2 - k^2}}{h} = b,$$

nous aurons

$$\frac{e^z - e^{-z}}{z} = b.$$

On peut tirer la valeur de z de cette équation transcendante, soit par l'intersection d'une courbe et d'une droite, soit au moyen d'une table dressée par Broch (1), et de cette valeur de z on déduira celle de a, après quoi les équations ci-dessus donneront sans peine x_0, y_0, s_0, et par conséquent la position du point C et tous les éléments de la chaînette.

Exercices.

1. Dans un fil pesant fixé par ses extrémités, la densité varie de telle manière que le poids d'un élément du fil soit proportionnel à sa projection horizontale. Trouver la figure d'équilibre et la tension.

R. On a $\rho = \mu \cos\varphi$. L'origine étant au point le plus bas, on trouve

$$y = \frac{g\mu}{2T_0} x^2, \quad T = \sqrt{T_0^2 + g^2\mu^2x^2}.$$

Le fil forme une parabole.

2. On donne les points d'attache A et B d'un fil pesant et homogène, situés à même hauteur, avec la condition que la tension en chacun des points A et B soit égale au poids total du fil. Trouver le paramètre a de la chaînette, l'inclinaison α de la tangente en A sur l'horizontale, la *flèche* f de la chaînette, la longueur l du fil.

R. Posant AB $= 2b$, les équations du nº **120** donnent

$$a + f = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{b}{a}} + e^{-\frac{b}{a}}\right), \quad l = a\left(e^{\frac{b}{a}} - e^{-\frac{b}{a}}\right),$$

et la condition donnée fournit la relation $l = a + f$. De là on tire

$$a = \frac{2b}{l.\,3}, \quad l = \frac{4b}{\sqrt{3}\,l.\,3}, \quad f = \frac{2b}{l.\,3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right), \quad \alpha = 60^\circ.$$

3. Trouver la figure d'équilibre d'un fil flexible parcouru par un courant et soumis à l'action d'un pôle d'aimant, sachant que les composantes de l'action sur un élément ds du fil ont pour valeurs

$$X\,ds = h\frac{ydz - zdy}{r^3}, \quad Y\,ds = h\frac{zdx - xdz}{r^3}, \quad Z\,ds = h\frac{xdy - ydx}{r^3},$$

(1) V. Broch, *Mechanik*, p. 46 et la *Statique* de M. l'abbé Moigno, p. 261.

x, y, z étant les coordonnées d'un point de l'élément, r sa distance au pôle pris pour origine O, h une constante (G. Darboux).

R. Les équations d'équilibre

$$d \,.\, \alpha T + h \frac{y dz - z dy}{r^3} = 0, \quad \text{etc...}$$

multipliées par α, β, γ et ajoutées, donnent $dT = 0$, $T = \text{const.}$; multipliées par x, y, z et ajoutées, $\lambda x + \mu y + \nu z = 0$, le rayon de courbure est normal au rayon vecteur r. Ainsi *la tension est constante* et *la courbe formée par le fil est une ligne géodésique du cône de sommet* O *passant par le fil.* Des équations (6) on tire

$$T d(\beta z - \gamma y) = \frac{h}{r^3} [y (x dy - y dx) - z (z dx - x dz)] = - h d \,.\, \frac{x}{r},$$

d'où les intégrales

$$T(\beta z - \gamma y) + h \frac{x}{r} = A, \quad T(\gamma x - \alpha z) + \frac{hy}{r} = B, \quad T(\alpha y - \beta x) + \frac{hz}{r} = C,$$

A, B, C constants. Donc

$$Ax + By + Cz = hr.$$

Le cône ci-dessus est de révolution; il se construit facilement si l'on connaît les extrémités du fil et sa longueur.

CHAPITRE XI.

APPLICATION DES PRINCIPES DE LA STATIQUE A L'ÉQUILIBRE DES MACHINES SIMPLES.

121. On appelle *machine*, au point de vue statique, tout appareil qui sert à tenir en équilibre une force, dite *résistance*, au moyen d'une autre force qui ne lui est pas égale et directement opposée, et qu'on appelle *puissance*. Il est nécessaire, pour produire ce résultat, qu'un tel appareil s'appuie contre certains obstacles fixes qui gênent ses mouvements.

On ramène d'ordinaire les machines à trois types élémentaires qu'on nomme *machines simples :* ce sont le *levier*, la *corde* et le *plan incliné*. Les diverses machines que l'on considère sont des transformations ou des combinaisons de ces types simples : on les nomme *machines composées*. Nous allons chercher, d'après les principes de la statique, les conditions d'équilibre des machines simples et de leurs combinaisons les

plus usitées. Nous ferons abstraction, dans cette première étude, de quelques propriétés physiques des corps qui influent sensiblement sur les conditions de leur équilibre ; telles sont, en particulier, le *frottement*, la *déformation* des corps solides que nous regardons comme absolument rigides, la *raideur* des cordes que nous supposons parfaitement flexibles, etc. Les modifications que ces diverses propriétés introduisent dans les résultats n'appartiennent pas proprement à la mécanique rationnelle.

122. *Du levier.* — Le levier, dans le sens le plus général, est un solide de forme quelconque AOB (fig. 74), mobile autour d'un point fixe O nommé *point d'appui*, et soumis à l'action de forces P, P′, P″... en nombre quelconque, agissant dans un même plan passant par le point O.



Fig. 74.

Les conditions d'équilibre du levier sont donc celles d'un solide qui a un point fixe et sur lequel agissent des forces dirigées dans un même plan. Nous savons (80) que, pour l'équilibre, *il est nécessaire et suffisant que la somme algébrique des moments des forces* P *par rapport au point d'appui soit égale à zéro.* Si donc p désigne la perpendiculaire abaissée du point O sur une force quelconque P ou le *bras de levier* de P, l'équation d'équilibre du levier sera

$$\Sigma Pp = 0,$$

le produit Pp étant affecté du signe + ou du signe — suivant le sens dans lequel la force P tend à faire tourner le levier autour du point O.

Quand le centre de gravité du levier coïncide avec le point O, la fixité de ce point détruit la résultante des actions que la pesenteur exerce sur le levier, et il n'y a pas à en tenir compte. Mais le plus souvent il n'en est pas ainsi, et l'on doit, pour avoir égard à l'influence de le pesanteur sur l'équilibre du levier, joindre aux forces qui sollicitent celui-ci une force verticale égale à son poids et appliquée à son centre de gravité.

Pour calculer la pression du levier en équilibre sur le point O, ou la *charge* de ce point, il suffit de se rappeler que cette pression est égale à la résultante des forces appliquées au levier, transportées parallèlement à elles-mêmes au point O.

123. Le cas le plus simple est celui où deux forces seulement, une résistance Q (un poids à soulever par exemple) et une puissance P, agis-

sent sur le levier. Soient p, q les distances du point O aux directions respectives des forces P, Q. Les moments de ces forces devront être de signes contraires pour que leur somme puisse être égale à zéro; leurs valeurs seront Pp, $-Qq$, et l'équation d'équilibre sera

$$Pp - Qq = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{P}{Q} = \frac{q}{p}.$$

Donc, pour l'équilibre, *il faut que la puissance et la résistance tendent à faire tourner le levier en sens contraire et soient en raison inverse de leurs bras de levier.*

Cette règle s'applique à toute espèce de levier : si le point d'appui tombe entre les points d'application de la puissance et de la résistance, le levier est du *premier genre;* il est du deuxième, si la résistance agit entre le point O et la puissance; du troisième, si la puissance agit entre le point O et la résistance (fig. 75). La balance romaine est un levier du premier genre; la brouette un levier du second; la pédale du remouleur un levier du troisième.

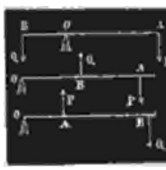


Fig. 75.

124. *Du Treuil.* — Le *treuil* est un cylindre solide ou *arbre,* qui peut tourner autour de son axe TT, au moyen de deux tourillons portés sur des coussinets fixes C, C et ayant même axe que le cylindre, mais un diamètre beaucoup plus petit. Une barre AM implantée sur le cylindre normalement à son axe TT, reçoit l'action de la puissance P, qui d'ordinaire agit perpendiculairement à la barre AM et à l'axe TT. La résistance Q s'exerce sur une corde enroulée autour de l'arbre du treuil auquel son extrémité est fixée.

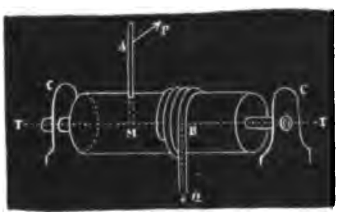


Fig. 76.

Les conditions d'équilibre du treuil sont celles d'un solide qui peut tourner librement autour d'un axe fixe : *la somme algébrique des moments des forces* P *et* Q *par rapport à l'axe* TT *doit être égale à zéro.* La force P étant perpendiculaire à l'axe, soit $r = AO$ (fig. 77) la distance de son point d'application A à l'axe du treuil, ou le rayon de la circonférence que décrit le point A dans la rotation autour de TT; le moment

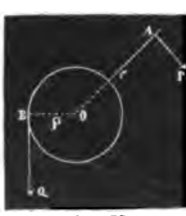


Fig. 77.

de la puissance est Pr. D'autre part, soit ρ le rayon de l'arbre : ρ est la distance entre l'axe et la force Q, et le moment de cette force est $-Q\rho$, car il faut pour l'équilibre que les forces P et Q agissent en sens contraire sur le treuil. L'action de la pesanteur se réduit sensiblement au poids de l'arbre, appliqué au centre de gravité qui est un point de l'axe fixe : son moment est donc nul. L'équation d'équilibre est donc

$$Pr - Q\rho = o \quad \text{ou} \quad \frac{P}{Q} = \frac{\rho}{r}.$$

Ainsi, la condition de l'équilibre du treuil est *que la puissance et la résistance agissent en sens contraire l'une de l'autre, et que la première soit à la seconde comme le rayon de l'arbre est au rayon de la circonférence que décrirait le point d'application de la puissance.*

Au lieu d'agir sur une barre AM implantée normalement à la surface de l'arbre, la puissance est souvent appliquée, soit à une manivelle montée sur le prolongement de l'un des tourillons, soit à une corde enroulée sur la circonférence d'une roue fixée à l'arbre du treuil et ayant même axe que lui. La règle donnée plus haut s'applique à tous les cas.


Fig. 78.

Il arrive quelquefois, comme lorsqu'on soulève à l'aide d'un treuil de lourdes pierres dans les carrières, que le diamètre de la corde BQ (fig. 78) ait une valeur comparable à celle du diamètre de l'arbre. On doit remarquer alors que, la direction de la résistance étant celle de l'axe de la corde, la distance de cette force à l'axe de rotation TT est égale, non pas au rayon ρ de l'arbre, mais à ce rayon augmenté de celui de la corde.

La détermination de la charge des coussinets se fera sans difficulté par la méthode indiquée au n° **91**.

Dans la plupart des applications du treuil, l'arbre est horizontal. Lorsque, comme cela a lieu dans la manœuvre des vaisseaux et dans les ports de mer, l'arbre du treuil est posé verticalement, et la barre sur laquelle agit la puissance implantée horizontalement sur l'arbre, le treuil prend le nom du *Cabestan*. Les conditions d'équilibre sont exprimées par la même règle.

125. *Équilibre d'un système de leviers.* — Soit une machine composée de plusieurs leviers AB, CD, EF (fig. 79), ayant leurs points d'appui respectifs en O, O′, O″, et réagissant les uns sur les autres, soit par

traction au moyen d'un cordon BC, soit par la pression d'une barre DE. Soient P, Q la puissance et la résistance, appliquées respectivement en A et en F, et cherchons la condition d'équilibre par la méthode des réactions.

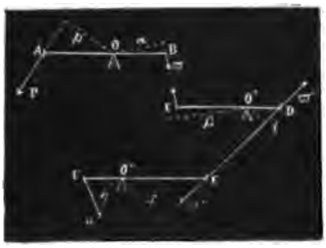


Fig. 79.

Le levier AB est en équilibre entre la puissance P et la réaction ϖ du cordon CB; p, α étant les perpendiculaires du point O sur les directions de P et de ϖ, on a, comme on l'a vu,

$$Pp = \varpi\alpha.$$

Désignons de même par ϖ' la réaction du lien ED sur CD, par β et γ les perpendiculaires du point O′ sur les forces ϖ et ϖ'; par δ et q les perpendiculaires du point O″ sur ϖ' et Q; les conditions d'équilibre des leviers CD et EF donneront

$$\varpi\beta = \varpi'\gamma, \qquad \varpi'\delta = Qq,$$

et il suffit de multiplier membre à membre ces trois équations pour éliminer les réactions inconnues ϖ, ϖ', et obtenir l'équation d'équilibre

$$Pp\beta\delta = Qq\alpha\gamma,$$

ou encore

$$\frac{P}{Q} = \frac{q\alpha\gamma}{p\beta\delta}.$$

Il faut donc, pour l'équilibre, que *la puissance soit à la résistance comme le produit des bras de levier situés du côté de la résistance est au produit des bras de levier situés du côté de la puissance.*

Si l'on ajoute la condition que les forces qui sollicitent un même levier tendent à le faire tourner en sens contraire l'une de l'autre, on aura tout ce qui est nécessaire pour l'équilibre. La règle est évidemment applicable à un nombre quelconque de leviers.

Les directions des réactions ϖ, ϖ' sont nécessaires à connaître pour l'évaluation de leurs bras de levier; si ces réactions s'exercent par l'intermédiaire de cordons flexibles, les directions de ceux-ci sont celles des forces ϖ, ϖ'; si c'est par pression directe, les réactions sont normales aux surfaces en contact.

126. *Équilibre d'un système de treuils.* — Considérons plusieurs treuils T, T′, T″, réagissant l'un sur l'autre au moyen de cordes qui

s'enroulent d'une part sur l'arbre d'un treuil, d'autre part sur la roue du suivant. Soient r, r', r'' les rayons des roues; ρ, ρ', ρ'' les rayons des arbres; P la puissance opérant sur la roue du treuil T; Q la résistance agissant sur l'arbre du dernier treuil T''; τ, τ' les tensions des cordes qui réunissent T à T', T' à T''. L'équilibre de chaque treuil, considéré isolément, fournira les trois équations

$$Pr = \tau\rho, \quad \tau r' = \tau'\rho', \quad \tau' r'' = Q\rho'',$$

et par l'élimination des inconnues τ, τ' on aura

$$Prr'r'' = Q\rho\rho'\rho'', \quad \text{ou} \quad \frac{Q}{P} = \frac{\rho\rho'\rho''}{rr'r''}.$$

La condition d'équilibre du système est donc *que la puissance soit à la résistance comme le produit des rayons des arbres est au produit des rayons des roues.*

La communication d'un treuil au suivant, au lieu d'être établie au moyen de cordes comme on l'a supposé, se fait souvent d'une autre manière. On taille à la circonférence de la roue du treuil T' des dents d'une forme particulière, qui viennent s'engager dans les intervalles de dents d'une forme semblable taillées à la surface de l'arbre du treuil T, de telle façon que la rotation de l'un des treuils entraîne nécessairement celle de l'autre. On a alors des *engrenages;* les roues des treuils deviennent des *roues dentées*, les arbres sont appelés *pignons*. La condition d'équilibre est d'ailleurs toujours la même: *la puissance est à la résistance comme le produit des rayons des pignons est au produit des rayons des roues dentées.*

127. *De la Poulie.* — La deuxième machine simple, la *corde*, est employée pour vaincre une résistance, soit au moyen d'un arbre fixe autour duquel elle glisse; soit, le plus souvent, à l'aide de la *poulie*. On nomme ainsi une roue pouvant tourner librement autour d'un axe O maintenu dans une pièce GH (fig. 80) qu'on appelle *chape*, et creusée en gorge à sa circonférence de manière à recevoir une corde aux extrémités de laquelle agissent les forces.



Fig. 80.

Dans la poulie fixe, la chape et l'axe O sont regardés comme fixes; la puissance P et la résistance Q agissent sur les deux brins de la corde; leurs directions sont tangentes à la circonférence de la poulie. Il suit de là que les distances

OA, OB de l'axe O à ces directions sont égales entr'elles et au rayon de la poulie, et l'équilibre de la roue exigeant que les moments des forces P et Q soient égaux par rapport à l'axe O, on doit avoir $P = Q$. Ainsi, *dans la poulie fixe en équilibre, la puissance égale la résistance.*

Déterminons la pression R sur l'axe. Pour cela, transportons les forces P, Q parallèlement à elles-mêmes en O; soit 2α l'angle compris entre leurs directions; leur résultante R représente la pression sur l'axe. Or, on a

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos 2\alpha} = P\sqrt{2(1 + \cos 2\alpha)} = 2P \cos \alpha.$$

128. *Poulie mobile.* — La poulie fixe ne sert qu'à changer la direction de la force pour faciliter son application, mais elle ne peut en augmenter l'intensité; on obtient ce dernier résultat par l'emploi de la poulie mobile.



Fig. 81.

Une extrémité de la corde est fixée en un point D (fig. 81); l'autre est soumise à l'action de la puissance P. La résistance Q agit sur l'axe O par l'intermédiaire de la chape. Pour trouver la condition d'équilibre, on observe que la réaction S du point fixe D joue ici le même rôle que la résistance Q dans le cas de la poulie fixe, et la résistance Q remplace ici la réaction R de l'axe dans la poulie fixe.

Appliquons donc les formules du problème précédent avec les changements convenables; nous aurons

$$P = S, \quad Q = 2P \cos \alpha,$$

α étant ici la moitié de l'angle compris entre S et P, c'est-à-dire entre les directions des deux brins de la corde. Or, si l'on mène la droite AB qui joint les points de contact de ces directions avec la circonférence de la roue, le triangle AOB donne

$$AOB = 180^\circ - 2\alpha, \quad AB = 2OA \sin \frac{1}{2} AOB = 2OA \cos \alpha,$$

donc

$$\frac{P}{Q} = \frac{OA}{AB}.$$

Donc, *dans l'équilibre de la poulie mobile, la puissance est à la résistance comme le rayon de la poulie est à la droite qui joint les extrémités de l'arc embrassé par la corde.*

Le rapport P : Q est donc le plus petit possible lorsque AB est égal au

diamètre de la poulie, ou lorsque les deux brins de la corde sont parallèles. Alors $Q = 2P$.

Plusieurs poulies peuvent se combiner entr'elles de diverses manières. Si, dans chacune des poulies, la corde a une extrémité fixe et l'autre attachée à la chape de la poulie suivante, la méthode des réactions jointe à la règle d'équilibre de la poulie mobile fournit immédiatement la condition d'équilibre du système; mais cette disposition est peu employée. Le plus souvent on assemble plusieurs poulies dans une même chape, pour en former une *moufle;* le système de deux moufles réunies par une même corde, qui s'enroule alternativement autour d'une poulie de l'une, plus de l'autre moufle, constitue un *palan*. La chape de la moufle supérieure est suspendue à un obstacle fixe; celle de la moufle inférieure est mobile et reçoit directement l'action de la résistance Q, tandis que la puissance P agit à l'extrémité libre de la corde. On voit sans peine que tous les brins de la corde ayant même tension, et la puissance P devant être égale à la tension du dernier brin, si n est le nombre des poulies, on a pour la condition d'équilibre

$$P = \frac{Q}{n}.$$

129. *Du plan incliné.* — On appelle *plan incliné* un plan résistant, fixe, contre lequel s'appuie un corps solide soumis à l'action de deux forces qui s'y font équilibre au moyen de la réaction du plan. Pour plus de simplicité, admettons d'abord que le solide se réduise à un simple point matériel M. Soient Q l'une des forces, P l'autre, N la réaction normale du plan. D'après ce qui a été dit au n° **70**, l'équilibre exige que les forces P et Q soient dans un même plan normal au plan incliné, et que l'on ait

$$(\alpha) \qquad P : Q = \sin \overline{QN} : \sin \overline{PN}.$$

Considérons maintenant un solide quelconque S appuyé, par un de ses points M, sur le plan incliné AB (fig. 82) et sollicité par deux forces P, Q. En introduisant la réaction N du plan, le solide pourra être considéré comme libre. Faisons la réduction des forces au point M : la force résultante et le couple résultant devront être nuls séparément (**85**). La résultante de P, Q, N au point M devant être nulle, nous sommes d'abord ramenés aux conditions trouvées

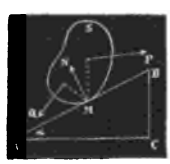


Fig. 82.

ci-dessus pour l'équilibre d'un point : le plan mené par M parallèlement aux forces P et Q devra être normal au plan incliné, et la relation (α) entre P et Q devra être vérifiée. Pour que le couple résultant des deux couples nés du transport des forces P et Q au point M soit nul, il faut 1° que ces deux couples aient leurs plans parallèles, et, par conséquent, *que les forces* P, Q *soient dans un même plan mené par le point* M *normalement au plan incliné;* 2° que leurs moments soient égaux et de signes contraires, ou, en d'autres termes, *que les forces* P *et* Q *aient, par rapport au point* M, *des moments égaux et de signes contraires.*

120. *De la vis.* — Sur la surface d'un cylindre circulaire droit, traçons la courbe nommée *hélice*, qui coupe sous un angle constant τ les génératrices du cylindre (**109**, III) et jouit par conséquent de la propriété de se réduire à une droite lorsqu'on développe la surface sur un plan. Concevons qu'un profil plan (un rectangle ou un triangle) (fig. 83) se meuve en s'appuyant sur l'hélice pendant que son plan tourne autour de la génératrice du cylindre de façon à passer toujours par l'axe de celui-ci : il engendrera un *filet saillant* adhérent à la surface du cylindre et constituant avec celui-ci le solide nommé *la vis*. La portion h d'une génératrice du cylindre, comprise entre deux spires consécutives de l'hélice, est *le pas de vis*.


Fig. 83.

L'*écrou* complète la vis; c'est un solide dont la forme extérieure varie, mais évidé intérieurement suivant un tracé géométrique tel que l'écrou, dans toute position, s'applique exactement sur la vis; en sorte que si, comme nous le supposerons ici, la vis est fixe et l'écrou mobile, celui-ci ne peut se mouvoir sans que chacun de ses points décrive une hélice. Son mouvement se compose donc d'une rotation autour de l'axe de la vis, accompagnée d'une translation parallèle à cet axe.

Cela posé, des forces P, P',... agissent sur l'écrou : il faut trouver les conditions d'équilibre de celui-ci, en négligeant les frottements. L'axe de la vis étant pris pour axe des z, le plan XY perpendiculaire, appliquons à l'équilibre de l'écrou l'équation déduite du principe des vitesses virtuelles au n° **71**, savoir

$$u_x\Sigma X + u_y\Sigma Y + u_z\Sigma Z + p\Sigma(yZ - zY) + q\Sigma(zX - xZ) + r\Sigma(xY - yX) = 0,$$

u_x, u_y, u_z étant les composantes de la translation virtuelle; p, q, r celles

de la rotation virtuelle; X, Y, Z les composantes d'une force quelconque P; x, y, z les coordonnées de son point d'application. D'après la remarque faite plus haut, les composantes u_x, u_y, p, q sont nulles et l'on a

$$u_z \Sigma Z + r \Sigma (xY - yX) = 0.$$

D'autre part, soit a le rayon du cylindre; la vitesse V d'un point M (fig. 84) de l'écrou sur l'hélice peut être regardée comme la résultante d'une vitesse V_1 parallèle à OZ, et d'une vitesse V_2 autour de OZ; on a $V_1 = u_z$, $V_2 = ar$, et le triangle MVV_2 donne, u_z et r étant de même signe ou de signe contraire suivant le sens de l'hélice par rapport à l'axe OZ positif,

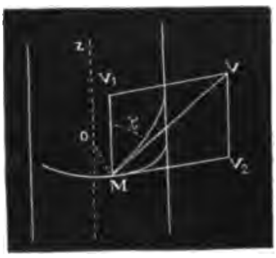


Fig. 84.

$$(\beta) \qquad u_z = \pm\, ar \cot \tau.$$

L'équation d'équilibre devient donc

$$\Sigma (xY - yX) = \mp\, a \cot \tau \cdot \Sigma Z.$$

Observant que, pour un tour entier de l'écrou, son glissement parallèle à OZ est égal à h, on tire de l'équation (β)

$$h = 2\pi a \cot \tau, \quad \text{d'où} \quad \frac{\Sigma (xY - yX)}{\Sigma Z} = \mp \frac{h}{2\pi}.$$

Donc, *pour l'équilibre de l'écrou, il faut et il suffit que la somme des moments des forces qui lui sont appliquées, par rapport à l'axe de la vis, divisée par la somme des composantes de ces forces parallèlement à l'axe, soit égale au pas de vis divisé par le nombre* 2π.

Dans le cas ordinaire, les forces se réduisent à deux : une résistance Q appliquée sur la tête de l'écrou, parallèlement à l'axe de la vis; une puissance P appliquée à un levier implanté dans l'écrou, cette force P agissant perpendiculairement à l'axe et au levier. *La puissance est à la résistance comme le pas de vis est à la circonférence que tend à décrire le point d'application de la puissance.*


Fig. 85.

131. *Équilibre du genou.* — Le *genou* se compose d'une manivelle ABD (fig. 85) mobile autour d'un point fixe A, et d'une bielle BC, articulée en B à la manivelle, l'extrémité C glissant dans une rainure AC. La puissance P agit en D

dans le plan ACD; la résistance Q agit sur la bielle en C suivant CA.

Soient N la réaction normale (nous négligeons le frottement) de la rainure AC sur la bielle en C; R la réaction de la bielle sur la manivelle en B, réaction égale et contraire à la pression de AD sur BC. L'équilibre de la bielle exige (**72**) que cette pression soit égale et opposée à la résultante des forces Q, N appliquées en C; donc la réaction R est égale à la résultante de Q, N, et agit suivant le prolongement BF de CB.

L'équilibre de la manivelle exige que les moments de P, R par rapport au point A soient égaux et de signes contraires; donc

$$P \times Ap - R \times Az = 0.$$

Soit E le point où le prolongement de AD coupe la direction de la force N. Le moment de la résultante R des forces Q, N par rapport au point E est égal à la somme des moments de Q et de N par rapport au même point (**74**) : le moment de N étant nul, on a

$$R \times Ez' = Q \times EC.$$

Multiplions ces deux équations membre à membre; il vient

$$P \times Ap \times Ez' = Q \times Az \times EC.$$

Mais si nous menons AF parallèle à CE, les triangles rectangles semblables $Ez'C$, AzF donneront

$$Az \times EC = AF \times Ez',$$

et la relation d'équilibre deviendra

$$P \times Ap = Q \times AF.$$

Si le rapport AD : AB est très grand, cet appareil permet de résister à une forte pression Q au moyen d'un effort P très faible. L'effet maximum est développé par P quand cette force est normale à AD.

132, *Balance de Quintenz.* — Cette balance, employée dans les gares de chemins de fer pour peser les objets volumineux, est représentée

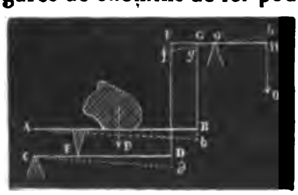


Fig. 86.

en coupe par la fig. 86. AB est le plateau qui reçoit le corps à peser; E est un couteau qui s'appuie sur un tablier CD, mobile autour du point d'appui C, suspendu d'autre part par la tringle DF au fléau EH de la balance. O est l'axe du fléau, G le point où s'attache une tringle BG qui supporte le plateau AB, appuyé d'autre part

sur le couteau E; H est le point de suspension du contrepoids Q qui doit faire équilibre au poids P.

Une condition est imposée à l'appareil : c'est que le plateau AB reste horizontal pour des inclinaisons modérées du fléau. Or, si le tablier CD décrit un angle infiniment petit $\partial\theta$ autour du point C, D s'abaisse d'une quantité Dd égale à CD $\times$ $\partial\theta$, et le couteau E d'une quantité CE $\times$ $\partial\theta$. Le point F s'abaissant d'une quantité Ff égale à Dd ou CD $\times$ $\partial\theta$, il en résulte un déplacement angulaire du fléau autour du point O égale à CD $\times$ $\partial\theta$: OF; donc G s'abaisse d'une quantité Gg, égale à (CD $\times$ $\partial\theta$: OF) $\times$ OG, et le point B s'abaisse aussi d'une quantité égale Bb. Pour réaliser l'horizontalité constante du plateau AB, il suffit que E et B s'abaissent de quantités égales, ou que l'on ait

$$\mathrm{CE} \times \partial\theta = \frac{\mathrm{CD} \cdot \mathrm{OG}}{\mathrm{OF}} \times \partial\theta, \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{CD}} = \frac{\mathrm{OG}}{\mathrm{OF}}.$$

On devra placer le point de suspension G de la tringle GB de manière à vérifier cette condition, que nous supposerons remplie.

Cela admis, appliquons le principe des vitesses virtuelles. Dans un déplacement virtuel le centre de gravité du poids P, *quelle que soit la position de celui-ci sur le plateau*, s'abaissera d'une quantité égale à CE $\times$ $\partial\theta$, et le travail virtuel de la force P sera

$$\mathrm{P} \times \mathrm{CE} \times \partial\theta = \mathrm{P} \times \mathrm{G}g.$$

D'autre part, le travail virtuel du contrepoids Q est $-\mathrm{Q} \times \mathrm{H}h$. Égalant à zéro la somme des travaux virtuels de P et Q, on a

$$\mathrm{P} \times \mathrm{G}g = \mathrm{Q} \times \mathrm{H}h, \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}} = \frac{\mathrm{H}h}{\mathrm{G}g} = \frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OG}}.$$

Le condition d'équilibre est donc la même que si le poids P était directement suspendu au point G du fléau.

Exercices.

1. *Équilibre de la grue.* — Un arbre vertical AD (fig. 87) s'appuyant en A par un pivot, porte deux bras inclinés DE, CE auxquels est suspendu en E un poids P. Une force horizontale Q, agissant en B sur l'arbre, maintient l'équilibre. Déterminer cette force, les efforts longitudinaux T et T' des pièces DE, CE, les réactions du pivot.

R. Soient AB $= a$, DE $= b$, CE $= c$, DC $= d$; α l'inclinaison de DE sur l'horizontale; X et Y les composantes horizontale et verticale de la réaction sur le pivot A. On trouve



Fig. 87.

$$Q = \frac{Pb \cos \alpha}{a}, \quad T = \frac{Pc}{d}, \quad T' = \frac{Pb}{d},$$
$$X = -Q, \quad Y = -P.$$

2. *Pont-levis à flèche.* — Un parallélogramme articulé vertical ABCD a deux sommets A et D fixes, autour desquels le *tablier* AB et la *flèche* CD peuvent tourner librement dans le plan vertical. Le prolongement DE de CD porte en E un contrepoids Q qu'il faut déterminer de façon que le c. de gr. G de tout le système occupe une position invariable sur la droite AD, dans toutes les positions du système.

R. Soient M' la masse, G' le c. de gr. du tablier augmenté de la demi-masse de CB placée en B; M'', G'' la masse et le c. de gr. de la flèche CDE avec le contrepoids et la demi-masse de CB en C. On disposera de Q de façon que, dans une position donnée du système, AG', DG'' soient parallèles, de sens contraire, et que l'on ait

$$AG' : DG'' = M'' : M'.$$

LIVRE TROISIÈME.

DYNAMIQUE.

CHAPITRE XII.

MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL.

§ 1. MOUVEMENT RECTILIGNE D'UN POINT MATÉRIEL LIBRE.

128. La *dynamique* a pour objet l'étude des lois du mouvement, comme la statique celle des lois de l'équilibre. Le problème le plus simple à considérer est celui du mouvement d'un simple point matériel, et quoiqu'il paraisse une pure abstraction sans application possible, nous verrons plus loin qu'il a une grande importance dans l'étude du mouvement des systèmes matériels. Pour simplifier, nous supposons d'abord que le point matériel soit entièrement libre et que son mouvement soit rectiligne

Nous avons établi au chapitre IV (n° **56**) que lorsqu'un point se meut librement, la force qui le sollicite à chaque instant a pour direction celle de l'accélération du point mobile à cet instant et son intensité est mesurée par le produit de la masse du point par l'accélération. Donc, dans le cas que nous considérons, la force est dirigée suivant la droite parcourue par le point. De plus, soient m la masse, v la vitesse et x la distance du mobile à une origine O prise sur la droite OX qu'il parcourt, à l'époque t, v et x étant affectés du signe $+$ ou $-$ suivant le sens dans lequel ces

grandeurs sont dirigées (8). Soit φ l''intensité de la force qui agit sur le point mobile et détermine son mouvement. D'après le théorème rappelé plus haut, nous avons

$$\varphi = m\frac{dv}{dt}.$$

Cette force φ est la force *motrice*; mais dans les questions où il s'agit d'un point matériel unique, la masse m n'intervenant que comme un facteur qui disparaît souvent, il est plus simple d'introduire au lieu de la force motrice, la force appelée *accélératrice*, qui mesure le rapport de la force motrice à la masse du point. Nous la désignerons ici par X, et nous aurons

$$X = \varphi : m = \frac{dv}{dt}.$$

La force accélératrice est donc mesurée par l'accélération et a même signe que cette dernière.

Le problème du mouvement rectiligne consiste dans la recherche des relations entre les variables t, x, v, X, entre lesquelles nous avons toujours deux relations générales

$$(1)\quad v = \frac{dx}{dt}, \qquad (2)\quad X = \frac{dv}{dt}.$$

Pour que l'on puisse déterminer x, v, X en fonction du temps, les conditions particulières de la question devront donc fournir une troisième équation

$$(3)\quad F(t, x, v, X) = 0$$

qui, en général, contiendra les quatre variables.

La relation (2) se met souvent avec avantage sous d'autres formes, telles que

$$(2')\quad X = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad (2'')\quad X = v\frac{dv}{dx},$$

qui résultent de l'élimination soit de dv, soit de dt, entre (1) et (2).

124. Admettons que l'équation (3) soit donnée. Remplaçant v et X par leurs valeurs (1) et (2'), on lui donnera la forme

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}\right) = 0,$$

et x sera lié à t par une équation différentielle du second ordre. L'intégra-

tion fera connaître x en fonction de t avec deux constantes arbitraires (Cours d'An., 416), ce qui doit être : en effet, la position du point mobile au bout d'un temps quelconque ne dépend pas seulement de la force à laquelle il a été soumis pendant ce temps, mais aussi de la position qu'il occupait et de la vitesse qui l'animait au commencement de cet intervalle. Il faut donc, pour achever la détermination du mouvement du point, que l'on donne les valeurs de x et de v à une certaine époque, que nous pourrons toujours prendre pour origine du temps et désigner par $t = 0$. Soient x_0 et $v_0 = \left(\frac{dx}{dt}\right)_0$ ces valeurs données ; nous avons expliqué dans le calcul intégral comment la connaissance de ces quantités permet de déterminer les deux constantes arbitraires de l'intégration.

125. Il est rare que le problème se présente sous cette forme générale ; presque toujours, la relation (3) ne renferme que deux ou trois des variables t, x, v, X, et le problème d'analyse est simplifié. Examinons les cas principaux :

1° Si l'équation (3) est de la forme

$$F(x, t) = 0,$$

on en tire x en fonction du temps ; en différentiant, on a les deux premières dérivées de x par rapport à t, c'est-à-dire v et X : tout est donc connu par de simples différentiations.

2° Supposons la force X exprimée en fonction du temps,

$$X = f(t).$$

On a, par l'équation (2),

$$\frac{dv}{dt} = f(t), \quad v = C + \int f(t)\,dt.$$

La constante C est déterminée par la vitesse initiale v_0 : supposons l'intégrale prise à partir de $t = 0$; posant $t = 0$ dans l'expression de la vitesse, on a

$$v_0 = C, \quad v = v_0 + \int_0^t f(t)\,dt = v_0 + \varphi(t).$$

L'équation (1) donne ensuite

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + \varphi(t), \quad x = C_1 + v_0 t + \int_0^t \varphi(t)\,dt.$$

Soit x_0 la valeur de x pour $t = 0$; $C_1 = x_0$, donc

$$x = x_0 + v_0 t + \int_0^t \varphi(t)\, dt.$$

On a donc x, v, X en fonction de t; le problème est résolu par de simples quadratures.

3° Si l'équation (3) est de la forme $F(x, X) = 0$, ou si l'on donne une relation entre la force et le chemin parcouru, on peut, au moyen de la relation (2'), écrire

$$F\left(x, \frac{d^2x}{dt^2}\right) = 0,$$

et intégrer cette équation du second ordre en déterminant les constantes par les données initiales x_0, v_0; ce procédé est quelquefois le meilleur. On peut aussi procéder comme il suit, par deux intégrations successives. Tirant de l'équation donnée X en fonction de x et appliquant la formule (2''), on obtient une équation de la forme

$$v\frac{dv}{dx} = f(x), \quad \text{ou} \quad 2v\,dv = 2f(x)\,dx, \quad v^2 = C + 2\int f(x)\,dx.$$

On détermine C en substituant, après la quadrature effectuée, à x et à v leurs valeurs initiales. On a ensuite

$$\frac{dx^2}{dt^2} = C + 2\int f(x)\,dx, \quad dt = \pm\frac{dx}{\sqrt{C + 2\int f(x)\,dx}},$$

et une nouvelle quadrature fait connaître t en fonction de x, avec une constante C_1 que l'on détermine en posant $t = 0$, $x = x_0$. Quant au double signe dont la valeur de dt est affectée, il ne doit pas être négligé, puisque c'est du signe de $dx : dt$ que dépend le sens du mouvement; dans chaque cas particulier, il sera déterminé par les données du problème.

4° Supposons enfin une relation $F(v, X) = 0$; on en déduit l'expression de la force X en fonction de la vitesse du point. On a donc

$$X = f(v), \quad \frac{dv}{dt} = f(v), \quad dt = \frac{dv}{f(v)}, \quad t = C + \int\frac{dv}{f(v)},$$

l'intégrale étant toujours supposée prise à partir d'une valeur donnée de v. Posant $t = 0$, $v = v_0$, on détermine C. Tirant de l'équation v en

fonction de t, on a

$$v = \varphi(t), \quad \frac{dx}{dt} = \varphi(t), \quad x = x_0 + \int_0^t \varphi(t)\,dt,$$

et cette nouvelle quadrature achève la solution du problème.

S'il arrive que l'équation en v, t soit difficilement résoluble par rapport à v, on obtiendra une autre relation comme il suit. On a

$$dt = \frac{f(v)}{dv}, \quad vdt = dx = \frac{vdv}{f(v)}, \quad x = x_0 + \int_{v_0}^{v} \frac{vdv}{f(v)},$$

et la quadrature étant faite, donnera une relation entre x et v; si l'on sait éliminer v entre cette équation et la valeur de t ci-dessus, on aura entre x et t l'équation demandée.

En résumé, dans les cas examinés, la solution du problème dépend de simples quadratures.

Remarque. — La question du mouvement rectiligne se ramenant à l'intégration d'une équation du second ordre, et l'intégrale devant renfermer deux constantes arbitraires pour que l'on puisse satisfaire aux conditions initiales du mouvement, c'est bien l'intégrale générale que l'on doit rechercher et qui fournit généralement la solution cherchée. Il peut arriver toutefois, dans des cas exceptionnels, que l'équation admette une solution singulière, que le point mobile atteigne certaines positions d'équilibre avec une vitesse nulle, et qu'à partir de cet instant toutes les conditions du mouvement soient vérifiées aussi bien par la solution singulière que par l'intégrale particulière(1). Poisson a même donné un exemple du cas où c'est la première qu'il faut adopter.

126. *Applications.* — I. *Un point matériel* M *est sollicité vers un centre fixe* O *par une force proportionnelle à sa distance* x *à ce centre; à l'époque* $t = 0$, *il est posé sans vitesse à une distance* $OA = a$ *du centre d'action. Déterminer son mouvement.*

La vitesse initiale est nulle et la force constamment dirigée vers un même point O; le mouvement sera rectiligne sur la droite OA : prenons cette droite pour axe des x positifs. La force accélératrice X étant dirigée

(1) M. Boussinesq a particulièrement développé cette remarque en y rattachant d'ingénieuses théories (*Conciliation du variable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale.* — 1878).

vers l'origine O et, par suite, de signe contraire à x, on a, μ^2 étant une constante positive,

$$X = -\mu^2 x.$$

L'équation du mouvement sera donc, d'après (2'),

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu^2 x = 0,$$

équation linéaire à coefficients constants dont l'intégrale générale est (COURS D'AN., **425**).

$$x = A \cos \mu t + B \sin \mu t,$$

A, B étant des constantes à déterminer par l'état initial. On tire de là

$$v = -A\mu \sin \mu t + B\mu \cos \mu t,$$

d'où, faisant $t = 0$, $x = a$, $v = 0$,

$$A = a, \quad B = 0,$$

et par conséquent la solution du problème est donnée par les formules

$$(\alpha) \quad x = a \cos \mu t, \qquad (\beta) \quad v = -a\mu \sin \mu t.$$

La discussion de ces formules fait connaître toutes les circonstances du mouvement. Depuis l'époque $t = 0$ jusqu'à $t = \pi : 2\mu$, x est positif et décroît jusqu'à zéro, v est négatif et décroît jusqu'à $-a\mu$: le point mobile atteint donc le centre d'action avec une vitesse maxima, dirigée dans le sens AO, puis il dépasse le point O. De $t = \pi : 2\mu$ à $t = \pi : \mu$ x varie de zéro à $-a$, v de $-a\mu$ à zéro; le point s'éloigne du centre du côté opposé à OA avec une vitesse décroissante, qui devient nulle quand le mobile est en A', à une distance OA' = OA. Le point se trouve alors dans les conditions semblables à celles où il était à l'origine du temps, en sorte que le mouvement recommencera en sens inverse suivant les mêmes lois, jusqu'à ce que le mobile atteigne, à l'époque $t = 2\pi : \mu$, sa position initiale A avec une vitesse nulle; et ainsi de suite. Le mouvement du point est donc *oscillatoire* et *périodique;* la position et la vitesse redeviennent les mêmes après des intervalles de temps égaux à $2\pi : \mu$, ce que les formules (α) et (β) manifestent d'ailleurs immédiatement.

L'expérience prouve que, dans les corps élastiques, une molécule écartée de sa position d'équilibre y est ramenée par une force propor-

tionnelle à la distance qui l'en sépare. Les lois du mouvement étudié ci-dessus s'appliquent donc sensiblement aux oscillations de la molécule autour de sa position d'équilibre.

127. — II. *Un point matériel sollicité par une force constante, éprouve de la part du milieu environnant une résistance directement opposée à la vitesse qui l'anime et proportionnelle au carré de cette vitesse. Trouver le mouvement du point, sa vitesse initiale étant nulle.*

Soient O la position initiale, prise pour origine; OX la direction de la force constante, prise pour axe des x positifs; g l'accélération correspondante. La résistance du milieu étant opposée à la vitesse, il suit du principe de l'indépendance des mouvements que le mobile aura un mouvement rectiligne suivant la droite OX, et la force accélératrice due à la résistance du milieu pourra se représenter par une expression de la forme $-\frac{gv^2}{k^2}$, k étant constant. La relation (3) deviendra donc, ici,

$$X = g - \frac{gv^2}{k^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{g}{k^2}(k^2 - v^2).$$

De là

$$gdt = \frac{k^2dv}{k^2 - v^2}, \quad gt + C = \frac{k}{2}\,\mathrm{l.}\frac{k+v}{k-v}.$$

Pour $t = 0$, on doit avoir $v = 0$, donc $C = 0$, donc

$$\mathrm{l.}\frac{k+v}{k-v} = \frac{2gt}{k},$$

d'où l'on tire, en posant $g = k\varepsilon$,

$$v = k\frac{e^{2\varepsilon t} - 1}{e^{2\varepsilon t} + 1} = k\frac{e^{\varepsilon t} - e^{-\varepsilon t}}{e^{\varepsilon t} + e^{-\varepsilon t}}.$$

Remplaçant v par sa valeur $\frac{dx}{dt}$, et intégrant de nouveau, on trouvera

$$x = C_1 + \frac{k}{\varepsilon}\,\mathrm{l.}(e^{\varepsilon t} + e^{-\varepsilon t}).$$

Comme $t = 0$ doit donner $x = 0$, on a $C_1 = -\frac{k}{\varepsilon}\,\mathrm{l.}\,2$, et par suite

$$x = \frac{k}{\varepsilon}\,\mathrm{l.}\frac{e^{\varepsilon t} + e^{-\varepsilon t}}{2}.$$

Le problème est résolu. On peut mettre v et x sous la forme

$$v = k\frac{1 - e^{-2\varepsilon t}}{1 + e^{-2\varepsilon t}}, \quad x = kt + \frac{k}{\varepsilon}\,\mathrm{l}.\,\frac{1 + e^{-2\varepsilon t}}{2}.$$

On voit alors, $e^{-2\varepsilon t}$ tendant vers zéro lorsque t croît indéfiniment, que la vitesse v s'approche d'une limite égale à la constante k, et que l'espace parcouru x croît indéfiniment, mais en différant de moins en moins de la valeur

$$kt - \frac{k}{\varepsilon}\,\mathrm{l}.\,2.$$

Le mouvement tend donc à devenir uniforme; la vitesse limite k est précisément celle pour laquelle la résistance du milieu serait égale à la force motrice.

On trouve facilement les valeurs de X en fonction de t et de x, savoir

$$X = 4g\,(e^{\varepsilon t} + e^{-\varepsilon t})^{-2}, \quad X = ge^{-\frac{2\varepsilon x}{k}}.$$

128. III. *Les données étant les mêmes qu'au problème II, on suppose seulement que la vitesse initiale, au lieu d'être nulle, soit dirigée en sens contraire de la force et égale à* $-\alpha$.

On a donc, pour $t = 0$, $x_0 = 0$, $v_0 = -\alpha$. Comme la résistance du milieu est toujours en sens contraire de la vitesse, elle sera ici *positive* aussi longtemps que la vitesse restera négative. Nous aurons donc d'abord

$$X = g + \frac{gv^2}{k^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{g}{k^2}(k^2 + v^2), \quad gdt = \frac{k^2 dv}{k^2 + v^2},$$

et en intégrant, puis déterminant la constante,

$$gt + C = k \operatorname{arc\,tg}\frac{v}{k}, \quad C = -k \operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha}{k},$$

d'où

$$gt = k\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{v}{k} + \operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha}{k}\right) = k \operatorname{arc\,tg}\frac{k(v+\alpha)}{k^2 - \alpha v}.$$

Nous tirons de là, en résolvant par rapport à v et introduisant de nouveau la constante ε,

$$v = k\frac{k \operatorname{tg} \varepsilon t - \alpha}{k + \alpha \operatorname{tg} \varepsilon t}, \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{dt} = k\frac{k \sin \varepsilon t - \alpha \cos \varepsilon t}{k \cos \varepsilon t + \alpha \sin \varepsilon t}.$$

Multiplions par dt et intégrons :

$$x = C_1 - \frac{k}{\varepsilon} \mathrm{l.}\,(k \cos \varepsilon t + \alpha \sin \varepsilon t),$$

et à cause de $x_0 = 0$, $C_1 = \frac{k}{\varepsilon} \mathrm{l.}\, k$,

$$x = \frac{k}{\varepsilon} \mathrm{l.} \frac{k}{k \cos \varepsilon t + \alpha \sin \varepsilon t}.$$

Ces formules ne s'étendent pas à une durée indéfinie, mais seulement jusqu'à l'époque t_1 où la vitesse devient nulle, époque assignée par l'équation

$$k \operatorname{tg} \varepsilon t_1 - \alpha = 0 \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg} \varepsilon t_1 = \frac{\alpha}{k},$$

dans laquelle on prendra pour t_1 la plus petite racine. A cet instant, la position du mobile est donnée par la formule

$$x_1 = \frac{k}{\varepsilon} \mathrm{l.} \frac{k}{k \cos \varepsilon t_1 + \alpha \sin \varepsilon t_1} = \frac{k}{\varepsilon} \mathrm{l.} \frac{k}{\sqrt{k^2 + \alpha^2}}.$$

A partir de cette époque t_1, la vitesse étant nulle et la force accélératrice g dirigée dans le sens des x positifs, le mobile se trouve exactement dans les conditions du problème II, et son mouvement sera déterminé par les lois que nous avons trouvées dans ce cas. Si l'on cherche l'époque t' à laquelle le mobile repassera par sa position initiale O et la vitesse qu'il aura, on trouve

$$t' = t_1 + \frac{1}{\varepsilon} \mathrm{l.} \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + k^2}}{k}, \qquad v = \frac{k\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + k^2}}.$$

Exercices.

1. Un point abandonné sans vitesse à l'action de la pesanteur, et un autre point pesant lancé verticalement de bas en haut avec une vitesse α, partent simultanément de deux points donnés A et B sur une même verticale. Déterminer l'époque de leur rencontre et le point C où elle a lieu.

R. Soient a la distance AB, x la distance AC ; on a

$$t = \frac{a}{\alpha}, \qquad x = \frac{ga^2}{2\alpha^2}.$$

2. Le mouvement rectiligne d'un point matériel est produit par le poids d'une

sphère homogène, mais volatile, dont l'évaporation à chaque instant est proportionnelle à la surface de la sphère. Quel est le mouvement de ce point?

R. On voit sans peine que, r étant le rayon de la sphère, $dr : dt$ sera une constante $-a$; si r_0 est la valeur de r pour $t=0$, on a donc $r = r_0 - at$, et en désignant par μ une autre constante, on trouvera

$$v = \frac{\mu}{4a}[r_0^4 - (r_0 - at)^4], \quad x = \frac{\mu}{20a^2}[(r_0 - at)^5 - r_0^5 + 5ar_0^4 t],$$

x et v étant supposés nuls avec t.

3. Un point matériel est attiré vers un centre fixe O par une force en raison inverse du cube de sa distance à ce centre; sa distance initiale $OA = a$, sa vitesse initiale est nulle. Déterminer son mouvement et le temps T qu'il met à arriver en O.

R. On a

$$X = -\frac{k^2}{x^3}, \quad v^2 = k^2\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2}\right), \quad x = \sqrt{a^2 - \frac{k^2t^2}{a^2}}, \quad T = \frac{a^2}{k}.$$

La vitesse est infinie à l'arrivée.

4. Quelle vitesse v_0 faut-il imprimer à un point matériel, de la surface de la lune vers le centre de la terre, pour qu'il atteigne sans vitesse le point où les attractions des deux astres se font équilibre? — On suppose 1° que l'attraction a lieu suivant la loi de Newton, et que chacun des deux astres agit comme si sa masse était réunie à son centre; 2° que la masse de la lune est 1 : 81 de celle de la terre, son rayon les 3 : 11 du rayon terrestre, dont la valeur en mètres est 20,000,000 : π; enfin, que la distance des centres des deux astres vaut 60 fois le rayon terrestre, et que l'attraction à la surface de la terre est égale à 9,809.

R. $$v_0 = 2275^{\text{m}}.$$

5. Un point matériel se meut dans une sphère gazeuse dont la densité décroît uniformément du centre à la surface. L'attraction d'un élément gazeux sur le point mobile est proportionelle à la masse et en raison inverse du carré de la distance, mais la résistance du milieu est proportionnelle à sa densité et au carré de la vitesse du point. La vitesse initiale est nulle. Quelle est l'expression de la vitesse du point en fonction de sa distance x au centre O de la sphère? — On suppose connue cette loi : l'attraction d'une couche sphérique homogène et infiniment mince est nulle sur un point intérieur et sur un point extérieur elle est la même que si toute la masse de la couche était réunie à son centre.

R. Soient ρ_0 la densité au centre O, ρ la densité à une distance x de ce point, a une constante. On a

$$\rho = \rho_0 - ax.$$

Soient ensuite μ, μ' des coefficients constants; on trouve pour la force motrice et la résistance du milieu les expressions

$$\mu\left(ax - \frac{4}{3}\rho_0\right)x, \quad \mu'(\rho_0 - ax)v^2,$$

et l'on a enfin

$$v^2 = 2\mu e^{\mu'(2\rho_0 - ax)x}\int_{x_0}^{x} e^{-\mu'(2\rho_0 - ax)x}\left(ax - \frac{4}{3}\rho_0\right) x\,dx,$$

x_0 étant la distance initiale du mobile au point O.

6. Un point matériel est attiré vers un centre O par une force proportionnelle à sa distance x à ce centre; la résistance du milieu est proportionnelle à la simple vitesse. La vitesse initiale est nulle, la distance initiale OA $= a$; trouver le mouvement du point et discuter les formules.

R. La droite OA étant prise pour axe des x positifs, soient k, k' des constantes positives. On aura

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k'\frac{dx}{dt} + kx = 0.$$

Intégrant, on distinguera deux cas : 1° $k'^2 - 4k = \alpha^2 > 0$; posant

$$r_1 = \frac{-k' + \alpha}{2}, \quad r_2 = -\frac{k' + \alpha}{2},$$

et déterminant les constantes de l'intégrale par les conditions $t = 0$, $x = a$, $v = 0$, on obtiendra

$$x = \frac{a}{\alpha} e^{-\frac{k'}{2}t}\left[r_1 e^{-\frac{\alpha t}{2}} - r_2 e^{\frac{\alpha t}{2}}\right], \quad v = \frac{a r_1 r_2}{\alpha} e^{-\frac{k'}{2}t}\left[e^{-\frac{\alpha t}{2}} - e^{-\frac{\alpha t}{2}}\right].$$

Le point se rapproche indéfiniment du centre d'action sans jamais l'atteindre.

2° $k'^2 - 4k = -\alpha^2 < 0$. Opérant comme ci-dessus, on a

$$x = ae^{-\frac{k't}{2}}\left(\cos\frac{\alpha t}{2} + \frac{k'}{\alpha}\sin\frac{\alpha t}{2}\right), \quad v = -\frac{\alpha^2 + k'^2}{2\alpha} a e^{-\frac{k't}{2}} \sin \alpha t.$$

Le mouvement est oscillatoire de part et d'autre du centre O, mais l'amplitude des oscillations décroît constamment et a pour limite zéro. La durée d'une demi-oscillation (de $v = 0$ à $v = 0$) est $\frac{2\pi}{\alpha}$: elle est constante. Aux époques $t = 0, \frac{2\pi}{\alpha}, \frac{4\pi}{\alpha}, \ldots$ correspondent les distances $x = a$, $x = ae^{-\frac{k'\pi}{\alpha}}$, $x = ae^{-\frac{2k'\pi}{\alpha}}$, ... Les valeurs de t qui répondent au passage du point mobile par le centre O sont les racines de l'équation

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha t}{2} = -\frac{\alpha}{k'}.$$

7. Mouvement rectiligne d'un point pesant dans un milieu résistant, la résistance étant donnée par une expression de la forme $Av + Bv^2$.

R. 1er *Cas :* Vitesse initiale nulle. Posant

$$Bv^2 + Av - g = B(v - \alpha)(v + \beta), \quad \alpha \text{ et } \beta > 0, \quad B(\alpha + \beta) = \gamma,$$

on trouve

$$v = \alpha\left(1 - \frac{\alpha + \beta}{\alpha + \beta e^{\gamma t}}\right), \quad x = \alpha t + \frac{\alpha + \beta}{\gamma}\,\mathrm{l.}\,\frac{\beta + \alpha e^{-\gamma t}}{\alpha + \beta}.$$

ou, éliminant B et β,

$$v = \alpha\left(1 - \frac{\alpha\gamma}{\alpha\gamma - g + g e^{\gamma t}}\right), \quad x = \alpha\left[t + \frac{\alpha}{\alpha\gamma - g}\,\mathrm{l.}\,\frac{g + (\alpha\gamma - g)\,e^{-\gamma t}}{\alpha\gamma}\right].$$

2° *Cas :* Vitesse initiale verticale de bas en haut v_0; l'axe des x positifs vers le haut.

1) $$g - \frac{A}{4B} = B\varepsilon^2 > 0, \quad v' = v + \frac{A}{2B}.$$

$$v = \varepsilon\,\frac{v'_0 - \varepsilon \operatorname{tg} B\varepsilon t}{v'_0 \operatorname{tg} B\varepsilon t + \varepsilon} - \frac{A}{2B}, \quad x = \frac{1}{B}\,\mathrm{l.}\left(\frac{v'_0}{\varepsilon}\sin B\varepsilon t + \cos B\varepsilon t\right) - \frac{At}{2B}.$$

Durée t' de la montée et hauteur atteinte x' :

$$t' = \frac{1}{B\varepsilon}\operatorname{arc\,tg}\frac{2B\varepsilon v_0}{2g + Av_0}, \quad x' = \frac{1}{2B}\,\mathrm{l.}\,\frac{g + Av_0 + Bv_0^2}{g} - \frac{A}{2B^2\varepsilon}\operatorname{arc\,tg}\frac{2B\varepsilon v_0}{2g + Av_0}.$$

2) $$g - \frac{A^2}{4B} = 0; \quad \text{posant} \quad A = \frac{2g}{a}, \quad B = \frac{g}{a^2}, \quad \lambda = \frac{(v_0 + a)\,g}{a^2},$$

on trouve

$$v = \frac{v_0 + a}{1 + \lambda t} - a, \quad x = \frac{a^2}{g}\,\mathrm{l.}\,(1 + \lambda t) - at, \quad t' = \frac{v_0}{a\lambda},$$

$$x' = \frac{a^2}{g}\,\mathrm{l.}\left(1 + \frac{v_0}{a}\right) - \frac{v_0}{\lambda}.$$

3) $$g - \frac{A^2}{4B} = -B\varepsilon^2 < 0; \quad \text{posant} \quad \frac{v'_0 + \varepsilon}{v'_0 - \varepsilon} = k,$$

on a

$$v = \varepsilon\,\frac{k e^{2B\varepsilon t} + 1}{k e^{2B\varepsilon t} - 1} - \frac{A}{2B}, \quad x = \frac{1}{B}\,\mathrm{l.}\,\frac{k e^{B\varepsilon t} - e^{-B\varepsilon t}}{k - 1} - \frac{At}{2B},$$

$$t' = \frac{1}{2B\varepsilon}\,\mathrm{l.}\,\frac{A + 2B\varepsilon}{k\,(A - 2B\varepsilon)}, \quad x' = \frac{1}{B}\,\mathrm{l.}\left(\frac{2\varepsilon}{k - 1}\sqrt{\frac{Bk}{g}}\right) - \frac{A}{4B^2\varepsilon}\,\mathrm{l.}\,\frac{(A + 2B\varepsilon)^2}{4Bgk}.$$

§ 2. MOUVEMENT CURVILIGNE D'UN POINT LIBRE, THÉORÈMES DES AIRES ET DE LA FORCE VIVE.

129. D'après ce que nous avons établi au n° 56, si l'on désigne par m la masse, par x, y, z les coordonnées d'un point mobile libre, et par X, Y, Z les composantes de la force P qui le solicite à un instant quelconque, on a entre ces quantités les relations

(1) $$X = m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y = m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad Z = m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Telles sont les équations du mouvement curviligne d'un point libre. Si le mouvement est donné, x, y, z sont des fonctions connues du temps; de simples différentiations feront connaître v_x, v_y, v_z, et par suite la vitesse en grandeur et en direction pour un instant quelconque. Différentiant de nouveau pour trouver les dérivées secondes de x, y, z par rapport au temps et faisant usage des équations (1), on déterminera X, Y, Z, et l'on aura la force motrice en grandeur et en direction. Le problème est donc fort simple.

Mais, en général, la force motrice est donnée en fonction du temps, de la vitesse et de la position du mobile, et il s'agit de déterminer le mouvement du point. Supposons donc que X, Y, Z soient des fonctions connues de t, x, y, z, v_x, v_y, v_z, et substituons leurs valeurs dans les équations (1), qui prendrons la forme

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= f\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right),\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= f_1(t, x, \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot),\\ \frac{d^2z}{dt^2} &= f_2(t, x, \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot). \end{aligned}\right.$$

Le problème est ramené à l'intégration d'un système de trois équations différentielles simultanées du second ordre, entre x, y, z et la variable indépendante t. On sait (Cours d'An., **442**) que les intégrales de ce système renferment *six* constantes arbitraires, en sorte que

$$x = \varphi(t, C_1, C_2, C_3, C', C'', C'''),\quad y = \varphi_1(t, C_1, \ldots),\quad z = \varphi_2(t, C_1 \ldots),$$

et l'on sait déterminer ces constantes connaissant les valeurs de x, y, z et de leurs premières dérivées pour une valeur donnée t_0 de la variable t. Admettons, en effet, que l'on connaisse pour un instant déterminé, choisi d'ordinaire comme origine du temps ($t = 0$), la position et la vitesse du point, ou ses coordonnées x_0, y_0, z_0 et les composant v_{0x}, v_{0y} v_{0z} de sa vitesse : ce sont les *données initiales*. Si dans les intégrales ci-dessus on pose $t = 0$, et que l'on fasse en conséquence $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, on aura trois équations entre les six constantes seulement. Différentiant ces mêmes intégrales par rapport à t, on a déduit v_x, v_y, v_z, et en posant encore $t = 0$, remplaçant $v_x, \ldots$ par leurs valeurs initiales, on aura trois nouvelles égalités entre les mêmes constantes. Ces six équations suffiront pour déterminer les six constantes C_1, $C_2, \ldots$ et

achever la solution du problème. L'élimination de t entre les équations qui expriment x, y, z en fonction du temps conduira aux équations de la trajectoire (**10**).

Les observations du n° **135**, concernant les solutions singulières, s'étendent aux équations différentielles du mouvement curviligne.

Souvent des considérations particulières montrent que le mouvement doit se faire dans un plan. On choisit ce plan pour plan XY; on a $z=0$, les équations différentielles se réduisent à deux entre x, y, t, et le nombre des constantes à quatre; les calculs sont ainsi simplifiés.

140. Dans certains cas il est avantageux d'introduire, au lieu des composantes de la force P parallèlement à trois axes rectangulaires, ses composantes suivant la tangente MT et la normale principale MN à la trajectoire du mobile. La force P étant représentée, en grandeur et en direction, par l'accélération du point multipliée par sa masse (**56**), et les composantes tangentielle et normale de l'accélération étant, comme on l'a vu au n° **37**,

$$j_t = \frac{dv}{dt}, \qquad j_n = \frac{v^2}{R},$$

les composantes cherchées ont pour expressions

$$\text{(3)} \qquad P\cos\overline{Pv} = m\frac{dv}{dt}, \quad P\cos\overline{PN} = \frac{mv^2}{R}.$$

Dans tous les cas que nous offre la nature, la force P qui fait mouvoir un point M émane d'un autre point ou corps M′, et, en vertu de la loi connue (**58**), le point M réagit sur M′ en exerçant une réaction égale et directement opposée à la force P. Cette réaction, que l'on nomme souvent *force d'inertie*, a donc pour composantes parallèles aux axes OX, OY, OZ,

$$-m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad -m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad -m\frac{d^2z}{dt^2},$$

et pour composantes parallèles à MT, MN,

$$m\frac{dv}{dt}, \quad m\frac{v^2}{R},$$

ces dernières composantes étant d'ailleurs dirigées en sens contraire de celles de la force P. C'est à cette composante $mv^2 : R$ de la réaction que l'on donne ordinairement le nom de *force centrifuge*, et par une

erreur qui peut entraîner des conséquences graves, on raisonne parfois comme si elle était appliquée au point mobile M lui-même et influait sur son mouvement, tandis qu'en réalité elle émane de ce point et s'exerce exclusivement sur le corps M' à l'action duquel on attribue le mouvement de M. Ce qui fait illusion à cet égard, c'est que dans les cas où l'on a l'occasion de considérer cette force centrifuge, comme quand le mobile M est retenu sur un cercle par un fil attaché en un point fixe O, les points matériels qui agissent immédiatement sur le mobile M sont en contact avec lui, et le point d'application de la réaction centrifuge est presque confondu avec celui de la force motrice. Ainsi, dans l'exemple cité, la force qui détermine le mouvement du point est la tension du fil, dirigée suivant MO; la réaction du point M est appliquée à l'extrémité du fil et agit pour le détacher du point O ou pour le rompre : c'est là la force centrifuge. Il semble donc alors qu'une force appliquée au point M tire le fil suivant sa longueur dans le sens OM, et par suite de cette illusion on transporte au mobile M une force qui n'a de réalité que sur le fil même.

141. *Théorème des aires.* — Au lieu d'appliquer directement à chaque cas particulier les équations différentielles (1), il y a grand avantage dans bien des cas à employer les intégrales premières que fournissent certains théorèmes généraux, conséquences des équations (1), et qui constituent par eux-mêmes des propriétés remarquables du mouvement d'un point. Ce sont ces théorèmes que nous allons d'abord établir.

Multipliant les deux premières équations (1) respectivement par y, x, et retranchant, on a

$$m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)=x\mathrm{Y}-y\mathrm{X}.$$

Le premier membre est la dérivée par rapport à t de $x\dfrac{dy}{dt}-y\dfrac{dx}{dt}$;

donc, en intégrant, on a

$$m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=\text{const.}+\int(x\mathrm{Y}-y\mathrm{X})\,dt.$$

On nomme *quantité de mouvement* d'un point M à un instant donné le produit mv de sa masse par sa vitesse à cet instant; on la représente par une droite MV proportionnelle à mv et coïncidant en direction avec

la vitesse. Ses composantes parallèles aux axes sont donc mv_x, mv_y, mv_z, en sorte que l'expression

$$m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=x\cdot mv_y-y\cdot mv_x$$

représente le moment de la quantité de mouvement du point M par rapport à l'axe des z (72).

Si le moment de la force motrice P par rapport à l'axe OZ est nul à chaque instant, ce qui a lieu lorsque la direction de P rencontre constamment OZ ou lui est parallèle, $x\text{Y}-y\text{X}$ est nul et l'intégrale $\int(x\text{Y}-y\text{X})\,dt$ s'évanouit. Le second membre de l'équation ci-dessus se réduit donc à une constante, et l'on a ce théorème :

Lorsque la direction de la force appliquée à un point mobile rencontre constamment une droite fixe, le moment de la quantité de mouvement du point par rapport à cette droite a une valeur constante.

L'équation

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=\text{C}=x_0v_{0y}-y_0v_{0x}$$

constitue alors une intégrale première des équations différentielles du mouvement du point, et il est naturel de l'employer au lieu de ces équations mêmes.

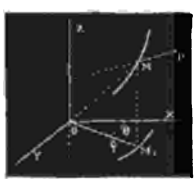


Fig. 88.

142. Cette intégrale est susceptible d'une interprétation géométrique remarquable. Soient M_1 (fig. 88) la projection du point M sur le plan XY; ρ, θ les coordonnées polaires de M_1, de sorte que

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta,\quad \text{tg}\,\theta=y:x.$$

Cette dernière équation différentiée donne

$$\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\frac{xdy-ydx}{x^2}=\frac{xdy-ydx}{\rho^2\cos^2\theta},$$

d'où

$$\rho^2d\theta=xdy-ydx.$$

Or, nous savons (Cours d'An., 338) que $\frac{1}{2}\rho^2d\theta$ est la différentielle de l'aire S décrite dans le plan XY par le rayon vecteur ρ du point M_1, en sorte que

$$\rho^2d\theta=2\,d\text{S}.$$

Seulement, pour que cette égalité subsiste toujours en valeur et en signe, il faut convenir que dS sera toujours de même signe que $d\theta$, c'est-à-dire regarder comme positives les aires décrites d'un mouvement *direct*, de OX vers OY, et comme négatives les aires décrites d'un mouvement *rétrograde*, de OY vers OX. Cette règle admise, nous aurons

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = 2\frac{dS}{dt},$$

et l'intégrale trouvée plus haut pourra s'écrire

$$\frac{dS}{dt} = \frac{C}{2}, \quad \text{ou} \quad dS = \frac{C}{2}dt.$$

Intégrant de nouveau, et supposant pour plus de simplicité que l'aire S soit comptée à partir de la position initiale du rayon vecteur ρ, en sorte que S et t s'annulent ensemble, on trouvera

$$S = \frac{C}{2}t.$$

Donc, *quand la direction de la force motrice rencontre constamment un axe fixe ou lui est parallèle, le rayon vecteur mené d'un point* O *de cet axe au point mobile, projeté sur un plan normal à l'axe, décrit dans ce plan des aires proportionnelles aux temps.*

Supposons maintenant que la direction de la force P qui agit sur un point M passe constamment par un point fixe O, et prenons O pour origine des coordonnées. Le théorème précédent s'appliquant ici à chacun des axes OX, OY, OZ, nous aurons les trois intégrales

$$(4) \qquad y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = A, \quad z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} = B, \quad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C,$$

A, B, C étant des constantes qui se déterminent immédiatement par les données initiales. Multiplions par x, y, z, respectivement ces équations et ajoutons-les; il viendra

$$Ax + By + Cz = 0,$$

équation qui représente un plan fixe passant par l'origine des coordonnées. Le point (x, y, z) restant dans ce plan, la trajectoire est plane.

Il est permis de prendre ce plan de la trajectoire pour plan XY; le point M coïncide alors avec sa projection M_1 sur ce plan, le rayon ρ n'est autre que le rayon vecteur r du point mobile lui-même. L'application du

théorème trouvé plus haut conduit donc à l'équation $r^2 d\theta = kdt$, k étant constant, et à cette propriété du mouvement produit par une force centrale :

Quand la force qui sollicite un point matériel libre passe constamment par un centre fixe, la trajectoire est une courbe plane dont le plan passe par ce centre, et le rayon vecteur mené du centre au point mobile décrit, dans ce plan, des aires proportionnelles aux temps.

Cette propriété constitue le *théorème des aires*. Réciproquement, si le rayon vecteur mené d'un point fixe O à un point libre M décrit une aire plane qui varie proportionnellement au temps, la même propriété appartiendra aux aires décrites par les projections du rayon vecteur OM sur trois plans rectangulaires passant par O. Les dérivées de ces aires par rapport au temps seront constantes, et par conséquent, en vertu de la relation établie plus haut, les équations (4) auront lieu. On en déduira en différentiant

$$y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad \text{ou} \quad yZ - zY = 0,$$

et deux autres équations semblables; d'où

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z},$$

ce qui montre que la direction de la force se confond avec celle du rayon vecteur, et passe conséquemment par le point O.

Le double du secteur élémentaire décrit dans le temps dt, qui a pour expression $r^2 d\theta$, s'exprime aussi par pds, p étant la perpendiculaire abaissée du point O sur la tangente, et l'équation $r^2 d\theta = kdt$ entraîne celle-ci : $pv = k$, *la vitesse est en raison inverse de la distance du centre O à la tangente.*

143. *Théorème de la force vive.* — Reprenons l'expression de la composante tangentielle de la force motrice

$$P \cos \overline{Pv} = m\frac{dv}{dt}.$$

Multipliant par vdt les deux membres de cette équation et observant que $vdt = ds$, on aura

$$mvdv = Pds \cos \overline{Pv}, \quad \text{ou} \quad (5)\ d.\frac{mv^2}{2} = Pds \cos \overline{Pv}.$$

Intégrons entre deux valeurs t_0 et t du temps, et désignons par v_0 la valeur de v pour $t = t_0$; il viendra

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{t_0}^{t} \mathrm{P}ds \cos \overline{\mathrm{P}v}. \tag{6}$$

Cette équation exprime le *théorème de la force vive*. Pour l'énoncer, disons 1° que la *force vive* d'un point matériel en mouvement, à un instant donné, est le produit de sa masse par le carré de sa vitesse à cet instant; 2° que le *travail élémentaire* d'une force appliquée à un point mobile est le produit de cette force projetée sur la direction de la vitesse, par l'élément ds de la trajectoire que le mobile décrit à l'instant considéré; ce travail élémentaire $\mathrm{P}ds \cos \overline{\mathrm{P}v}$ est *positif* ou *négatif* selon que la direction de la force fait un angle aigu ou obtus avec celle de la vitesse; 3° enfin, que le *travail total* de la force P pendant un intervalle de temps donné, $t - t_0$, est l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t} \mathrm{P}ds \cos \overline{\mathrm{P}v},$$

ou la somme des travaux élémentaires de la force P pendant cet intervalle de temps. En vertu de ces définitions, les équations (5) et (6) fournissent les théorèmes suivants :

L'accroissement de la demi-force vive d'un point libre, pendant un temps infiniment petit, est égal au travail élémentaire de la force motrice.

L'accroissement de la demi-force vive d'un point libre pendant un temps fini quelconque est égal au travail total de la force motrice pendant ce même temps.

144. Si l'on compare l'expression du travail élémentaire d'une force avec celle de son travail virtuel, donnée dans la statique, on voit immédiatement qu'elle n'en diffère que parce que la vitesse virtuelle δs du point d'application y est remplacée par l'arc élémentaire ds correspondant à un déplacement réellement effecté. On démontrera donc sans difficulté, par les mêmes raisons que dans le cas du travail virtuel (**64**), 1° que le travail élémentaire d'une force P dont les composantes sont X, Y, Z, s'exprime par la formule

$$\mathrm{P}ds \cos \overline{\mathrm{P}v} = \mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz;$$

2° *Que le travail élémentaire de la résultante de plusieurs forces appliquées à un même point est égal à la somme algébrique des travaux*

élémentaires de ces forces; et que la même relation a lieu pour le travail total effectué pendant un temps quelconque.

De là résultent ces conséquences importantes : 1° Le théorème de la force vive peut s'énoncer ainsi : *Lorsqu'un point matériel libre se meut sous l'action de plusieurs forces, la variation de la demi-force vive du mobile pendant un intervalle de temps fini ou infiniment petit égale la somme des travaux des forces appliquées au point pendant le même intervalle de temps.*

Ce théorème est exprimé par les formules

$$(7) \qquad d.\frac{mv^2}{2} = \Sigma\,(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz),$$

$$(8) \qquad \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \Sigma \int_{t_0}^{t} (\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz),$$

X, Y, Z étant les composantes rectangulaires de l'une quelconque des forces appliquées au point mobile, et Σ une somme qui s'étend à toutes les forces.

2° Admettons que, parmi les forces qui sollicitent le mobile, il y en ait une, P_1, qui soit constamment normale à la trajectoire de ce point. On aura $\cos \overline{P_1 v} = 0$; donc, le travail élémentaire et le travail total de cette force P_1 seront nuls à toute époque. Les termes correspondant à la force P_1 dans les équations (7) et (8) disparaîtront donc, et ces équations auront lieu absolument comme si cette force n'existait pas; c'est-à-dire que la variation de la demi-force vive du mobile sera égale à la somme des travaux de toutes les autres forces qui agissent sur le point.

Cela s'applique notamment au cas où le point M est obligé à parcourir une surface ou une courbe qui n'exerce d'ailleurs aucun frottement; car, dans ce cas, on peut regarder le point comme libre en joignant aux forces motrices qui le sollicitent la réaction de la surface ou de la courbe sur laquelle il se meut. Cette réaction étant normale à la surface ou à la courbe (puisqu'on suppose qu'il n'y ait pas de frottement) est par cela même constamment normale à la trajectoire du point. Donc, *lorsqu'un point matériel soumis à l'action de forces données, est assujetti à rester sur une surface ou sur une courbe sans frottement, la variation de la demi-force vive du point pendant un temps quelconque est encore égale à la somme des travaux des forces motrices pendant le même temps, comme si le point était libre.*

145. Après avoir établi le théorème de la force vive dans le mouvement d'un point matériel, il est bon de justifier en quelques mots les dénominations adoptées. L'expression de *force vive* a été introduite par Leibnitz dans une discussion sur la mesure des forces en mouvement, discussion sans intérêt aujourd'hui(1). Le mot seul est resté, et n'est pas très heureux. Quant au terme de *travail*, il doit son origine à la manière dont on apprécie, dans l'industrie, l'effet développé par les forces. Dans ce genre de questions, une force est ordinairement employée à vaincre une résistance et à déplacer son point d'application dans le sens opposé à celui où cette résistance agit; la valeur marchande du travail accompli dépend à la fois de l'intensité de la résistance vaincue et du chemin que la force motrice a fait parcourir à son point d'application. Par exemple, si une force est employée à élever une masse de charbon d'un poids P, il est clair qu'il y aura la même dépense faite, le même travail produit, si l'on élève ce poids à une hauteur $2h$, ou si l'on élève le poids 2P à une hauteur h. Dans ce cas très-simple d'une force constante transportant son point d'application dans la direction même où elle agit, le travail industriel effectué serait donc mesuré par le produit Ph de la force motrice et du chemin parcouru. Or, dans ce cas, l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t} P ds \cos \overline{Pv} = P \int_{t_0}^{t} ds = Ph$$

représente précisément la même quantité.

Si la force P agit obliquement sur l'objet qu'elle déplace, par rapport à la droite qu'il parcourt, comme lorsqu'on traîne un waggon sur une voie ferrée à l'aide d'une force agissant obliquemment à la voie, la composante de la force normale à la droite est évidemment perdue, et la force P n'agit utilement que par sa composante $P \cos \overline{Pv}$ suivant la direction du mouvement. Le travail utile et payable est donc alors représenté par

$$P \cos \overline{Pv} \int_{t_0}^{t} ds,$$

ce qui s'accorde avec notre expression générale. Enfin si la force varie et que le mobile décrive une trajectoire quelconque, on pourra, pendant chaque inervalle de temps très court dt, regarder P comme constant et

(1) V. Dühring, *Kritische Geschichte der allg. Principien der Mechanik*, p. 227.

le mouvement comme rectiligne, et appliquer les considérations précédentes; on sera encore conduit à prendre pour mesure du travail utile élémentaire $P ds \cos \overline{Pv}$, c'est-à-dire l'expression même que nous avons adoptée en général.

Telle est la suite d'idées qui justifie la dénomination de *travail* appliqué à cette expression.

146. Il existe un cas où le théorème de la force vive prend une forme très-remarquable : c'est celui où, la force motrice P ne dépendant que de la position du point mobile, ses composantes X, Y, Z s'expriment par les dérivées partielles, en x, y, z respectivement, d'une même fonction de ces variables, qui ne renferme pas le temps explicitement. Soit $m\varphi(x, y, z)$ cette fonction. Nous avons donc

$$X = m\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad Y = m\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad Z = m\frac{\partial \varphi}{\partial z};$$

d'où

$$P ds \cos \overline{Pv} = X dx + Y dy + Z dz = m d.\, \varphi(x, y, z);$$

l'équation (5) devient, par la suppression du facteur m,

$$d.\, v^2 = 2\, d.\, \varphi(x, y, z),$$

et après intégration

$$v^2 = 2\varphi(x, y, z) + C. \tag{9}$$

La constante C se détermine immédiatement en posant $t = 0$ dans l'équation et remplaçant v, x, y, z par leurs valeurs initiales v_0, x_0, y_0, z_0, qui sont données. On a donc

$$v_0^2 = 2\varphi(x_0, y_0, z_0) + C,$$

et l'équation (9) peut s'écrire

$$v^2 - v_0^2 = 2\varphi(x, y, z) - 2\varphi(x_0, y_0, z_0);$$

mais nous la conserverons de préférence sous la forme (9), supposant d'ailleurs la constante C déterminée comme il vient d'être dit.

Cette équation (9) se nomme l'*intégrale de la force vive*. Elle offre ceci de remarquable, qu'elle détermine immédiatement la vitesse du point mobile par la position qu'il occupe à l'instant considéré, de telle sorte que si le point repasse plusieurs fois par la même position, il y repassera chaque fois avec la même vitesse. On dit, lorsque la condition supposée est remplie, qu'il existe une *fonction des forces* ou un *potentiel*.

Considérons les surfaces, en nombre infini, représentées par l'équation

$$\varphi(x, y, z) = \alpha,$$

α désignant un paramètre arbitraire : ce sont les *surfaces de niveau*. La fonction φ a donc une valeur constante en tous les points d'une même surface de niveau, mais cette valeur varie d'une surface à l'autre. Par chaque point de l'espace il en passe généralement une, mais une seule, du moins si la fonction $\varphi(x, y, z)$ a une valeur unique et déterminée pour un système donné de valeurs de x, y, z. Car, si deux surfaces de niveau pouvaient se couper en un point de l'espace, et si α_1, α_2 désignaient les valeurs correspondantes du paramètre α, il faudrait qu'en ce point la fonction φ admît les deux valeurs α_1, α_2, ce qui est contre l'hypothèse.

Cela posé, l'équation (9) fait voir que, si la constante C a une valeur donnée, c'est-à-dire si le point mobile part d'une surface de niveau déterminée avec une vitesse déterminée, il aura toujours acquis une même vitesse v lorsqu'il traversera une même surface de niveau $\varphi = \alpha$, quels que soient le chemin suivi pour y arriver et le point où il la traverse.

D'après les valeurs de X, Y, Z dans le cas actuel, les cosinus directeurs de la force motrice P sont respectivement proportionnels aux dérivées partielles de φ, et par conséquent aux cosinus directeurs de la normale à la surface

$$\varphi(x, y, z) = \alpha.$$

De là cette autre propriété des surfaces de niveau : *la force qui agit sur le point mobile en un point quelconque de l'espace, est normale à la surface de niveau qui passe par ce point*. De telle sorte que, si cette surface était fixe et que le point M ne pût la quitter, il y resterait en équilibre sous l'action de la force P.

147. L'intégrale (9) subsiste, alors même que le point mobile est assujetti à rester sur une surface ou sur une courbe fixe, pourvu qu'il n'y ait pas de frottement. Nous avons vu, en effet, que le théorème de la force vive subsiste dans ce cas comme si la condition n'existait pas (**144**); l'équation (5) a donc lieu, et si la force P satisfait à la condition

$$Xdx + Ydy + Zdz = md \,.\, \varphi(x, y, z),$$

il est clair que l'égalité (9) subsistera également. Cette observation nous sera fort utile.

Remarquons encore que si plusieurs forces P_1, P_2.. agissent simultané-

ment sur un point matériel, et si chacune d'elles admet un potentiel, de sorte que les composantes rectangulaires de P_1, P_2.. soient respectivement les dérivées partielles en x, y, z des fonctions $m\varphi_1(x, y, z), m\varphi_2(x, y, z), \ldots$ la somme des travaux élémentaires de ces forces sera

$$\Sigma(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz) = m[d.\varphi_1(x, y, z) + d.\varphi_2(x, y, z) + \cdots]$$
$$= md.\Sigma\varphi(x, y, z).$$

L'équation (7) nous donnera donc

$$d.\frac{mv^2}{2} = md.\Sigma\varphi(x, y, z), \quad v^2 = 2\Sigma\varphi(x, y, z) + \mathrm{C}.$$

L'intégrale (9) de la force vive subsistera donc, la fonction φ étant, dans le cas actuel, la somme des fonctions correspondant à chacune des forces $P_1, P_2, \ldots$ considérée isolément.

148. Parmi les cas remarquables où il existe une fonction des forces et où l'intégrale (9) a lieu, nous indiquerons d'abord celui de la pesanteur. L'axe des z positifs étant vertical dans le sens de la pesanteur, les composantes de la force qui agit sur un point de masse m sont

$$\mathrm{X} = 0, \quad \mathrm{Y} = 0, \quad \mathrm{Z} = mg.$$

Donc

$$\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Y}dz = mgdz = md.gz, \quad \varphi = gz,$$

et l'intégrale de la force vive est ici

$$(10) \qquad v^2 = 2gz + \mathrm{C}.$$

Les surfaces de niveau ont pour équation $z = \alpha$; ce sont des *plans horizontaux*. D'après la propriété du n° **146**, si le mobile part d'un plan horizontal donné, $z = z_0$, avec une vitesse initiale donnée $v = v_0$, il aura toujours une même vitesse v à l'instant où il atteindra un même plan horizontal quelconque $z = \alpha$, quel que soit le chemin suivi pour y arriver. Supposons, par exemple, que l'on ait $z_0 = 0$, $v_0 = 0$. L'équation (10) donnera

$$v^2 = 2gz,$$

d'où il suit que la vitesse du mobile, dans une position quelconque, sera la même que s'il était tombé librement et verticalement d'une hauteur égale à sa distance z au plan XY, et cela, quelle que soit la ligne droite ou courbe qu'on l'ait obligé à parcourir (**147**), pourvu que l'on fasse abstraction du frottement. En général, *que le point soit libre, ou retenu*

sans frottement sur une surface ou une courbe fixe, sa vitesse à chaque instant est uniquement déterminée par sa coordonnée verticale z, au moyen de l'équation

$$v^2 = 2gz + C,$$

la constante C ayant d'ailleurs été déterminée par les données initiales.

149. Un autre cas important où il y a un potentiel est celui où le point M est sollicité par une force P dont la direction passe par un centre fixe O et dont l'intensité est une fonction de la distance r du point M à ce centre. Appliquant l'expression que nous avons trouvée au n° **66** pour la somme des travaux virtuels de deux forces égales et opposées dont les points d'application sont à une distance r l'un de l'autre, nous avons $-\,Pdr$ pour la somme des travaux élémentaires de la force P et de la réaction du point O; mais comme O est fixe, le travail de cette réaction est nul, et $-\,Pdr$ représente le travail élémentaire de la force P seule. Représentons par $mf(r)$ la fonction de la distance OM qui mesure l'intensité de P, la fonction f étant affectée du signe $+$ ou du signe $-$ suivant que la force est attractive ou répulsive, conformément à la convention du n° **66**. Le travail élémentaire de la force P sera donc

$$-\,mf(r)\,dr = -\,md\,.\,\varphi(r),$$

en posant

$$\varphi(r) = \int f(r)\,dr.$$

La fonction des forces est donc ici $-\,m\varphi(r)$, et c'est bien réellement une fonction des coordonnées x, y, z du point mobile, puisque r dépend de ces variables. L'intégrale de la force vive est donc

$$v^2 = -\,2\varphi(r) + C,$$

et la vitesse du point mobile reprend la même valeur chaque fois que le point revient à la même distance du centre d'action O.

Si le point M était sollicité par plusieurs forces dirigées vers des centres fixes et fonctions de ses distances respectives r_1, r_2.., à ces centres, il suit de ce que nous avons prouvé au n° **146** que l'intégrale de la force vive aurait encore lieu, et que la fonction des forces serait la somme des fonctions $-\,m\varphi_1(r_1)$, $-\,m\varphi_2(r_2)$,... correspondant à l'action de chaque centre en particulier.

Exercices.

1. Un point mobile est sollicité par une force centrale. Trouver l'expression, en coordonnées polaires, de la vitesse v et de la force accélératrice P.

R. La combinaison des équations

$$r^2 d\theta = k dt, \quad ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

conduit à la formule

$$(A) \qquad v^2 = k^2 \left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d}{d\theta} \frac{1}{r} \right)^2 \right].$$

D'autre part, la force agissant suivant le rayon vecteur, on trouve

$$\cos \overline{Pv} = -\frac{dr}{ds}, \quad Pds \cos \overline{Pv} = -Pdr,$$

et l'on a alors, par l'équation (5) et par (A),

$$P = -\frac{1}{2} \frac{d.v^2}{d\theta} : \frac{dr}{d\theta} = \frac{k^2}{r^2} \left[\frac{1}{r} + \frac{d^2}{d\theta^2} \frac{1}{r} \right].$$

2. *Théorème de Yvon Villarceau.* — Dans le mouvement d'un point libre, on a

$$v^2 = \frac{1}{2} \frac{d^2 . r^2}{dt^2} - rP_r,$$

P_r étant la projection de la force accélératrice sur le rayon vecteur r. Si le mouvement est plan, et θ l'angle polaire, on a

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = r \frac{d\theta^2}{dt^2} + P_r.$$

R. Se déduit des équations (1) en observant que $rP_r = xX + yY + zZ$.

3. Si ρ désigne la distance de l'origine O à un point *arbitraire* sur la droite polaire de la trajectoire en M, on a toujours

$$\frac{d^2 . r^2}{dt^2} = 2P\rho \cos \overline{P\rho}.$$

Cas particulier où r^2 varie proportionnellement au temps.

R. Combiner les équations (1) avec celles de la droite polaire, et la relation $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

§ 3. APPLICATION DES FORMULES DU MOUVEMENT D'UN POINT LIBRE.

150. I. — *Mouvement d'un point pesant dans le vide.* — Nous supposons un point matériel partant d'une position donnée O (fig. 89) avec une vitesse donnée v_0, et soumis d'ailleurs à la seule action de la pesan-

teur. Nous prenons pour plan XY le plan vertical mené par la direction de la vitesse initiale; l'origine en O, l'axe OX horizontal, OY vertical dans le sens de la pesanteur; la force motrice étant verticale, on a $Z = 0$, d'où

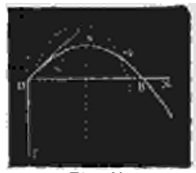


Fig. 89.

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 0, \quad \frac{dz}{dt} = \text{const.} = 0,$$

puisque, d'après l'hypothèse, la vitesse initiale est dans le plan XY. De là

$$z = \text{const.} = 0,$$

le mouvement a lieu dans le plan vertical XOY. D'ailleurs on a

$$X = 0, \quad Y = mg,$$

d'où les équations différentielles du mouvement

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = g.$$

Intégrons, désignons par α l'inclinaison de la vitesse initiale sur l'horizontale OX, et observons que pour $t = 0$, on a $v_x = v_0 \cos \alpha$, $v_y = - v_0 \sin \alpha$. Nous trouvons

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha, \quad \frac{dy}{dt} = gt - v_0 \sin \alpha.$$

Intégrant de nouveau, comme x, y sont nuls avec t, on a

$$(2) \qquad x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = \frac{1}{2} g t^2 - v_0 t \sin \alpha.$$

Les équations (1) montrent que la composante horizontale de la vitesse est constante; sa composante verticale croît proportionnellement au temps, et, d'abord négative, devient nulle pour

$$(3) \qquad t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g},$$

puis est constamment positive. Le mouvement est donc d'abord ascendant, puis descendant. Les formules (2) font connaître la position du mobile à un instant quelconque.

Eliminant t entre les équations (2), on obtient pour l'équation de la trajectoire

$$(4) \qquad y = \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} - x \operatorname{tg} \alpha.$$

Cette trajectoire est une *parabole*, dont l'axe vertical est dirigé dans le sens de la pesanteur. Son sommet A (x', y') ou le point culminant de la trajectoire, répond à la valeur (3) de t :

$$x' = \frac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}, \quad y' = -\frac{v_0^2 \sin\alpha}{2g}.$$

Cherchons le point B où le mobile atteint l'horizontale OX. Faisons $y = 0$ dans l'équation (4) : il viendra

$$x = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = 2x',$$

ce qui résulte d'ailleurs de la symétrie de la parabole par rapport à son axe. Cette distance $2x'$ se nomme l'*amplitude du jet*. Elle devient maximum, pour une valeur donnée v_0 de la vitesse initiale, lorsque $\sin 2\alpha = 1$ ou $\alpha = 45°$.

On démontre encore sans peine les propriétés suivantes du mouvement parabolique : 1° Toutes les trajectoires qui répondent à une même vitesse initiale v_0 et à des valeurs variables de α ont même directrice : c'est une parallèle à OX, dont l'ordonnée est

$$y = -\frac{v_0^2}{2g} = -h.$$

2° L'enveloppe de ces paraboles, ou la *courbe de sûreté*, s'obtient par l'élimination de α entre l'équation (4) et sa dérivée par rapport à α. C'est une parabole ayant pour équation

$$y = \frac{x^2}{4h} - h, \quad \text{ou} \quad x^2 = 4h(y + h).$$

3° Si l'on veut déterminer α, pour une valeur donnée de v_0, de manière à faire passer le point mobile par une position donnée M (x_1, y_1) (*problème du tir*), on est conduit à l'équation

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2h \pm \sqrt{4h(y_1 + h) - x_1^2}}{x_1}.$$

Il y a donc deux valeurs réelles pour α si le point M est dans l'intérieur de la courbe de sûreté, une seule si M est sur cette courbe, aucune si ce point est en dehors.

151. II. — *Mouvement d'une planète autour du soleil.* — Un point

matériel M est sollicité vers un centre fixe O par une force proportionnelle à la masse m de ce point et en raison inverse du carré de sa distance r au point O. La position et la vitesse initiale étant données, on demande le mouvement du point M. — Nous avons vu (**142**) que le mobile décrit une courbe plane dont le plan passe par le centre d'action O et la direction de la vitesse initiale; ce plan est donc connu par les données du problème et on peut le prendre pour plan XY, l'origine au point O. Soient (x, y) les coordonnées rectangulaires du point mobile; (r, θ) ses coordonnées polaires, d'où

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta,\quad x^2 + y^2 = r^2. \tag{5}$$

La force qui sollicite le point M ayant pour expression $\mu m : r^2$, où μ est une constante qui dépend de l'intensité d'action à l'unité de distance, les équations différentielles du mouvement sont

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu x}{r^3},\quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu y}{r^3}, \tag{6}$$

et le théorème des aires (**142**) fournit l'équation

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = r^2\frac{d\theta}{dt} = k, \tag{7}$$

k étant une constante dont la signification est connue.

On tire facilement des équations (5), (6) et (7)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu\cos\theta}{r^2} = -\frac{\mu}{k}\cos\theta\frac{d\theta}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu\sin\theta}{r^2} = -\frac{\mu}{k}\sin\theta\frac{d\theta}{dt},$$

d'où, intégrant, désignant par α, β des constantes et remplaçant $\sin\theta$, $\cos\theta$ par leurs valeurs (5),

$$\frac{dx}{dt} = \alpha - \frac{\mu}{k}\frac{y}{r},\quad \frac{dy}{dt} = \beta + \frac{\mu}{k}\frac{x}{r}. \tag{8}$$

Substituant dans l'équation (7), on a celle de la trajectoire :

$$\beta x - \alpha y + \frac{\mu r}{k} = k. \tag{9}$$

Les équations (8) donnent en outre

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = r\frac{dr}{dt} = \alpha x + \beta y, \tag{10}$$

équation qui montre que la droite $\alpha x + \beta y = 0$ coupe la trajectoire en un point A où la vitesse est normale au rayon vecteur. Prenons OA pour axe des x positifs, OY dans le sens de la vitesse au point A ; nous aurons, en ce point,

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad y = 0, \quad x = r, \qquad \text{d'où} \qquad \alpha = 0, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\mu}{k}(1 + \varepsilon),$$

en désignant la constante β par $\mu\varepsilon : k$. D'après cela, l'équation (9) devient

$$\mu(r + \varepsilon x) = k^2 \qquad \text{ou} \qquad (11)\ r = \frac{k^2}{\mu(1 + \varepsilon \cos\theta)}.$$

La trajectoire est une section conique dont O est un foyer, OA l'axe focal, $k^2 : \mu$ le demi-paramètre, ε un rapport qui est < 1 dans l'ellipse, $= 1$ dans la parabole, > 1 dans l'hyperbole. Si l'on désigne par v_0 la vitesse au sommet A, on voit sans peine que ces trois cas répondent aux hypothèses

$$\frac{kv_0}{\mu} < 2, \quad = 2, \qquad \text{ou} \qquad > 2.$$

Les équations (8) peuvent s'écrire :

$$(12) \qquad v_x = -\frac{\mu}{k}\sin\theta, \quad v_y = \frac{\mu}{k}(\varepsilon + \cos\theta);$$

Or, $-\sin\theta$, $\cos\theta$ sont les cosinus directeurs d'une perpendiculaire au rayon vecteur OM, élevée dans le sens où θ est croissant. Les équations (12) manifestent donc cette propriété remarquable : *La vitesse du point mobile à chaque instant se compose de deux vitesses constantes : l'une, égale à $\mu : k$, normale au rayon vecteur ; l'autre, égale à $\mu\varepsilon : k$, normale à l'axe focal de la trajectoire.*

152. Nous supposons maintenant la trajectoire elliptique, ou $\varepsilon < 1$; nous avons, a désignant le demi-axe focal,

$$(13) \qquad k^2 = \mu a(1 - \varepsilon^2).$$

Il reste à exprimer r et θ en fonction de t ; pour cela, introduisons une variable u définie par la relation

$$(14) \qquad \frac{du}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{a}}\frac{1}{r},$$

et éliminant dt entre cette équation et (7), puis remplaçant r par sa

valeur en θ, nous aurons

$$du = \sqrt{\frac{\mu}{a}}\frac{r d\theta}{k} = \frac{k}{\sqrt{a\mu}}\frac{d\theta}{1+\varepsilon\cos\theta} = \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\frac{d\theta}{1+\varepsilon\cos\theta}.$$

L'intégrale de cette expression est connue (Cours d'An., **201**), et donne

$$u = 2\,\text{arc tg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\,\text{tg}\,\tfrac{1}{2}\theta\right) + C,$$

d'où, déterminant C de manière que u et θ s'annulent ensemble,

(15) $$\text{tg}\,\tfrac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\,\text{tg}\,\tfrac{1}{2}u.$$

En exprimant $\cos\theta$ en fonction de $\text{tg}\,\frac{1}{2}\theta$, faisant usage de l'équation (15) et opérant des réductions faciles, on aura

$$\cos\theta = \frac{\cos u - \varepsilon}{1-\varepsilon\cos u},\quad 1+\varepsilon\cos\theta = \frac{1-\varepsilon^2}{1-\varepsilon\cos u},$$

et au moyen de cette formule, la valeur (11) de r devient

(16) $$r = a\,(1-\varepsilon\cos u).$$

Enfin, cette valeur de r substituée dans l'équation (14) donnera

$$dt = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}}(1-\varepsilon\cos u)\,du,$$

et en intégrant, déterminant la constante de sorte que u s'annule en même temps que t,

(17) $$t = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}}(u-\varepsilon\sin u).$$

La solution est maintenant complète, r, θ et t étant exprimés en fonction d'une même variable u.

Lorsque le mobile décrit un tour entier et revient à son point de départ θ augmente de 2π, et il en est de même, d'après (15), de l'angle u; $\sin u$ reprend la même valeur, l'équation (17) montre que t croît d'une quantité T dont la valeur est

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}a^{\frac{3}{2}},\quad \text{d'où}\quad \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu}.$$

La constante μ étant supposée invariable, T^2 sera proportionnel au cube du demi grand axe a de l'ellipse.

Si l'on suppose le soleil immobile, que l'on réduise cet astre et une planète quelconque à deux points matériels, l'hypothèse de Newton consiste en ce que le soleil attire cette planète proportionnellement à la masse de celle-ci et en raison inverse du carré de sa distance au soleil. Le mouvement de la planète sera donc régi par les formules que nous venons de trouver, et qui renferment les trois *lois* dites *de Képler :*

1° *Le rayon vecteur mené du soleil à la planète décrit une aire plane qui varie proportionnellement au temps ;*

2° *La planète décrit une ellipse dont le soleil est un des foyers ;*

3° *Les carrés des durées des révolutions des planètes sont entr'eux comme les cubes des grands axes de leurs orbites.*

Exercices.

1. Un point matériel, animé d'une vitesse initiale horizontale v_0, décrit sous l'action d'une force verticale la chaînette

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Déterminer l'intensité de la force accélératrice, la vitesse correspondant à une position donnée du point, le temps qu'il met à atteindre cette position?

R. De l'équation $X = 0$ on tire $x = v_0 t$; éliminant x, on a y en fonction de t, d'où v_y et Y. On trouve

$$Y = \frac{v_0^2}{a^2}\,y,\quad v = \frac{v_0}{a}\,y,\quad t = \frac{x}{v_0}.$$

2. Un point décrit une cycloïde par l'action d'une force parallèle à la base. Trouver l'expression de la force accélératrice et celle de la vitesse en fonction de l'angle ω, les équations de la trajectoire étant

$$x = a(\omega - \sin\omega),\quad y = a(1 - \cos\omega).$$

R. On a $\quad v_y = \text{const.} = \alpha,\quad v_x = \alpha\,\text{tg}\,\frac{\omega}{2},\quad X = \dfrac{\alpha^2}{a\sin\omega\,(1 + \cos\omega)},$

$$v = \alpha\sec\frac{\omega}{2}.$$

3. Déterminer le mouvement d'un point sollicité vers un centre fixe O par une force proportionnelle à sa distance à ce centre.

R. L'origine étant en O, les axes rectangulaires, soient α, β les coordonnées, α', β' les

composantes de la vitesse du point pour $t = 0$; μ^2 une constante positive. Les équations du mouvement seront de la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu^2 x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\mu^2 y;$$

intégrant et déterminant les constantes, on trouve

$$x = \alpha \cos \mu t + \frac{\alpha'}{\mu} \sin \mu t, \quad y = \beta \cos \mu t + \frac{\beta'}{\mu} \sin \mu t;$$

l'équation de la trajectoire est

$$(\alpha' y - \beta' x)^2 + \mu^2 (\alpha y - \beta x)^2 = (\alpha\beta' - \beta\alpha')^2;$$

c'est une ellipse dont O est le centre. Mouvement périodique, dont la durée $T = \frac{2\pi}{\mu}$.

4. Un point est sollicité vers un centre fixe par une force

$$P = \frac{f(\theta)}{r^2}.$$

Trouver l'équation de la trajectoire.

R. Soient v_0, θ_0 les valeurs initiales de v et de θ; α l'inclinaison de la vitesse initiale sur l'axe des x. L'équation est

$$\frac{k^2}{r} = kv_0 \sin(\alpha - \theta) - \int_{\theta_0}^{\theta} f(\zeta) \sin(\zeta - \theta)\, d\zeta.$$

5. Démontrer que, si un point décrit une conique par l'action d'une force dirigée vers le foyer, cette force est en raison inverse du carré de la distance.

R. L'origine étant au foyer, a, b, c des constantes, l'équation de la trajectoire est de la forme

$$r = ax + by + c,$$

et l'on a les équations

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = k, \quad x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = r\left(a\frac{dx}{dt} + b\frac{dy}{dt}\right).$$

On déduit facilement de là les équations

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k}{c}\left(b - \frac{y}{r}\right), \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{k}{c}\left(a - \frac{x}{r}\right),$$

et en remplaçant x par $r\cos\theta$, y par $r\sin\theta$, dérivant par rapport à t et ayant égard à l'équation $r^2 d\theta = k\,dt$, on a enfin

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k^2}{c}\frac{x}{r^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k^2}{c}\frac{y}{r^3} \text{ (1)}.$$

---

(1) Voir, sur une question plus générale, J. Bertrand, G. Darboux et Halphen, *Comptes-Rendus*, t. 84.

6. Un point M décrit une circonférence sous l'action d'une force dirigée vers un point O de la courbe et fonction de la distance $OM = r$. Trouver l'expression de la force accélératrice P et de la vitesse v en fonction de r.

R. Prenant O pour pôle, et désignant par μ une constante, on aura (§ 2, ex. 1)

$$P = -\frac{\mu}{r^5}, \quad v^2 = \frac{\mu}{2r^4}.$$

7. Un point matériel est sollité vers un centre fixe O par deux forces, l'une attractive et proportionnelle à la distance, l'autre répulsive et en raison inverse du cube de la distance. La vitesse initiale est normale au rayon vecteur : trouver le mouvement du point.

R. Application des intégrales des aires et de la force vive. On a

$$f(r) = \mu r - \frac{\mu'}{r^3}, \quad v^2 = -\left(\mu r^2 + \frac{\mu'}{r^2}\right) + 2h, \quad r^2 d\theta = k dt,$$

r étant le rayon vecteur mené du point O, h et k des constantes faciles à déduire des données initiales. Posant

$$\alpha = \frac{\sqrt{k^2 + \mu'}}{k} = \frac{\sqrt{v_0^2 r_0^2 + \mu'}}{v_0 r_0},$$

on trouve

$$r^2 = \frac{\alpha^2 v_0^2 r_0^2}{\alpha^2 v_0^2 \cos^2 \alpha\theta + \mu r_0^2 \sin^2 \alpha\theta}, \quad \operatorname{tg} \alpha\theta = \frac{\alpha v_0}{r_0 \sqrt{\mu}} \operatorname{tg} (t\sqrt{\mu}),$$

$$\mu r^2 = \alpha^2 v_0^2 \sin^2 t\sqrt{\mu} + \mu r_0^2 \cos^2 t\sqrt{\mu}.$$

Discuter la trajectoire dans les différents cas.

8. Un centre d'action C décrit autour du centre O un cercle de rayon a avec une vitesse angulaire constante ω. Un point M, mobile dans le plan du cercle, est attiré vers C avec une intensité $k^2 u$ ($u = MC$). Déterminer le mouvement du point M. Cas où, pour $t = 0$, M est sans vitesse en O.

R. 1° Si $k^2 - \omega^2 \gtrless 0$, on trouve pour les coordonnées du point M

$$x = A \cos kt + B \sin kt + \frac{k^2 a}{k^2 - \omega^2} \cos \omega t, \quad y = A_1 \cos kt + B_1 \sin kt + \frac{k^2 a}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t.$$

Le mobile décrit une ellipse suivant la loi des aires autour d'un point qui décrit lui-même un cercle de rayon $\frac{k^2 a}{k^2 - \omega^2}$ autour du point O avec une vitesse angulaire ω. Si k et ω sont commensurables, le mouvement est périodique. — 2° Si $k^2 = \omega^2$, avec $v_0 = 0$, $x_0 = y_0 = 0$, on trouve

$$x = \frac{a\omega t}{2} \sin \omega t, \quad y = \frac{a}{2}(\sin \omega t - \omega t \cos \omega t).$$

Le point M parcourt une spirale d'Archimède autour d'un point qui oscille sur un diamètre du cercle de rayon $a : 2$ et de centre O.

9. Un point matériel est sollicité vers un centre fixe O par une force dont l'expression est

$$f(r) = \frac{2k^2(a^2+b^2)}{r^5} - \frac{3k^2a^2b^2}{r^7}.$$

La distance initiale au point O est a; la vitesse initiale est normale au rayon vecteur et égale à $k : a$. Déterminer le mouvement du point.

R. Appliquant encore les intégrales de la force vive et des aires, et déterminant les constantes par les données initiales, on trouve

$$v^2 = k^2\left(\frac{a^2+b^2}{r^4} - \frac{a^2b^2}{r^6}\right), \quad r^2 d\theta = k\,dt;$$

de là on tire

$$r^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta,$$

la trajectoire est la polaire d'une ellipse par rapport à son centre. Ensuite on a

$$2kt = (a^2+b^2)\theta + (a^2-b^2)\sin\theta\cos\theta,$$

la durée T d'une révolution complète est $\dfrac{\pi(a^2+b^2)}{k}$; enfin, on a encore les relations

$$v^2 = \frac{k^2(a^4\cos^2\theta + b^4\sin^2\theta)}{(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)^3}, \quad \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{k^2}{r^3} - f(r).$$

10. Un point décrit une parabole autour d'un centre fixe qui l'attire suivant la loi de Newton. Trouver 1° le temps t compris entre le passage au sommet et une position quelconque, en fonction de l'angle θ que fait le rayon vecteur avec l'axe; 2° le temps T compris entre les passages en deux points donnés, en fonction de leur distance c et de leurs rayons vecteurs r et r'.

R. Soit p le demi paramètre. D'après le n° 151 on aura

$$r = \frac{p}{1+\cos\theta}, \quad k^2 = \mu p;$$

appliquant l'équation des aires et posant $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta = \zeta$, on trouvera

$$2\mu t = p\left(\zeta + \frac{1}{3}\zeta^3\right).$$

Soit, pour un second point donné, $\zeta' = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta'$; transformant l'équation

$$2\mu T = p(\zeta'-\zeta)\left(1 + \frac{\zeta'^2 + \zeta\zeta' + \zeta^2}{3}\right),$$

on trouve

$$6\mu T\sqrt{p} = (r+r'+c)^{\frac{3}{2}} - (r+r'-c)^{\frac{3}{2}}.$$

11. Un point matériel est sollicité vers un centre fixe O par une force

$$f(r) = \frac{k^2}{r^3} - (r-r_0)^{\mu};$$

k est la constante des aires(252), μ est compris entre 0 et 1. La vitesse initiale est supposée telle que $r = r_0$ donne $v = 0$, $t = T$. Déterminer le mouvement, et montrer que quand $r = r_0$, le mouvement peut continuer, soit suivant la loi donnée par l'intégrale particulière, soit uniformément sur un cercle de rayon r_0 (1).

19. Déterminer le mouvement d'un point pesant dans un milieu dont la résistance est directement opposée à la vitesse et proportionnelle à une fonction donnée de cette vitesse.

R. Soient $mgf(v)$ cette résistance, φ l'angle que fait la direction de la vitesse avec l'horizontale OX ; v_0, α les valeurs de v et de φ pour $t = 0$; l'origine au point de départ. Les équations du mouvement seront

$$(1)\qquad \frac{d.\,v\cos\varphi}{dt} = -gf(v)\cos\varphi,\quad \frac{d.\,v\sin\varphi}{dt} = -g - gf(v)\sin\varphi.$$

Eliminant $f(v)$, on a

$$(2)\qquad v\frac{d\varphi}{dt} = -g\cos\varphi,\quad \text{d'où}\quad dt = -\frac{v}{g}\frac{d\varphi}{\cos\varphi},\quad ds = -\frac{v^2}{g}\frac{d\varphi}{\cos\varphi},$$

$$dx = \cos\varphi\, ds = -\frac{v^2}{g}d\varphi,\quad dy = \sin\varphi\, ds = -\frac{v^2}{g}\operatorname{tg}\varphi\, d\varphi.$$

Eliminant dt entre (1) et (2) on obtient l'équation à deux variables

$$(3)\qquad d.\,v\cos\varphi = vf(v)\,d\varphi,$$

dont l'intégration donnerait v, et par suite t, x, y, en fonction de φ. On intègre par approximation en supposant que, sur une portion de la trajectoire, φ varie assez peu pour que l'on puisse écrire

$$f(v) = \frac{f(\varepsilon v\cos\varphi)}{\varepsilon\cos\varphi},$$

ε étant une constante convenable.

Posant alors $\varepsilon v\cos\varphi = w$, $\varepsilon v_0\cos\alpha = w_0$, on trouve

$$\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{\varepsilon dw}{wf(w)},\quad \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\alpha + \varepsilon\int_{w_0}^{w}\frac{dw}{wf(w)},\quad t = -\frac{1}{g}\int_{w_0}^{w}\frac{dw}{f(w)},$$

$$x = -\frac{1}{g\varepsilon}\int_{w_0}^{w}\frac{w\,dw}{f(w)},\quad y = -\frac{1}{g\varepsilon}\int_{w_0}^{w}\frac{dw}{f(w)}\left[\operatorname{tg}\alpha + \varepsilon\int_{w_0}^{w}\frac{dw}{wf(w)}\right].$$

Le problème est ramené aux quadratures. Dans le cas d'une résistance proportionnelle au carré de la vitesse, $f(v) = \mu v^2$. On trouve, calcul fait,

$$w = \frac{w_0}{1 + g\mu w_0 t},\quad x = \frac{1}{g\varepsilon\mu}\,\mathrm{l.}\,\frac{w_0}{w} = \frac{1}{g\varepsilon\mu}\,\mathrm{l.}\,(1 + g\mu w_0 t),$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\alpha + \frac{\varepsilon}{2\mu}\left(\frac{1}{w_0^2} - \frac{1}{w^2}\right) = \operatorname{tg}\alpha - \frac{g\varepsilon t}{w_0} - \frac{g^2\varepsilon\mu t^2}{2};$$

(1) V. Boussinesq, *Comptes-Rendus*, t. 84, p. 944.

$$y = \frac{1}{g\varepsilon\mu}\left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{\varepsilon}{2\mu w_0^2}\right) \text{l.}\, \frac{w_0}{w} + \frac{1}{4g\mu^2}\left(\frac{1}{w_0^2} - \frac{1}{w^2}\right)$$

$$= \frac{1}{g\mu}\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\varepsilon} + \frac{1}{2\mu w_0^2}\right) \text{l.}\,(1 + g\mu w_0 t) - \frac{t}{2\mu w_0} - \frac{gt^2}{4};$$

$$y = x \operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{2\mu w_0^2}\, x + \frac{1}{4g\mu^2 w_0^2}\,(1 - e^{g\mu\varepsilon x}),$$

équation de la trajectoire. (Voir, pour l'usage de ces équations, la *Balistique extérieure*, par M. De Tilly, pp. 72-115.)

§ 4. MOUVEMENT D'UN POINT SUR UNE COURBE FIXE.

152. Dans les problèmes que nous avons à étudier, où il s'agit du mouvement d'un point qui n'est pas libre, nous nommons *force conservée* d'un point la résultante des forces motrices qui agissent sur lui à l'instant considéré et des réactions qu'il éprouve de la part des obstacles. Cest, en d'autres termes, la force qui, appliquée au même point supposé entièrement libre, lui communiquerait le même mouvement qu'il possède dans les conditions où il se trouve. Elle est donc représentée en grandeur et en direction par l'accélération multipliée par la masse du point.

Considérons d'abord un point qui se meut, sous l'action d'une force P, sur une courbe fixe dont on néglige le frottement; nous regarderons le point comme libre, en joignant à la force P la réaction normale inconnue N de la courbe. Soient X, Y, Z les composantes rectangulaires de la force P; x, y, z les coordonnées du mobile; λ, μ, ν les angles directeurs de la réaction N; les équations du mouvement d'un point libre (129) donnent

$$\left\{\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= \mathrm{X} + \mathrm{N}\cos\lambda,\\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= \mathrm{Y} + \mathrm{N}\cos\mu,\\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= \mathrm{Z} + \mathrm{N}\cos\nu.\end{aligned}\right.$$

A ces équations, on joindra celles de la courbe donnée

$$\mathrm{F}(x, y, z) = 0, \quad \mathrm{F}_1(x, y, z) = 0,$$

la relation connue

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1,$$

et enfin celle-ci, qui exprime que la réaction N est normale à la direction de la vitesse,

$$\cos\lambda\, dx + \cos\mu\, dy + \cos\nu\, dz = 0.$$

On aura un système de sept équations pour déterminer les sept fonctions inconnues du temps x, y, z, N, λ, μ, ν. Mais la complication de ce système dans la plupart des cas ne permet pas de l'utiliser, et l'on suit une autre méthode.

Les équations de la courbe déterminant deux des variables x, y, z en fonction de la troisième, il suffit évidemment de trouver une relation entre l'une d'elles et le temps pour achever la solution. Or, l'intégrale de la force vive fournit, dans beaucoup de cas, cette relation. Supposons, en effet, qu'il existe un potentiel et que l'on ait

$$X dx + Y dy + Z dz = m\, d\varphi(x, y, z),$$

d'où résulte, comme nous l'avons prouvé, l'équation

$$v^2 = 2\varphi(x, y, z) + C,$$

C étant une constante que l'état initial fait connaître. Résolvant les équations $F = 0$, $F_1 = 0$ par rapport à x, y, par exemple, on aura

$$x = f(z), y = f_1(z),\ v^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \frac{dz^2}{dt^2}[1 + f'(z)^2 + f_1'(z)^2].$$

Substituant ces valeurs de x, y, v^2 dans l'intégrale de la force vive, on trouve

$$\frac{dz^2}{dt^2}[1 + f'(z)^2 + f_1'(z)^2] = 2\varphi[f(z), f_1(z), z] + C,$$

d'où l'on tire

$$dt = \pm \frac{dz\sqrt{1 + f'(z)^2 + f_1'(z)^2}}{\sqrt{2\varphi[f(z), f_1(z), z] + C}}.$$

On aura donc t en fonction de z par une quadrature, et l'on en déduira z en fonction de t. La constante introduite par l'intégration se détermine par la valeur de z qui répond à $t = 0$.

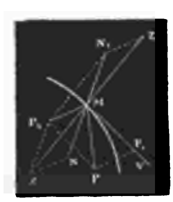


Fig. 90.

154. Le mouvement connu, la réaction N se trouvera par une construction très simple. Soient P_1, P_2 (fig. 90) les composantes de P tangentiellement et normalement à la courbe, R le rayon de courbure en M. La réaction N est dans le plan normal P_2MZ, sa composante tangentielle est donc nulle;

d'où il suit que la composante normale MZ de la force conservée (résultante de P et de N), laquelle est $mv^2 : R$, sera la résultante de P_2 et de N. D'autre part, la force centrifuge MZ_1 est égale et opposée à MZ; la pression N_1 du mobile sur la courbe fixe est égale et opposée à N; le parallélogramme $MP_2N_1Z_1$ nous fait donc voir que N_1 est la résultante de P_2 et de MZ_1; donc, *lorsqu'un point parcourt une courbe fixe sans frottement, la pression qu'il exerce sur elle est la résultante de la force centrifuge et de la composante normale de la force motrice.*

Or, la composante normale P_2 est connue; v^2 est connu par l'équation de la force vive, R par les équations de la courbe; la force centrifuge est donc connue, ainsi que sa direction qui est celle du prolongement du rayon de courbure. On peut donc construire N par ce qui précède.

155. *Mouvement d'un point pesant sur un cercle vertical. — Théorie du pendule simple.* — Concevons que la courbe fixe soit un cercle vertical, de rayon l; que le point mobile M soit soumis seulement à l'action de la pesanteur. Soient OX (fig. 91) un diamètre horizontal, OZ le diamètre vertical mené dans le sens de la pesanteur. Nous avons d'abord l'intégrale de la force vive



Fig. 91.

$$(1) \qquad v^2 = 2gz + C;$$

la constante C est déterminée par la formule $C = v_0^2 - 2gz_0$, v_0, z_0 se rapportant à $t = 0$. Cette équation fait déjà connaître quelques propriétés du mouvement du point. Chaque fois que z repasse par la même valeur ou que le mobile se trouve à la même hauteur au-dessus du point le plus bas B, la vitesse reprend la même valeur; cette vitesse est d'ailleurs toujours croissante avec z.

Pour que la vitesse s'annule, il faut, d'après (1), que l'on ait

$$2gz + C = 0, \quad \text{ou} \quad z = -\frac{C}{2g}.$$

Or, cette condition ne peut se réaliser, le point mobile étant assujetti à rester sur le cercle, que si cette valeur de z est comprise dans l'intervalle $(-l, +l)$. De là trois cas à distinguer :

$$-\frac{C}{2g} < -l, \quad -\frac{C}{2g} = -l, \quad -\frac{C}{2g} > -l,$$

ou

$$1^\circ\ C > 2gl,\quad 2^\circ\ C = 2gl,\quad 3^\circ\ C < 2gl;$$

[on ne peut avoir $C < -2gl$ à cause de l'équation (1)].

1° La vitesse v ne pourra devenir nulle en aucun point de la circonférence; le mobile continuera donc à se mouvoir toujours dans le même sens en parcourant la circonférence entière, avec une vitesse alternativement croissante et décroissante. La vitesse maximum correspondra à $z = l$, ou au point B; la vitesse minimum à $z = -l$, ou au point culminant C.

2° La vitesse du point ne pourra s'annuler que pour $z = -l$, donc au point culminant C : si le mobile atteint cette position, comme la force motrice y est détruite par la réaction de la courbe et que la vitesse est nulle, le point restera indéfiniment en repos; mais si l'on cherche le temps t que le mobile mettrait à atteindre le point C, on trouve une valeur infinie, ce qui montre que C est un point asymptote dont le mobile s'approchera indéfiniment sans jamais y arriver. Ce cas singulier est évidemment sans importance pratique.

3° C'est le cas le plus important; la vitesse v deviendra nulle, comme nous l'avons remarqué, pour $z = -\frac{C}{2g}$. Menons la droite horizontale DE représentée par cette égalité. Le mobile ne pourra jamais s'élever au-dessus de cette droite, car on aurait alors $v^2 < 0$.

Lorsque le point M atteint l'un des points D, E, par exemple le premier, sa vitesse est nulle; comme le point D n'est pas une position d'équilibre, le mobile descendra suivant DB avec une vitesse croissante jusqu'en B, où v est maximum. Il s'élèvera ensuite suivant BE, et sa vitesse, en vertu de la relation (1), sera maintenant décroissante, jusqu'à s'annuler en E.

En ce point, comme en D, l'équilibre n'ayant pas lieu, le mobile redescendra suivant l'arc EB avec une vitesse croissante, puis parcourra l'arc BD et arrivera en D avec une vitesse nulle, et ainsi de suite. En résumé, le mobile aura un mouvement oscillatoire de part et d'autre de la verticale CB, et comme la vitesse est toujours la même aux mêmes points de la trajectoire, il est visible que la durée des oscillations sera invariable.

156. Déterminons la position du mobile en fonction du temps. Soit θ l'angle MOB que fait le rayon vecteur OM avec la verticale OZ, cet angle

étant compté positif à gauche, négatif à droite de OZ; nommons α la valeur de θ qui répond au point D où la vitesse s'annule. En vertu des relations

$$z = l\cos\theta,\quad v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = l^2\frac{d\theta^2}{dt^2},\quad 0 = 2gl\cos\alpha + C,$$

l'équation (1) prend la forme

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\alpha),$$

d'où

$$dt = \pm\sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{1}{2}\alpha - \sin^2\frac{1}{2}\theta}}.$$

Le signe + répond au mouvement dans le sens EBD, θ et t variant dans le même sens; le signe — au mouvement dans le sens DBE. Posons

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = k,\quad \sin\tfrac{1}{2}\theta = k\sin\varphi,$$

car θ est numériquement moindre que α; nous aurons

$$\cos\tfrac{1}{2}\theta\, d\theta = 2k\cos\varphi\, d\varphi,\quad \cos\tfrac{1}{2}\theta = \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi},$$

donc

$$dt = \pm\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}.$$

L'origine du temps étant fixée lorsque le mobile est en D, $t = 0$ donne $\theta = \alpha$ et $\sin\varphi = 1$, donc, en prenant d'abord le signe — puisque le mouvement a lieu dans le sens DBE, on aura

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\int_\varphi^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}},$$

en sorte que le temps s'exprime, en fonction de l'angle φ, par une intégrale elliptique. Pour évaleur la durée T d'une demi-oscillation, qui est double du temps que le point met à arriver de D en B, on a l'équation

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}},$$

ou, d'après une formule connue (COURS D'AN., **326**), et en remplaçant k

par sa valeur,

$$(3) \quad T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \sin^4 \tfrac{1}{2}\alpha + \cdots\right].$$

Cette série converge d'autant plus rapidement que α est plus petit.

157. *Le pendule simple* est un appareil idéal constitué d'un point matériel pesant M, suspendu par un fil ou une tige sans masse et de longueur invariable à un point fixe O autour duquel la tige peut tourner librement. On écarte la tige de la verticale et l'on abandonne le système à l'action de la pesanteur : le point M décrira évidemment un cercle vertical dont le centre est en O, et son mouvement suivra les lois ci-dessus. La tige oscillera de part et d'autre de la verticale OB ; la durée T de la demi-oscillation du pendule sera donnée par la formule (3) dans laquelle l désignera la longueur du pendule et α son écart initial par rapport à OB. Lorsque cet écart est très-petit, il est permis de négliger les termes de la série qui renferment le carré de sin $\frac{1}{2}\alpha$, et l'on obtient la formule approchée

$$(4) \qquad T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

La durée T est donc indépendante de la valeur de l'écart initial α ou de l'*amplitude* des oscillations. Cette propriété, qui constitue ce que l'on nomme l'*isochronisme* des oscillations du pendule, est des plus importantes ; elle sert de base à l'application du pendule pour régler le mouvement des horloges. Dans des recherches de précision, lorsque l'angle α est un peu plus grand et que l'on a besoin d'en tenir compte, on conserve un terme de plus dans la série (3) et l'on y remplace sin $\frac{1}{2}\alpha$ par $\frac{1}{2}\alpha$, ce qui donne

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right).$$

Dans un pendule réel, la masse pesante a toujours des dimensions finies, et de plus la tige a également une masse et un poids déterminés ; néanmoins, nous verrons que le calcul des oscillations de ce pendule matériel se ramène à celui du mouvement d'un certain pendule simple, et par suite aux formules précédentes.

D'après la formule approchée (4), la durée de l'oscillation du pendule est proportionnelle à la racine carrée de sa longueur et en raison inverse

de la racine carrée de l'accélération g due à la pesanteur, et ceci fournit un moyen précis de mesurer l'intensité de la pesanteur en un lieu donné de la terre. Supposons, en effet, que l'on fasse en ce lieu osciller un pendule de longueur l, et que l'on compte le nombre n des oscillations dans un temps θ. On aura donc, T étant la durée d'une demi-oscillation,

$$T = \frac{\theta}{2n}, \quad \frac{\theta}{2n} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

et par suite

$$g = \frac{4n^2\pi^2 l}{\theta^2}.$$

Les quantités qui figurent dans le second membre étant mesurées avec exactitude, on en déduira la valeur de g. C'est par ce moyen que l'on a déterminé le nombre 9,809 dont nous avons fait usage, et que l'on a constaté les lois de la variation de la pesanteur suivant la latitude.

158. *Pendule cycloïdal.* — Un point pesant se meut sans frottement sur une cycloïde renversée à base horizontale. Déterminer son mouvement.

Soient a le rayon du cercle générateur, z la distance MP du mobile à la base, s l'arc BM compté du point le plus bas; z_0, s_0 les valeurs de z et s au point A, où la vitesse est supposée nulle. On a trouvé (Cours d'An., **342**) pour la longueur de l'arc compté de l'origine O de la cycloïde et pour l'ordonnée z, en fontion de ω,

$$4a\left(1 - \cos\tfrac{1}{2}\omega\right), \quad z = a(1 - \cos\omega) = 2a\sin^2\tfrac{1}{2}\omega,$$

et par suite,

$$s = 4a - 4a\left(1 - \cos\tfrac{1}{2}\omega\right) = 4a\cos\tfrac{1}{2}\omega, \quad z = 2a - \frac{s^2}{8a},$$

et aussi

$$z_0 = 2a - \frac{s_0^2}{8a}.$$

D'autre part, le théorème de la force vive donne l'équation

$$v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = 2g(z - z_0) = g\,\frac{s_0^2 - s^2}{4a},$$

d'où

$$dt = -2\sqrt{\frac{a}{g}}\,\frac{ds}{\sqrt{s_0^2 - s^2}},$$

le signe — étant déterminé par le sens du mouvement. De là on tire, en intégrant et prenant $t = 0$ pour $s = s_0$,

$$t = 2\sqrt{\frac{a}{g}} \arc \cos \frac{s}{s_0}, \quad s = s_0 \cos \frac{t}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}.$$

Le point M oscille de part et d'autre du point le plus bas; la durée T de l'oscillation est indépendante de l'amplitude et égale à $\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$. La courbe est *tautochrone*.

159. Nous avons fait abstraction jusqu'ici du frottement que la courbe exerce sur le point mobile. Nous allons considérer, pour plus de généralité, que le mobile éprouve, soit par le frottement de la courbe, soit par la résistance d'un milieu ambiant, une réaction R directement opposée à la vitesse du point et représentée par une fonction $mf(v)$ de cette vitesse. Pour parvenir simplement à l'équation du mouvement, écrivons que le travail élémentaire de la force motrice P augmenté de celui de la réaction R égale le demi-accroissement de la force vive dans le temps infiniment petit dt. Nous aurons l'équation

$$d \cdot \frac{mv^2}{2} = \text{P}ds \cos \overline{\text{P}v} - mf(v)\,ds,$$

car $\cos \overline{\text{R}v} = -1$. Admettons, de plus, que P dérive d'un potentiel $m\varphi(x, y, z)$; l'équation précédente deviendra

$$(5) \qquad d \cdot v^2 = 2\,d \cdot \varphi(x, y, z) - 2\,f(v)\,ds.$$

Au moyen des équations de la courbe, on exprimera x, y, z en fonction d'une même variable auxiliaire θ, et par suite, v ou $ds : dt$ en fonction de θ et $d\theta : dt$. On aura donc à intégrer une équation différentielle du second ordre entre θ et t, et si l'on résout ce problème, x, y, z seront connus en fonction du temps et le mouvement du point sera connu.

Exercices.

1. Déterminer la courbe située dans un plan vertical, telle qu'un point pesant, partant sans vitesse d'un point donné A de cette courbe, mette le même temps à atteindre un point quelconque M de la courbe que s'il parcourait la corde AM.

R. Soient r la distance AM, θ l'angle de AM avec la verticale. Le théorème de la force vive donne la relation

$$dt = \frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{r \cos \theta}}.$$

En y supposant θ constant, on en déduit, pour le temps que le mobile mettrait à parcourir la corde AM,

$$t_1 = \sqrt{\frac{2r}{g \cos \theta}}, \quad \text{d'où} \quad dt_1 = \frac{1}{\sqrt{2g}}\left(\frac{dr}{r} + \frac{\sin \theta \, d\theta}{\cos \theta}\right)\sqrt{\frac{r}{\cos \theta}}.$$

En égalant dt_1 à dt, comme l'exige l'énoncé, on a la relation caractéristique de la courbe

$$r(1 - \operatorname{tg}^2 \theta)\, d\theta = 2 \operatorname{tg} \theta . dr, \quad r^2 = C \sin 2\theta \ (C = \text{const.}).$$

La courbe est une lemniscate dont l'axe est incliné de 45° sur la verticale (Saladini).

2. Un point pesant parcourt sans frottement une hélice dont l'axe est vertical. Déterminer le mouvement du point, sa vitesse à un instant donné, la réaction normale de l'hélice.

R. L'axe des z positifs suivant l'axe de l'hélice, de haut en bas ; le plan XY passant par le point où la vitesse est nulle ; a le rayon du cylindre, τ l'angle sous lequel l'hélice coupe les génératrices du cylindre. On trouve

$$z = \frac{gt^2}{2} \cos^2 \tau, \quad v = gt \cos \tau \ (\textit{Mouv. unif. varié}).$$

La réaction normale de l'hélice est la résultante d'une force égale à

$$\frac{mg^2t^2 \cos^2 \tau \sin^2 \tau}{a} = \frac{2mgz \sin^2 \tau}{a}$$

dirigée perpendiculairement à l'axe, et d'une force verticale $mg \sin \tau$ en sens contraire de la pesanteur.

3. Un point M, sollicité vers un centre O par une force qui est une fonction donnée $mf(r)$ de la distance OM $= r$, est assujetti à se mouvoir sans frottement sur une droite fixe AX. Il est écarté d'une très petite quantité x_0 de la projection A du point O sur la droite fixe, et abandonné sans vitesse. Quelle est son mouvement ?

R. Appelons x la distance AM, a la perpendiculaire OA ; l'équation du mouvement

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -f(r)\frac{x}{r},$$

en observant que $r = \sqrt{a^2 + x^2}$ et négligeant les termes en x^3 dans le développement de r^{-1} et de $f(r)$, devient

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu^2 x = 0, \quad \left[\mu^2 = \frac{f(a)}{a}\right].$$

On tire de là

$$x = x_0 \cos \mu t, \quad v = -\mu x_0 \sin \mu t.$$

Mouvement oscillatoire périodique.

4. Un point se meut sans frottement sur une spirale logarithmique $r = ae^{\alpha\theta}$, sous l'action d'une force dirigée vers le pôle O et égale à $m\mu : r^2$. Pour $t = 0$, on a $v = 0$, $r = a$. Déterminer le temps T que le mobile met à atteindre le pôle O.

R. L'intégrale de la force vive donne

$$v^2 = 2\mu\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Exprimant ds en fonction de r et dr, on trouvera

$$T = \frac{\sqrt{a(\alpha^2+1)}}{\alpha\sqrt{2\mu}}\int_0^a r^{\frac{1}{2}}(a-r)^{-\frac{1}{2}}dr = \frac{\pi}{2\alpha}\sqrt{\frac{a^3(\alpha^2+1)}{2\mu}}.$$

5. Mouvement d'un point pesant sur un cercle vertical, en supposant une résistance directement opposée à la vitesse et proportionnelle à celle-ci (*Pendule simple dans un milieu résistant*).

R. Soient l le rayon du cercle, θ l'angle du pendule avec la verticale. On fera dans l'équation (5)

$$v = -l\frac{d\theta}{dt}, \quad f(v) = -kl\frac{d\theta}{dt}, \quad \varphi(x, y, z) = gl\cos\theta, \quad ds = -ld\theta,$$

et l'on aura pour l'équation différentielle du mouvement

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + k\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0.$$

Pour de très-petites oscillations, on peut remplacer $\sin\theta$ par θ; on retombe sur l'équation de l'ex. 6, § 1. Les conclusions trouvées sont applicables. Mouvement oscillatoire à oscillations de durée constante, d'amplitude décroissante.

§ 3. MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL SUR UNE SURFACE FIXE.

160. Lorsqu'un point matériel est assujetti à rester sur une surface fixe, dont l'équation

$$F(x, y, z) = 0$$

est donnée et dont le frottement est négligeable, on peut encore appliquer les équations du mouvement d'un point libre en joignant à la force motrice P la réaction normale N de la surface. Les cosinus directeurs de N sont (62)

$$\pm\frac{1}{V}\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \pm\frac{1}{V}\frac{\partial F}{\partial y}, \quad \pm\frac{1}{V}\frac{\partial F}{\partial z},$$

et les équations différentielles du mouvement seront, par conséquent,

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X \pm \frac{N}{V}\frac{\partial F}{\partial x},\\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y \pm \frac{N}{V}\frac{\partial F}{\partial y},\\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z \pm \frac{N}{V}\frac{\partial F}{\partial z}.\end{aligned}\right.$$

L'équation de la surface, jointe aux équations (1) et aux données initiales, détermine les quatre fonctions inconnues du temps x, y, z et N.

Le double signe qui affecte les termes en N se rapporte aux deux directions opposées suivant lesquelles la réaction de la surface peut agir, l'une *extérieure*, l'autre *intérieure*. On considérera ($\pm$N) comme une inconnue que l'on éliminera entre les équations (1), et lorsque l'on aura trouvé x, y, z en fonction de t, la substitution de leurs valeurs dans une des équations (1) donnera la valeur de ($\pm$N), et par le signe qu'elle lui attribuera fera connaître si c'est le signe supérieur ou le signe inférieur qu'il faut adopter dans les équations (1); par suite, on saura dans quel sens la réaction N s'exerce.

161. Lorsqu'il existe une fonction des forces, on a

$$Xdx + Ydy + Zdz = m\,d.\varphi(x, y, z),$$

et l'intégrale de la force vive a lieu (**147**), ce qui facilite la solution du problème. On montrerait facilement, comme nous l'avons fait pour le mouvement sur une courbe fixe, que la pression sur la surface est la résultante de la force centrifuge et de la composante de P normalement à la trajectoire; mais comme ici la première de ces deux forces n'est pas connue en direction, cette construction n'offre plus les mêmes avantages.

Si le point mobile n'est sollicité par aucune force motrice P et que la réaction de la surface agisse seule, l'intégrale de la force vive devient

$$v^2 = C;$$

le *mouvement est uniforme*. De plus, la composante normale de P disparaissant, la pression du point sur la surface se confond en grandeur et en direction avec la force centrifuge $mv^2 : R$; donc *le rayon de courbure de la trajectoire est dirigé, en chaque point, suivant la normale à la surface* $F = 0$. Une courbe tracée sur une surface et jouissant de la propriété précédente se nomme une *ligne géodésique* de la surface; elle est, en général, la plus courte que l'on puisse mener sur celle-ci entre deux quelconques de ses points.


Fig. 92.

162. Comme exemple du mouvement d'un point sur une surface, nous étudierons celui d'un point pesant sur une surface sphérique. Prenons le centre O pour origine, l'axe positif OZ vertical dans le sens de la pesanteur; soit a le rayon de

la sphère. On a ici

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = mg.$$

Les cosinus directeurs de la normale en M (x, y, z) vers le centre étant $-\frac{x}{a}$, $-\frac{y}{a}$, $-\frac{z}{a}$, nous aurons, en considérant pour éviter les doubles signes, la quantité N comme positive ou négative selon que la réaction agit vers l'intérieur ou vers l'extérieur de la sphère,

$$(2) \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{Nx}{a}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{Ny}{a}, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = mg - \frac{Nz}{a}.$$

L'équation de la force vive devient

$$(3) \qquad v^2 = 2gz + C.$$

Introduisons comme variables l'angle θ que fait le rayon OM avec OZ, et l'angle ψ que fait le plan mobile ZOM avec le plan fixe XZ. La vitesse angulaire du plan ZOM autour de la verticale étant $d\psi : dt$, la vitesse d'entraînement du point M par ce plan sera $a \sin\theta\, d\psi : dt$; sa vitesse relative dans ce plan mobile est évidemment $a\, d\theta : dt$, et comme ces deux composantes sont perpendiculaires l'une à l'autre, on a, pour la vitesse totale v,

$$v^2 = a^2\left(\frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2\theta\frac{d\psi^2}{dt^2}\right).$$

Substituons dans (3), divisons par a^2, remplaçons z par $a\cos\theta$, posons $C = a^2h$; il viendra

$$(4) \qquad \frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2\theta\frac{d\psi^2}{dt^2} = \frac{2g}{a}\cos\theta + h.$$

D'autre part, la force motrice mg et la réaction N étant toutes deux dans le plan vertical ZOM, leur résultante va rencontrer l'axe OZ, et le théorème des aires a lieu pour le plan XY (**142**). On a donc

$$\rho^2 d\psi = a^2 \sin^2\theta d\psi = C_1\, dt,$$

ou, divisant par $a^2 \sin^2\theta dt$ et posant $C_1 = a^2k$,

$$(5) \qquad \frac{d\psi}{dt} = \frac{k}{\sin^2\theta}.$$

L'élimination de $d\psi : dt$ entre (4) et (5) conduit à l'équation

$$(6) \qquad \frac{d\theta^2}{dt^2} = h + \frac{2g}{a}\cos\theta - \frac{k^2}{\sin^2\theta},$$

d'où l'on tire, en multipliant par $\sin^2\theta$ et posant $\cos\theta = u$,

$$\frac{du^2}{dt^2} = \left(h + \frac{2g}{a}u\right)(1 - u^2) - k^2, \tag{7}$$

d'où encore

$$dt = \pm \frac{du}{\sqrt{\left(h + \frac{2g}{a}u\right)(1 - u^2) - k^2}}.$$

La valeur de t en fonction de u s'obtient ainsi par une quadrature qui se ramène aux intégrales elliptiques; connaissant t en fonction de $\cos\theta$, on en déduit θ en fonction de t. L'équation (5) devient

$$d\psi = \pm \frac{k\,du}{(1 - u^2)\sqrt{\left(h + \frac{2g}{a}u\right)(1 - u^2) - k^2}}. \tag{8}$$

Les constantes h, k et celles qu'introduisent les quadratures (7) et (8) se déterminent par les données initiales. Soient θ_0, ψ_0, θ'_0, ψ'_0 les valeurs, pour $t = 0$, de θ, ψ, et de leurs dérivées par rapport au temps. On a, par les équations (4) et (5)

$$h = \theta_0'^2 + \psi_0'^2 \sin^2\theta_0 - \frac{2g}{a}\cos\theta_0, \quad k = \psi'_0 \sin^2\theta_0. \tag{9}$$

Quant $\psi'_0 = 0$, la vitesse initiale du mobile est dans un plan passant par la verticale OZ, $k = 0$ et l'on retombe, comme on le voit facilement, sur l'équation du mouvement du pendule simple.

On détermine la réaction N pour une position quelconque du point mobile, en ajoutant membre à membre les équations (2) multipliées respectivement par x, y, z. On a

$$m\left(x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} + z\frac{d^2z}{dt^2}\right) = mgz - \mathrm{N}\frac{x^2 + y^2 + z^2}{a} = mgz - \mathrm{N}a.$$

Mais la relation $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, différentiée deux fois, donne

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt} = 0, \quad x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} + z\frac{d^2z}{dt^2} = -v^2,$$

ce qui transforme l'équation ci-dessus en celle-ci :

$$\mathrm{N} = \frac{m(v^2 + gz)}{a} = \frac{m(3gz + \mathrm{C})}{a},$$

en vertu de l'équation (3). Cette formule montre que N est toujours positif en même temps que z, c'est-à-dire que la réaction N est dirigée vers l'intérieur de la sphère lorsque le mobile est au-dessous du plan horizontal mené par le centre O.

163. Lorsque $\theta_0, \theta'_0, \psi'_0$ sont très petits, les valeurs (9) de h et k montrent que k est très peu différent de zéro et h de $-2g:a$. Le second membre de l'équation (4) doit être toujours positif, puisque le premier l'est, donc $\cos\theta$ doit toujours rester très voisin de l'unité ou θ de zéro. Dans ce cas, le rayon vecteur OM fait toujours un très petit angle avec la verticale, et si l'on néglige le cube de θ, on aura

$$\sin\theta = \theta, \quad u = \cos\theta = 1 - \tfrac{1}{2}\theta^2, \quad du = -\theta d\theta, \quad 1 - u^2 = \theta^2,$$

en sorte que l'équation (7) deviendra

$$\theta^2 \frac{d\theta^2}{dt^2} = \left(h + \frac{2g}{a} - \frac{g}{a}\theta^2\right)\theta^2 - k^2 = \frac{g}{a}\left[-\theta^4 + \left(\frac{ha}{g} + 2\right)\theta^2 - \frac{ak^2}{g}\right].$$

Cette expression devant rester positive, θ^2 varie entre une limite inférieure β^2 et une limite supérieure α^2, et l'on a

$$\theta^2 \frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{g}{a}(\alpha^2 - \theta^2)(\theta^2 - \beta^2).$$

On peut donc poser, en désignant par u une variable auxiliaire,

$$\theta^2 = \alpha^2 \cos^2 u + \beta^2 \sin^2 u,$$

d'où l'on tire

$$\alpha^2 - \theta^2 = (\alpha^2 - \beta^2)\sin^2 u, \quad \theta^2 - \beta^2 = (\alpha^2 - \beta^2)\cos^2 u,$$

$$\theta d\theta = -(\alpha^2 - \beta^2)\sin u \cos u du,$$

ce qui transforme l'équation ci-dessus en celle-ci :

$$\frac{du^2}{dt^2} = \frac{g}{a} = \mu^2,$$

et par suite, en déterminant la constante de façon que u et t s'annulent ensemble,

$$u = \mu t,$$

d'où

$$\theta^2 = \alpha^2 \cos^2 \mu t + \beta^2 \sin^2 \mu t. \tag{10}$$

On voit par là que l'angle θ oscille périodiquement entre α et β, la durée τ de la période comprise entre le maximum et le minimum étant $\frac{\pi\mu}{2}$.

L'équation (5) donne ensuite

$$d\psi = \frac{kdt}{\sin^2\theta} = \frac{kdt}{\theta^2} = \frac{kdt}{\alpha^2\cos^2\mu t + \beta^2\sin^2\mu t}.$$

Intégrant et prenant le plan XZ de façon que ψ soit nul en même temps que t, on aura

$$\psi = \frac{k}{\alpha\beta\mu}\,\text{arc tg}\left(\frac{\beta}{\alpha}\,\text{tg}\,\mu t\right).$$

Mais, α et β étant les valeurs de θ qui annulent $d\theta : dt$, on a

$$\alpha^2\beta^2 = \frac{ak^2}{g}, \quad \text{d'où} \quad \frac{k}{\alpha\beta\mu} = 1,$$

donc

$$\psi = \text{arc tg}\left(\frac{\beta}{\alpha}\,\text{tg}\,\mu t\right), \quad \text{ou} \quad (11)\ \alpha\,\text{tg}\,\psi = \beta\,\text{tg}\,\mu t.$$

Cette équation détermine ψ en fonction de t, et fait voir que ψ croît indéfiniment avec t, en passant par les valeurs $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \ldots$ aux époques $t = 0, \tau, 2\tau, 3\tau, 4\tau, \ldots$ qui correspondent aux maxima et aux minima de θ. Le plan ZOM tourne donc autour de la verticale OZ, toujours dans le même sens, en faisant un tour entier en un temps égal à $4\tau = 2\pi\mu$. Enfin, l'équation (11) donne

$$\frac{\sin\psi}{\beta\sin\mu t} = \frac{\cos\psi}{\alpha\cos\mu t} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2\cos^2\mu t + \beta^2\sin^2\mu t}} = \frac{1}{\theta},$$

d'où

$$\theta\sin\psi = \beta\sin\mu t, \quad \theta\cos\psi = \alpha\cos\mu t,$$

et, par suite,

$$x = a\sin\theta\cos\psi = a\theta\cos\psi = a\alpha\cos\mu t,$$
$$y = a\sin\theta\sin\psi = a\theta\sin\psi = a\beta\sin\mu t,$$

d'où enfin, éliminant t,

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = a^2.$$

Cette équation représente la trajectoire de la projection du point mobile sur le plan XY ; elle montre que cette projection décrit une petite ellipse dont le centre est en O, et dont les demi-axes sont $a\alpha$, $a\beta$.

Ces résultats ne sont qu'approximatifs. M. Resal a montré que, si l'on tient compte des quantités de l'ordre de θ^4, l'ellipse a un mouvement de rotation autour de la verticale.

Exercices.

1. Mouvement d'un point pesant sur un plan incliné, sans frottement.

R. Prenons le point de départ pour origine O, l'axe OZ vertical dans le sens de la pesanteur; l'axe OY horizontal dans le plan incliné; soient α l'inclinaison du plan sous le plan horizontal, v_0 la vitesse initiale dans le plan, β l'angle que sa direction fait avec OY. Les équations du mouvement seront

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\mathrm{N}\sin\alpha,\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=0,\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=mg-\mathrm{N}\cos\alpha,$$

et l'on trouvera

$$x=\left(\frac{gt^2}{2}\sin\alpha-v_0t\sin\beta\right)\cos\alpha,\quad y=v_0t\cos\beta,\quad z=\left(\frac{gt^2}{2}\sin\alpha-v_0t\sin\beta\right)\sin\alpha,$$

$$x=\left(\frac{g\sin\alpha}{2v_0^2\cos^2\beta}y^2-y\,\mathrm{tg}\,\beta\right)\cos\alpha,\quad \mathrm{N}=mg\cos\alpha.$$

La trajectoire est une parabole; la pression sur le plan est constante.

2. Un point M, mobile sans frottement sur la surface d'un cône circulaire droit, est sollicité par une force normale à l'axe du cône, en raison inverse du carré de sa distance à cet axe. Déterminer son mouvement.

R. Soient 2β l'angle au sommet O du cône, r la distance OM, ψ l'angle entre le plan passant par l'axe et le point M et sa position initiale. Les théorèmes des aires et de la force vive donnent

$$r^2\frac{d\psi}{dt}=k,\quad \frac{dr^2}{dt^2}+r^2\sin^2\beta\frac{d\psi^2}{dt^2}=\frac{2\mu}{r\sin\beta}+h,$$

k et h étant des constantes. On en déduit

$$d\psi=\pm\frac{k\,dr}{r^2\sqrt{h+\dfrac{2\mu}{r\sin\beta}-\dfrac{k^2\sin^2\beta}{r^2}}},\quad dt=\pm\frac{dr}{\sqrt{h+\dfrac{2\mu}{r\sin\beta}-\dfrac{k^2\sin^2\beta}{r^2}}}.$$

On reconnaît que la projection du mobile sur un plan normal à l'axe décrit une section conique dont un foyer est sur l'axe du cône, le rayon focal décrivant des aires proportionnelles au temps. Quand la courbe est une ellipse, la distance comprise entre les positions extrêmes de la projection du mobile sur l'axe du cône est égale à

$$\frac{2\cot\beta}{h}\sqrt{\mu^2+hk^2\sin^4\beta}.$$

3. Un point matériel pesant se meut sur une surface en s'écartant toujours très peu du point le plus bas O de celle-ci; déterminer son mouvement.

R. Plaçons l'origine en O, l'axe des z vertical vers le haut, le plan XY horizontal tangent à la surface en O; x, y, z sont supposés rester très petits. Développant z par la formule de Maclaurin suivant les puissances de x, y; observant que z_0, p_0, q_0 sont nuls, et négligeant les termes du 3^{me} ordre en x, y, on obtient un résultat de la forme

$$z = \frac{1}{2}(r_0 x^2 + 2s_0 xy + t_0 y^2),$$

que l'on réduit, par un choix convenable des axes OX, OY, à la forme

$$2z = \frac{x^2}{R} + \frac{y^2}{R'},$$

R, R′ étant des constantes connues. En négligeant toujours les termes d'ordre supérieur, on trouve

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{Nx}{R}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{Ny}{R'}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -g + N, \quad N = g,$$

d'où

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{gx}{R} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{gy}{R'} = 0,$$

équations faciles à intégrer. Discuter les formules.

4. Un point est assujetti à se mouvoir sur la surface conique $z^2 = 2xy$; les composantes de la force accélératrice qui le sollicite sont

$$X = -\frac{v_x^2}{x}, \quad Y = -\frac{v_y^2}{y}, \quad Z = -\frac{v_z^2}{z};$$

déterminer son mouvement et la réaction de la surface. Examiner en particulier le cas où la vitesse initiale est perpendiculaire au rayon vecteur.

R. Formant les équations (1), et éliminant N par des combinaisons convenables, on trouve les intégrales

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2\mu t + \nu, \quad x^2 - y^2 = 2\mu' t + \nu',$$

μ, ν, μ', ν' étant des constantes que déterminent les données initiales. Combinées avec l'équation de la surface, ces équations donnent

$$x + y = \sqrt{2\mu t + \nu}, \quad x - y = \frac{2\mu' t + \nu'}{\sqrt{2\mu t + \nu}},$$

d'où l'on tire ensuite

$$x = \frac{2(\mu + \mu')t + \nu + \nu'}{2\sqrt{2\mu t + \nu}}, \quad y = \frac{2(\mu - \mu')t + \nu - \nu'}{2\sqrt{2\mu t + \nu}},$$

$$z^2 = \frac{(2\mu t + \nu)^2 - (2\mu' t + \nu')^2}{2(2\mu t + \nu)}.$$

Enfin, les équations différentielles du mouvement donnent

$$N = \frac{1}{2x}\frac{d^2 . x^2}{dt^2} + \frac{1}{2y}\frac{d^2 . y^2}{dt^2}.$$

Dans le cas particulier indiqué, μ est nul, r est constant, la projection de la trajectoire sur le plan XY est une droite $x + y = \sqrt{\nu}$, etc.

5. Lorsqu'un point M se meut sur une surface sous l'action d'une force accélératrice P, si γ désigne l'angle compris entre la direction de P et celle de la normale à la surface en M, α l'angle compris entre la projection de P sur le plan tangent en M et la vitesse du point, θ l'angle du plan osculateur de la trajectoire avec le plan tangent, $d\varphi$ l'angle de contingence de la trajectoire, N la réaction de la surface, démontrer que l'on a

$$v^2 \cos\theta\, d\varphi = P \sin\gamma \sin\alpha\, ds, \quad N = v^2 \sin\theta \frac{d\varphi}{ds} - P\cos\gamma,$$

$$v = Ce^{\int \cos\theta \cot\alpha\, d\varphi} \text{ (C = const.)}.$$

Cas où la surface est plane et la direction de P constante.

6. Lorsqu'un point se meut sur une surface sphérique et n'est soumis d'ailleurs qu'à l'influence du frottement, à un instant quelconque, sa force vive est égale au produit du rayon de la sphère par la pression que le point exerce sur celle-ci.

7. Conséquence du théorème de Yvon Villarceau.

CHAPITRE XIII.

THÉORÈMES GÉNÉRAUX SUR LE MOUVEMENT DES SYSTÈMES.

§ 1. THÉORÈMES DE LA QUANTITÉ TOTALE DE MOUVEMENT, DU MOUVEMENT DU CENTRE DE GRAVITÉ, DES MOMENTS ET DES AIRES.

164. Nous exposerons plus loin la méthode de d'Alembert pour former les équations différentielles du mouvement d'un système quelconque, mais nous pouvons dès à présent, au moyen des simples équations du mouvement d'un point libre (**139**), établir directement quelques propriétés générales applicables au mouvement de tout système matériel, et qui, outre qu'elles constituent les plus beaux théorèmes de la dynamique, fournissent encore dans beaucoup de cas certaines intégrales des équations du mouvement dont la connaissance facilite singulièrement la solution des problèmes.

Ainsi que nous l'avons déjà remarqué, tout système matériel, quelles que soient les forces qui agissent sur lui et les liaisons qui existent entre ses parties, quels que soient les obstacles qui gênent ses mouvements, constitue en définitive un assemblage de points matériels, dont le nombre immense échappe à toutes nos appréciations, isolés et agissant les uns sur les autres suivant des lois déterminées. Les forces qui sollicitent ces points se rangent dans deux catégories : 1° Les *forces intérieures*, ou qui résultent des actions réciproques de points appartenant au système; telles sont les forces moléculaires, les réactions développées dans l'intérieur des liaisons, les attractions ou répulsions à des distances sensibles, etc. En vertu du troisième principe de la mécanique, ces forces intérieures sont nécessairement deux à deux égales et directement opposées; 2° les *forces extérieures*, c'est-à-dire celles qui proviennent de points, de corps, en général de causes quelconques situées en dehors du système. Telles sont la pesanteur si le système se réduit à un corps placé à la surface de la terre; nos propres efforts physiques s'exerçant sur un tel corps; l'attraction du soleil pour tout système faisant partie de notre globe, etc. Si le système matériel considéré est gêné par des obstacles fixes, comme des points fixes, un plan résistant, les réactions de ces obstacles sur le système doivent être rangées parmi les forces extérieures. En les joignant aux forces motrices qui sollicitent le système, celui-ci pourra toujours être regardé comme libre.

En résumé, nous pouvons toujours appliquer à chacun des points matériels du système, si nous tenons compte de toutes les forces, extérieures ou intérieures, qui agissent sur lui, les trois équations du mouvement d'un point libre, données au n° **139**.

165. I. *Théorème de la quantité totale de mouvement.* — Soient, à une époque quelconque t, m la masse, x, y, z les coordonnées rectangles d'un point quelconque M du système; X, X_1 respectivement les sommes des composantes parallèles à OX des forces extérieures et des forces intérieures qui sollicitent ce point; Y, Y_1; Z, Z_1, les sommes semblables pour les axes OY, OZ; le mouvement du point M est déterminé par les trois équations

$$(1)\qquad m\frac{d^2x}{dt^2}=X+X_1,\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y+Y_1,\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=Z+Z_1.$$

Chaque point du système donnant lieu à trois équations pareilles, si nous ajoutons membre à membre les équations relatives à un même axe

pour tous les points du système, et si nous désignons par Σ une somme qui s'étend à tous ces points, nous aurons

$$\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X + \Sigma X_1, \quad \Sigma m \frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma Y + \Sigma Y_1, \quad \Sigma m \frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma Z + \Sigma Z_1.$$

Mais les forces intérieures sont deux à deux égales et directement opposées; leurs composantes parallèles à un même axe sont donc deux à deux égales et de signes contraires; donc $\Sigma X_1 = 0$, $\Sigma Y_1 = 0$, $\Sigma Z_1 = 0$, et par suite

$$(2) \qquad \Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X, \quad \Sigma m \frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma Y, \quad \Sigma m \frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma Z.$$

D'ailleurs, toute droite de l'espace peut être choisie comme axe des x; donc, la première de ces équations suffit pour donner ce théorème :

Dans tout système matériel en mouvement, à un instant quelconque, la somme algébrique des projections des forces conservées de tous les points sur un axe quelconque, est égale à la somme des projections des forces extérieures sur ce même axe.

Les équations (2) peuvent s'écrire ainsi :

$$(3) \qquad \frac{d}{dt}\Sigma m v_x = \Sigma X, \quad \frac{d}{dt}\Sigma m v_y = \Sigma Y, \quad \frac{d}{dt}\Sigma m v_z = \Sigma Z.$$

Or, mv_x, mv_y, mv_z sont les composantes de la quantité de mouvement du point M. Concevons que l'on fasse la réduction des quantités de mouvement de tous les points du système au point O, pris pour centre de réduction, suivant les mêmes règles qui nous ont servi, dans la statique, pour la réduction des forces appliquées à un solide : $\Sigma m v_x$, $\Sigma m v_y$, $\Sigma m v_z$, seront les composantes suivant OX, OY, OZ de la quantité de mouvement résultante, ou encore, si nous représentons par une droite OV cette résultante des quantités de mouvement transportées à l'origine, les coordonnées ξ, η, ζ du point V, extrémité de cette droite. Si donc nous imaginons un point mobile coïncidant à chaque instant avec ce point V, les composantes de sa vitesse seront

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{d}{dt}\Sigma m v_x, \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{d}{dt}\Sigma m v_y, \quad \text{etc.}$$

et les équations (3) deviendront

$$\frac{d\xi}{dt} = \Sigma X, \quad \frac{d\eta}{dt} = \Sigma Y, \quad \frac{d\zeta}{dt} = \Sigma Z.$$

Mais ΣX, ΣY, ΣZ sont les composantes parallèles à OX, OY, OZ de la résultante OR des forces extérieures transportées parallèlement à elles-mêmes au point O. De là le théorème suivant : *Dans un système matériel en mouvement, si l'on détermine pour chaque instant la résultante* OV *des quantités de mouvement de tous les points du système et la résultante* OR *des forces extérieures transportées en un même centre de réduction fixe* O, OR *représentera, en grandeur et en direction, la vitesse du point* V; *le point* R *sera donc l'index du point* V (**27**).

C'est le *théorème de la quantité totale de mouvement.*

166. Supposons qu'il n'y ait pas de forces extérieures; ou, plus généralement, que ces forces vérifient les équations

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0;$$

les équations (3) donneront évidemment, par l'intégration,

$$(4) \qquad \Sigma m v_x = A, \quad \Sigma m v_y = B, \quad \Sigma m v_z = C,$$

A, B, C étant des constantes, équations qui peuvent s'énoncer ainsi :

Lorsque les forces extérieures qui sollicitent un système matériel quelconque sont nulles à chaque instant, ou sont telles qu'étant transportées parallèlement à elles-mêmes en un même point, elles s'y feraient équilibre, la somme algébrique des projections des quantités de mouvement de tous les points du système, sur un axe fixe quelconque, reste constante pendant toute la durée du mouvement.

Et, par conséquent, *la résultante des quantités de mouvement de tous les points du système, transportées parallèlement à elles-mêmes en un même point, reste constante en grandeur et en direction pendant toute la durée du mouvement.*

C'est en cela que consiste le théorème de *la conservation de la quantité totale du mouvement.*

167. — II. *Théorème du mouvement du centre de gravité.* — Reprenons les équations (2); soient M la masse totale du système proposé; x_1, y_1, z_1 les coordonnées, à l'époque t, de son centre de gravité. Nous avons, comme on l'a vu (**101**),

$$Mx_1 = \Sigma mx, \quad My_1 = \Sigma my, \quad Mz_1 = \Sigma mz,$$

et par suite, à chaque instant,

$$M\frac{d^2x_1}{dt^2} = \Sigma m\frac{d^2x}{dt^2}, \qquad M\frac{d^2y_1}{dt^2} = \Sigma m\frac{d^2y}{dt^2}, \qquad M\frac{d^2z_1}{dt^2} = \Sigma m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Les équations (2) donnent donc celles-ci :

$$(5) \qquad M\frac{d^2x_1}{dt^2} = \Sigma X, \qquad M\frac{d^2y_1}{dt^2} = \Sigma Y, \qquad M\frac{d^2z_1}{dt^2} = \Sigma Z.$$

Or, ces équations sont précisément celles du mouvement d'un point libre qui aurait une masse M, dont les coordonnées seraient x_1, y_1, z_1, et qui serait soumis à l'action d'une force ayant pour composantes ΣX, ΣY, ΣZ, c'est-à-dire de la résultante des forces extérieures transportées en un même point. Si donc cette masse M a même position et même vitesse initiales que le centre de gravité du système, elle coïncidera constamment avec lui. De là le *théorème du mouvement du centre de gravité :*

Dans tout système matériel en mouvement, le centre de gravité se meut comme si toute la masse du système était concentrée en ce point, et que toutes les forces extérieures y fussent transportées parallèlement à elles-mêmes.

Si, en particulier, les forces extérieures satisfont constamment aux équations

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0,$$

le centre de gravité se meut comme un point qui n'est sollicité par aucune force; donc, *lorsqu'il n'y a pas de forces extérieures, ou lorsque ces forces sont telles que, transportées à chaque instant en un même point, elles s'y feraient équilibre, le centre de gravité du système ne peut avoir qu'un mouvement rectiligne et uniforme.*

168. Les théorèmes précédents conduisent à des conséquences importantes. En premier lieu, le problème que nous avons étudié dans le premier chapitre de la dynamique, celui du mouvement d'un simple point matériel, cesse d'être une pure abstraction pour trouver une application remarquable dans le mouvement des corps réels. Nous voyons en effet que dans tout corps, dans tout système matériel mobile, il y a un point particulier auquel s'appliquent les formules et les propriétés du mouvement précédemment étudié, et ce point est le centre de gravité du système. En sorte que si les forces extérieures sont connues, à chaque instant, en grandeur et en direction, il suffira de les supposer transportées au centre de gravité pour déterminer directement, au moyen des théories du chapitre XII, § 2, le mouvement de ce centre, sans que l'on ait à se préoccuper soit des forces intérieures, soit des mouvements que le système peut avoir autour de son centre de gravité. C'est ainsi que,

dans l'astronomie, on détermine le mouvement d'une planète autour du soleil en la réduisant d'abord à son centre de gravité, où l'on suppose réunie toute la masse de la planète.

Lorsque le système considéré n'est pas libre, il faut, comme on l'a vu, ranger au nombre des forces extérieures les réactions des obstacles, et le théorème du mouvement du centre de gravité est encore vrai dans ces conditions. Mais ces réactions étant elles-mêmes des forces inconnues dont la direction et l'intensité dépendent du mouvement du système et dont la détermination est un des objets du problème, le théorème ne fournit plus le moyen de calculer isolément le mouvement du centre de gravité, et l'avantage qu'on en retirait dans le cas d'un système libre n'existe plus en général.

169. Il résulte du théorème général énoncé plus haut que les forces intérieures qui existent ou se développent entre les différents points d'un système matériel, quelles qu'elles soient, sont absolument sans effet sur le mouvement de son centre de gravité, qui se déplace exclusivement sous l'influence des forces extérieures. Ainsi les chocs, les explosions, les réactions moléculaires, les combinaisons chimiques qui peuvent se produire entre les points du système ne troublent pas le mouvement du centre de gravité; si celui-ci est primitivement en repos, et qu'aucune force extérieure n'agisse sur le système, toutes ces actions intérieures ne pourront jamais déplacer le centre de gravité. C'est en cela, proprement, que consiste le principe de la *conservation du mouvement du centre de gravité.*

Par exemple, lorsque la force expansive des gaz développés par la combustion de la poudre lance au dehors le projectile d'une pièce d'artillerie, les actions auxquelles ce mouvement doit sont origine sont purement intérieures, par rapport au système composé de la pièce, du projectile et de la poudre. Si donc on fait abstraction de la réaction verticale du sol et de la pesanteur, forces extérieures qui sont sans influence sur le mouvement dans le sens horizontal, il faut que le centre de gravité de ce système reste immobile après l'explosion comme il l'était avant; aussi, pendant que le projectile et les gaz se transportent dans un sens, la pièce se meut en sens contraire : telle est la cause du *recul.* Si le frottement de la pièce contre le sol ne venait agir comme *force extérieure,* si elle était posée sur un plan parfaitement poli, cette immobilité rigoureuse du centre de gravité pourrait se constater.

Supposons qu'il s'agisse d'une bombe, et considérons-la isolément après sa sortie de la pièce. Son centre de gravité se meut comme un point matériel auquel serait appliquée la résultante des actions que la pesanteur exerce sur tous les points de la bombe, c'est-à-dire une force verticale égale au poids de celle-ci. Si donc nous faisons abstraction de la résistance de l'air, son mouvement sera celui d'un point matériel pesant, étudié au n° 150; il décrira une parabole à axe vertical suivant la loi trouvée. A un instant donné, le projectile fait explosion; ses fragments sont projetés en tous sens, les gaz de la poudre se répandent dans l'espace; mais, comme les actions chimiques qui déterminent l'explosion ne sont, par rapport à la bombe, que des forces intérieures, elles ne peuvent modifier le mouvement de son centre de gravité. Donc, après l'explosion du projectile, le centre de gravité du système composé de ses fragments et des molécules des gaz développés continue à décrire la même parabole, avec la même vitesse qu'il aurait eue si la bombe fût restée intacte. Il en est ainsi jusqu'au moment où l'un des fragments de la bombe atteint le sol; alors, la réaction du sol intervient comme une force extérieure qui modifie le mouvement du centre de gravité.

Les forces mises en jeu dans le corps humain sous l'influence de la volonté, et en vertu desquelles nous pouvons mouvoir nos membres, tourner la tête, etc., ne sont encore par rapport au système du corps entier que des forces intérieures toujours accompagnées de réactions égales et contraires : elles ne peuvent déplacer le centre de gravité du corps. Un homme entièrement isolé dans l'espace et soustrait à toute action étrangère pourrait bien remuer les bras, les jambes, exécuter une foule de mouvements; il ne réussirait pas à déplacer si peu que ce soit son centre de gravité. Quand, dans la marche, nous portons le haut du corps en avant, la partie inférieure tend à se porter en arrière; mais le sol sur lequel nous nous appuyons s'y oppose, et c'est la réaction de cet obstacle qui, agissant comme une force extérieure, porte en avant notre centre de gravité. C'est pourquoi, sur un sol très glissant, comme la glace, cette réaction faisant défaut dans le sens horizontal, il devient très difficile d'avancer.

Des remarques semblables s'appliquent au mouvement d'un train sur une voie ferrée, et, en général, à tous les mouvements que nous produi-

sons à la surface de la terre par des moteurs vivants ou inanimés; à tous ceux qui résultent des actions naturelles, telles que les éruptions volcaniques, les chutes d'eau, etc. Les forces qui agissent ici, considérées par rapport à l'ensemble du globe terrestre, ne sont que des forces intérieures; elles n'influent nullement sur le mouvement du centre de gravité de la masse totale, et pendant que certains corps se déplacent dans un sens, il faut que d'autres se meuvent en sens contraire, pour ne pas troubler la trajectoire que ce centre décrit sous l'influence des forces extérieures.

Enfin, si nous appliquons ces considérations à un système plus vaste encore, celui que forment le soleil et tout notre système planétaire, les forces extérieures qui agissent sur ce système, libre dans l'espace, se réduisent aux actions émanant des étoiles fixes. Mais, à cause de leur prodigieux éloignement, ces corps célestes n'exercent sur notre système que des actions très faibles et probablement négligeables. S'il en est ainsi, le soleil et les planètes constituent donc un système matériel soumis uniquement à l'action de forces intérieures. Quelque compliquées que soient ces actions intérieures, quels que soient les phénomènes physiques, chimiques, qui s'accomplissent dans cet immense groupe de points matériels, ils ne sauraient agir sur le mouvement du centre de gravité du système solaire : celui-ci est donc en repos, ou ne possède qu'un mouvement rectiligne et uniforme.

Évidemment, les conséquences que nous venons de tirer du théorème du mouvement du centre de gravité sont également applicables au théorème de la conservation de la quantité de mouvement. Ainsi, dans le système de points matériels formé par l'ensemble du soleil et des planètes, par suite de l'absence de forces extérieures sensibles, si l'on transporte en un point donné de l'espace les quantités du mouvement qui animent tous les points de ce système à un instant quelconque, leur résultante sera invariable en grandeur et en direction, quel que soit cet instant.

170. III. *Théorème des moments.* — Reprenons les équations (1); multiplions la troisième par y, la deuxième par z, et retranchons. Il vient

$$m\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)=(yZ-zY)+(yZ_1-zY_1).$$

Faisant la somme des équations semblables pour tous les points du

système, nous trouvons

$$\Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)=\Sigma(yZ-zY)+\Sigma(yZ_i-zY_i).$$

Lorsque deux forces sont égales et directement opposées, la somme de leurs moments par rapport à un axe quelconque est égale à zéro : il suffit, pour le voir, de remarquer que si leurs points d'application étaient liés invariablement, ces forces se feraient équilibre. Or, les forces intérieures du système sont deux à deux égales et opposées ; la somme de leurs moments par rapport à OX est donc nulle, et l'on a $\Sigma(yZ_i - zY_i) = 0$. Raisonnant de même sur les moments relatifs à OY, OZ, on tirera des équations (1) les relations suivantes :

$$(6)\quad\left\{\begin{aligned}\Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)&=\Sigma(yZ-zY),\\ \Sigma m\left(z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}\right)&=\Sigma(zX-xZ),\\ \Sigma m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)&=\Sigma(xY-yX),\end{aligned}\right.$$

dans lesquelles n'entrent plus que les forces extérieures. Mais l'expression

$$m\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

représente le moment de la force conservée du point m par rapport à OX ; l'axe OX étant une droite quelconque, on a le *Théorème des moments :*

Dans tout système matériel en mouvement, à chaque instant, la somme algébrique des moments des forces conservées de tous les points du système, par rapport à un axe quelconque, est égale à la somme des moments des forces extérieures par rapport au même axe.

On peut écrire les équations (6) sous la forme

$$(7)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Sigma m(yv_z-zv_y)&=\Sigma(yZ-zY),\\ \frac{d}{dt}\Sigma m(zv_x-xv_z)&=\Sigma(zX-xZ),\\ \frac{d}{dt}\Sigma m(xv_y-yv_x)&=\Sigma(xY-yX).\end{aligned}\right.$$

Concevons que l'on fasse encore au point O la réduction des quantités de mouvement de tous les points du système, comme si elles représentaient des forces appliquées à un solide, et soit OK l'axe du couple résultant de ces quantités de mouvement ou, plus brièvement, l'*axe d'impulsion* du système. Soit, de même, OG l'axe du couple résultant des forces extérieures relatif au même point O. D'après les formules du n° **85**, les projections de OK sur OX, OY, OZ, ou les coordonnées du point K, sont respectivement

$$K_x = \Sigma m\,(yv_z - zv_y),\quad K_y = \Sigma m\,(zv_x - xv_z),\quad K_z = \Sigma m\,(xv_y - yv_x);$$

celles du point G sont

$$G_x = \Sigma\,(yZ - zY),\quad G_y = \Sigma\,(zX - xZ),\quad G_z = \Sigma\,(xY - yX),$$

et les équations (7) deviennent

$$\frac{dK_x}{dt} = G_x,\quad \frac{dK_y}{dt} = G_y,\quad \frac{dK_z}{dt} = G_z.$$

De là résulte évidemment cette autre forme du théorème des moments : *Dans tous système matériel en mouvement, si l'on détermine pour chaque instant l'axe d'impulsion* OK *et l'axe* OG *du couple résultant des forces extérieures, pour un même centre de réduction fixe* O, *le point* G *sera l'index du point* K (**27**).

Sous cette forme, le théorème nous sera utile par la suite.

171. Si la somme des moments des forces extérieures par rapport à l'axe OZ est nulle pendant toute la durée du mouvement, de sorte que l'on ait $\Sigma\,(xY - yX) = 0$, la dernière équation (7) donnera

$$\frac{d}{dt}\Sigma m\,(xv_y - yv_x) = 0,\quad \text{ou}\quad \Sigma m\,(xv_y - yv_x) = \text{const.}$$

Or, l'axe OZ est quelconque; on peut donc dire que, *quand la somme des moments des forces extérieures par rapport à un axe fixe est constamment nulle*, ou, ce qui est la même chose, *quand l'axe du couple résultant des forces extérieures est constamment normal à une droite fixe, la somme des moments des quantités de mouvement de tous les points du système, par rapport à cette droite, reste invariable pendant toute la durée du mouvement.*

Supposons maintenant qu'il n'y ait pas des forces extérieures ou, plus généralement, que l'axe du couple résultant de ces forces relatif à

l'origine O soit nul à chaque instant. Les égalités

$$\Sigma(yZ - zY) = 0, \quad \Sigma(zX - xZ) = 0, \quad \Sigma(xY - yX) = 0$$

combinées avec les relations (7), donneront

$$(8) \quad \Sigma m(yv_z - zv_y) = A', \quad \Sigma m(zv_x - xv_z) = B', \quad \Sigma m(xv_y - yv_x) = C',$$

A', B', C' étant des constantes, qui se déterminent immédiatement au moyen des coordonnées et des vitesses initiales des points du système, car on a, par exemple, $A' = \Sigma m(y_0 v_{0z} - z_0 v_{0y})$. Les projections de OK sur OX, OY, OZ sont donc des constantes A', B', C'; OK est constant de grandeur et de direction. Donc

Dans un système matériel quelconque, lorsqu'il n'y a pas de forces extérieures, ou lorsque l'axe du couple résultant de ces forces relatif à un centre fixe O *est constamment nul, l'axe d'impulsion du système, relatif à ce même point* O, *est constant en grandeur et en direction pendant toute la durée du mouvement.*

Ou encore, *la somme des moments des quantités de mouvement du système par rapport à une droite quelconque, menée par le point* O, *reste invariable.*

C'est ce que l'on nomme le théorème de *la conservation des moments.*

172. — IV. *Théorèmes des aires.* — Ce théorème est, sous une forme géométrique, la reproduction du précédent. D'après ce qui a été exposé au n° **142**, l'expression

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = xv_y - yv_x$$

représente le double de la dérivée, par rapport au temps, de l'aire S décrite, dans le plan XY, par la projection du rayon vecteur OM sur ce plan, les aires étant positives lorsque le rayon projeté se meut de OX vers OY, négatives dans le cas contraire. Si donc l'équation

$$\Sigma(xY - yX) = 0$$

a lieu à chaque instant pour les forces extérieures, l'égalité

$$\Sigma m(xv_y - yv_x) = C'$$

qui en résulte (**171**), pourra s'écrire

$$\Sigma m\frac{dS}{dt} = \frac{C'}{2}, \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dt}\Sigma mS = \frac{C'}{2}, \quad \text{ou} \quad \Sigma mS = \frac{C't}{2},$$

en supposant les aires S comptées à partir des positions initiales des rayons vecteurs qui les décrivent, de manière à s'annuler avec t. Pour énoncer commodément ce résultat, le produit mS de la masse d'un point M par l'aire que décrit la projection de son rayon vecteur sur le plan XY sera nommé simplement *l'aire projetée sur le plan* XY. Nous dirons donc que

Lorsque la somme des moments des forces extérieures par rapport à un axe fixe passant par l'origine des rayons vecteurs est constamment nulle, la somme des aires projetées sur un plan normal à cet axe, pour tous les points du système, varie proportionnellement au temps; les aires étant toujours considérées comme positives ou négatives, suivant le sens du mouvement des rayons qui les décrivent.

Supposons maintenant que l'on ait toujours

$$\Sigma(yZ - zY) = 0, \quad \Sigma(zX - xZ) = 0, \quad \Sigma(xY - yX) = 0,$$

ce qui a lieu lorsque les forces extérieures n'existent pas, ou plus généralement lorsque le couple résultant de ces forces relatif à l'origine O est nul à chaque instant. La condition ci-dessus se trouvant satisfaite pour tout axe mené par l'origine, on voit que, dans ce cas, *la somme des aires projetées sur un plan fixe quelconque, pour tous les points du système, variera proportionnellement au temps.* Ce qui résulte d'ailleurs des équations (8).

173. Menons, par l'origine O, tous les plans possibles. Sur l'un quelconque de ces plans, la somme des aires projetées, d'après le dernier théorème, sera représentée par une expression de la forme Ht, H désignant une constante qui a nécessairement une valeur finie. Il y a donc, à chaque instant, un de ces plans sur lequel la somme des aires projetées a une valeur plus grande que sur l'un quelconque des autres plans, et, puisque t est un facteur commun à toutes les sommes d'aires, ce *plan du maximum des aires* ne peut être que celui pour lequel la constante H a la plus grande valeur. De là il résulte 1° que *ce plan est invariable*, c'est-à-dire que le plan, sur lequel la somme des aires projetées est un maximum à un instant donné, jouit de cette propriété dans toute la suite du temps; 2° les équations

$$\Sigma m\text{S} = \frac{\text{C}'}{2}\,t, \quad \Sigma m(xv_y - yv_x) = \text{C}',$$

nous montrent que la constante H, qui multiplie t dans l'expression de

la somme des aires projectées sur un plan quelconque, vaut la moitié de celle qui mesure la projection de l'axe d'impulsion OK sur la normale à ce plan. Le plan pour lequel H a la plus grande valeur est donc normal à la droite, menée par l'origine O, sur laquelle l'axe OK donne la projection maximum, c'est-à-dire à cet axe lui-même. D'où résulte ce théorème, dit *théorème du plan invariable :*

Lorsqu'il n'y a pas de forces extérieurs ou lorsque l'axe du couple résultant de ces forces, relatif à une origine O, *est constamment nul, le plan sur lequel la somme des aires projetées, à chaque instant, a la plus grande valeur, est un plan invariable, normal à l'axe d'impulsion du système.*

Si donc p, q, r sont les angles directeurs de la perpendiculaire au plan invariable menée par le point O, on aura

$$\frac{\cos p}{A'} = \frac{\cos q}{B'} = \frac{\cos r}{C'} = \pm \frac{1}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}},$$

ce qui détermine immédiatement la direction de ce plan au moyen des données initiales, d'après la remarque faite plus haut.

174. Les théorèmes des moments et des aires donnent lieu, comme celui du centre de gravité, à des applications nombreuses et remarquables. Nous voyons que dans le mouvement d'un système matériel quelconque les forces intérieures, quelles qu'elles soient, n'ont aucune influence sur la grandeur et la direction de l'axe d'impulsion du système; seules, les forces extérieures font varier cet axe.

Dans le mouvement d'un projectile explosif, les forces extérieures se réduisent à la pesanteur, si l'on néglige le frottement de l'air; la somme des moments de ces forces par rapport à une verticale quelconque est donc nulle, et par conséquent la somme des aires projetées sur un plan horizontal varie proportionnellement au temps. Lorsque le projectile éclate, comme les forces qui agissent à cet instant ne sont que des forces intérieures, il s'ensuit que l'explosion ne trouble pas la valeur du rapport entre la somme des aires projetées et le temps.

Un homme isolé dans l'espace ne saurait, quelques efforts qu'il fasse, imprimer à son corps un mouvement de rotation autour d'une droite, de la verticale, par exemple; car la somme des moments des quantités de mouvements de tous les points qui composent le corps étant nulle, par rapport à cette droite, dans l'état de repos, doit rester nulle tant

qu'il n'intervient pas de forces extérieures, et les actions qui provoquent les mouvements musculaires sont purement intérieures. Il s'ensuit que la somme des aires projetées sur un plan horizontal reste nulle, ce qui n'aurait pas lieu si le corps tout entier tournait autour de la verticale.

Enfin, considérant encore notre système solaire comme un système libre de points matériels et négligeant les actions des corps célestes en dehors de ce système, on devra conclure que l'axe d'impulsion de ce système, relatif à un point fixe O dans l'espace, est constant en grandeur et en direction, quels que soient les chocs, les actions moléculaires, les réactions chimiques qui se produisent incesssamment entre tous les points de ce vaste système; et si l'on mène par le point O un plan fixe, la somme des aires projetées sur ce plan, étendue à tous les points, variera proportionnellement au temps.

175. Il importe de remarquer que le théorème des moments et ses conséquences subsistent lorsque, au lieu de rapporter le mouvement du système matériel à des axes fixes, on le rapporte à des axes mobiles parallèlement à eux-mêmes et passant constamment par le centre de gravité G du système considéré. En effet, soient Gξ, Gη, Gζ trois axes rectangulaires, emportés dans un mouvement de translation avec le centre G; soient ξ, η, ζ les coordonnées d'un point M du système matériel par rapport à ces axes, en sorte que

$$x = x_1 + \xi, \quad y = y_1 + \eta, \quad z = z_1 + \zeta.$$

Substituant ces valeurs dans la première équation (6), nous trouverons

$$\Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \Sigma m\left[(y_1+\eta)\left(\frac{d^2z_1}{dt^2}+\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right) - (z_1+\zeta)\left(\frac{d^2y_1}{dt^2}+\frac{d^2\eta}{dt^2}\right)\right].$$

Faisons sortir du signe Σ les facteurs renfermant y_1, z_1 et leurs dérivées, facteurs qui sont les mêmes quel que soit le point x, y, z. Nous aurons

$$\Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \left(y_1\frac{d^2z_1}{dt^2} - z_1\frac{d^2y_1}{dt^2}\right)\Sigma m + y_1\Sigma m\frac{d^2\zeta}{dt^2}$$
$$- z_1\Sigma m\frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{d^2z_1}{dt^2}\Sigma m\eta - \frac{d^2y_1}{dt^2}\Sigma m\zeta + \Sigma m\left(\eta\frac{d^2\zeta}{dt^2} - \zeta\frac{d^2\eta}{dt^2}\right).$$

Or Σm est égal à M; de plus, l'origine G des coordonnées ξ, η, ζ étant

le centre de gravité du système, on a constamment

$$\Sigma m\eta = 0, \quad \Sigma m\zeta = 0,$$

et par suite

$$\Sigma m \frac{d^2\eta}{dt^2} = 0, \quad \Sigma m \frac{d^2\zeta}{dt^2} = 0.$$

L'équation se réduit donc à

$$\Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \mathrm{M}\left(y_1\frac{d^2z_1}{dt^2} - z_1\frac{d^2y_1}{dt^2}\right) + \Sigma m\left(\eta\frac{d^2\zeta}{dt^2} - \zeta\frac{d^2\eta}{dt^2}\right).$$

D'un autre côté, nous avons

$$\Sigma(y\mathrm{Z} - z\mathrm{Y}) = y_1\Sigma\mathrm{Z} - z_1\Sigma\mathrm{Y} + \Sigma(\eta\mathrm{Z} - \zeta\mathrm{Y});$$

substituant dans la première équation (6), et observant encore que le théorème du mouvement du centre de gravité nous donne

$$\mathrm{M}\frac{d^2y_1}{dt^2} = \Sigma\mathrm{Y}, \quad \mathrm{M}\frac{d^2z_1}{dt^2} = \Sigma\mathrm{Z},$$

nous aurons, toute réduction faite,

$$\Sigma m\left(\eta\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \zeta\frac{d^2\eta}{dt^2}\right) = \Sigma(\eta\mathrm{Z} - \zeta\mathrm{Y}).$$

Cette équation ne diffère de la première équation (6) que par la substitution des coordonnées η, ζ, à y, z, c'est-à-dire des positions et des accélérations relatives aux positions et aux accélérations absolues; et la même chose aura lieu, évidemment, pour les deux autres équations qui expriment le théorème des moments. On en déduit nécessairement la conséquence énoncée plus haut. Le théorème des aires subsiste également dans le mouvement relatif du système autour de son centre de gravité.

Comme application, considérons le mouvement de la terre, rapporté à trois axes passant par son centre de gravité et animés d'une simple translation. Ce mouvement se réduit sensiblement à une rotation uniforme autour de l'axe des pôles. La somme des aires projetées sur un plan normal à cet axe, dans un intervalle de temps donné, est constante. Si la terre se contracte par suite du refroidissement, les distances de ses points au centre diminuent, et la somme des aires projetées dans un

temps donné diminuerait évidemment si la vitesse de rotation restait la même. Or, c'est ce qui ne peut avoir lieu, la résultante des forces extérieures passant à peu près par le centre de gravité de la masse terrestre. Le mouvement de rotation s'accélérera donc, et la durée du jour en sera diminuée.

§ 2. THÉORÈMES DES FORCES VIVES ET DE L'ÉNERGIE.

176. Nous avons démontré (**144**) que dans le mouvement d'un point matériel libre M, l'accroissement de la demi-force vive du point pendant un temps infiniment petit est égal à la somme des travaux élémentaires des forces qui sollicitent le mobile. Si, dans un système matériel quelconque, nous considérons isolément chacun des points et toutes les forces intérieures et extérieures qui le sollicitent, la même égalité aura lieu. Faisant la somme des équations semblables pour tous les points du système et désignant par P l'une quelconque des forces intérieures ou extérieures, par X, Y, Z ses composantes rectangulaires, nous aurons

$$\Sigma d.\frac{mv^2}{2} = \Sigma P ds \cos \overline{Pv},$$

ou encore

$$(1) \qquad \frac{1}{2} d.\Sigma mv^2 = \Sigma (X dx + Y dy + Z dz),$$

le signe Σ s'étendant, dans le premier membre, à tous les points; dans le second, à toutes les forces. Intégrons les deux membres depuis une époque t_0 jusqu'à une époque t, et soit v_0 la vitesse du point M pour $t = t_0$. Il viendra

$$(2) \qquad \frac{1}{2}\Sigma mv^2 - \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 = \Sigma \int_{t_0}^{t} (X dx + Y dy + Z dz).$$

Pour abréger, nous indiquerons par la notation $\mathfrak{G}$P le travail total d'une force P pendant le temps compris entre t_0 et t, et nous écrirons l'équation (2) comme il suit :

$$(3) \qquad \frac{1}{2}\Sigma mv^2 - \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 = \Sigma \mathfrak{G} P.$$

On appelle *force vive totale* d'un système matériel la somme des forces vives de tous ses points à l'instant considéré. D'aprés l'équation (3), *la*

variation de la demi-force vive totale d'un système matériel quelconque pendant un temps donné est égale à la somme des travaux des forces, tant intérieures qu'extérieures, qui agissent sur les différents points du système pendant ce temps.

C'est le *théorème des forces vives*. On se rappellera, dans l'application de ce théorème, que lorsque certains points du système sont assujettis à se mouvoir sur des courbes ou surfaces fixes sans frottement, les réactions normales qui en résultent ne développent aucun travail.

177. Supposons qu'il existe un *potentiel* ou *fonction des forces*, dont les dérivées partielles par rapport aux coordonnées x, y, z d'un point quelconque du système donnent précisément les composantes X, Y, Z de la force appliquée à ce point. Nous aurons, $\psi(x, y, z, x', \ldots..)$ désignant cette fonction,

$$\Sigma(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz) = d.\psi(x, y, z, x', \ldots..),$$

et l'équation (1) admettra par conséquent l'intégrale suivante :

$$(4) \qquad \frac{1}{2}\Sigma mv^2 - \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 = \psi(x, y, z, x', \ldots.) - \psi(x_0, y_0, z_0, x'_0, \ldots.).$$

Cette équation se nomme l'*intégrale des forces vives*. Elle fait connaître l'accroissement de la force vive totale du système dans un temps donné par les positions des points du système au commencement et à la fin de cet intervalle de temps.

On peut exprimer simplement le travail développé par l'action de la pesanteur sur tous les points d'un système matériel dans un intervalle de temps donné. L'axe des z étant vertical dans le sens de la pesanteur, le travail élémentaire de la force appliquée à un point de masse m est $mgdz$. Or, nous avons

$$\Sigma mgdz = gd.\Sigma mz = gd.\mathrm{M}z_1 = \mathrm{M}gdz_1,$$

z_1 se rapportant au centre de gravité du système. En intégrant entre deux valeurs t_0 et t du temps, on trouve

$$\mathrm{M}g(z_1 - z_{10}),$$

d'où ce théorème dont on fait un usage fréquent : *Le travail total de la pesanteur sur un système matériel animé d'un mouvement quelconque, dans un temps donné, s'obtient en multipliant le poids du système par la quantité dont s'abaisse son centre de gravité pendant ce temps.*

La fonction des forces est ici $g\Sigma mz$.

178. Lorsqu'un système de points matériels est en équilibre, et que les forces, tant intérieures qu'extérieures, qui agissent sur ses différents points admettent un potentiel, on aperçoit facilement de quelle nature est l'équilibre dont il s'agit. Concevons, en effet, que l'on écarte infiniment peu les divers points, d'une manière quelconque, de leurs positions d'équilibre. S'ils tendent à y revenir de nouveau, la résultante des forces qui sollicitent chaque point développera, dans ce déplacement, un travail négatif; le potentiel, dont l'accroissement mesure la somme de tous ces travaux négatifs, sera donc décroissant à partir de la position d'équilibre, quel que soit le déplacement infiniment petit considéré; sa valeur correspondant à la position d'équilibre du système sera donc un *maximum*. On verrait de même que le potentiel sera un *minimum* pour tout état d'équilibre dont le système tendrait à s'écarter s'il était rompu.

Mais cet aperçu est insuffisant, et nous allons, au moyen du théorème des forces vives, après avoir défini plus nettement la *stabilité* de l'équilibre, prouver avec Dirichlet un théorème important relatif à cette stabilité.

On dit qu'un système est en état d'équilibre *stable* lorsque, si l'on écarte très peu les points du système de leurs positions d'équilibre et si on les abandonne à eux-mêmes avec des vitesses très petites ou nulles, le système ne s'éloigne jamais que très peu de sa position d'équilibre. Et la proposition dont il s'agit consiste en ce que, *si les forces, tant intérieures qu'extérieures, qui sollicitent les points d'un système, admettent un potentiel, et si pour une position déterminée* (A) *du système, ce potentiel acquiert une valeur maximum, cette position sera une position d'équilibre stable du système.*

Il s'agit ici, bien entendu, d'un maximum relatif à toutes les positions compatibles avec les conditions auxquelles le système est assujetti.

Concevons d'abord que, au moyen des équations qui peuvent exister entre les coordonnées des points du système, on ait ramené les positions de tous ces points à dépendre d'un certain nombre de variables indépendantes ξ, η, ζ..., dont les valeurs relatives à l'état (A) seraient nulles, et les valeurs initiales ξ_0, η_0, ζ_0,... Le potentiel s'exprimera aussi au moyen des variables ξ, η, ζ,... et la différence de ses valeurs pour une position quelconque du système et pour la position (A) sera une fonction $\Theta(\xi, \eta, \zeta,...)$ des mêmes variables, qui jouira évidemment des propriétés

suivantes : 1° On aura $\Theta(o, o, o, \ldots) = o$; 2° L'accroissement de Θ, le système passant d'une position à une autre, mesurera la somme des travaux des forces dans ce mouvement; 3° Θ sera un maximum en même temps que le potentiel, c'est-à-dire dans la position (A) du système, en sorte que pour des valeurs suffisamment petites de $\xi, \eta, \zeta \ldots$, la valeur de la fonction Θ sera constamment négative, puisque son maximum est zéro.

On pourra donc déterminer des quantités positives très petites $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ telles que, pour des valeurs de $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ numériquement égales ou inférieures à ces quantités respectivement, la fonction Θ sera constamment négative (sauf pour $\xi = \eta = \zeta = \cdots = o$, où elle sera nulle). Soit L un nombre tel que, si l'une des quantités $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ au moins atteint sa limite supérieure $\lambda, \mu, \nu, \ldots$, on ait nécessairement VA $\Theta(\xi, \eta, \zeta, \ldots) > L > o$, ce qui est possible d'après ce qui précède.

Cela étant posé, l'équation (4) nous donne celle-ci :

$$\frac{1}{2}\Sigma m v^2 - \frac{1}{2}\Sigma m v_0^2 = \Theta(\xi, \eta, \zeta, \ldots) - \Theta(\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \ldots),$$

ou simplement

$$(5) \qquad \frac{1}{2}\Sigma m v^2 = \Theta + \left(\frac{1}{2}\Sigma m v_0^2 - \Theta_0\right).$$

On en déduit d'abord que la position (A) est bien une position d'équilibre, car si l'on suppose $\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \ldots$ nuls ainsi que les vitesses initiales, $\Theta_0 = \Theta(o, o, o \ldots)$ sera nul ainsi que $\Sigma m v_0^2$, et l'on aura

$$\frac{1}{2}\Sigma m v^2 = \Theta.$$

Or, si $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ cessaient un seul instant d'être nuls, Θ devenant négatif comme on l'a vu, $\Sigma m v^2$ serait négatif, ce qui est absurde.

Concevons maintenant les points du système écartés de leurs positions d'équilibre avec de très petites vitesses. On peut supposer 1° que Θ_0 soit négatif, puisqu'il suffit pour cela que $\xi_0, \eta_0, \ldots$ soient moindres en valeur absolue que $\lambda, \mu, \ldots$; 2° que la quantité positive $\frac{1}{2}\Sigma m v_0^2 - \Theta_0$ soit inférieure à L, puisqu'on peut la rendre aussi petite qu'on le veut en prenant les vitesses initiales suffisamment petites et les valeurs de $\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \ldots$ également. L'équation (5) fait voir alors que $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ resteront toujours

respectivement moindres, en valeur absolue, que λ, μ, ν,... En effet, si une ou plusieurs de ces variables venaient à dépasser ces limites, comme elles varient d'une manière continue, il y aurait eu nécessairement un instant où l'une d'entr'elles au moins, aurait atteint sa limite supérieure, pendant que les autres restaient inférieures aux leurs. A cet instant, d'après la manière dont nous avons déterminé la quantité positive L, on aurait eu

$$\mathrm{VA}\,\Theta \geqslant L, \quad \frac{1}{2}\Sigma m v_0^2 - \Theta_0 < L,$$

et comme Θ est négatif, le second membre de l'équation (5), et par suite le premier, aurait été négatif, ce qui est absurde, puisque la force vive est positive de sa nature.

Comme λ, μ, ν,... sont pris aussi petits qu'on le veut, ξ, η, ζ,... resteront donc toujours très-petits en valeur absolue, le système s'écartera donc toujours très-peu de la position (A), ce qui démontre la proposition. L'équation (5) montre, en outre, que la force vive restera toujours très petite, en sorte que les vitesses des points resteront toujours très-petites.

Par exemple, un solide pesant fixé par un point est en équilibre dans deux cas, lorsque le centre de gravité se trouve sur la verticale du point fixe, au-dessus ou au-dessous de ce point. Mais pour que l'équilibre soit stable, il faut que la fonction des forces gMz_1 (177) soit maximum, ou que z_1 ait la plus grande valeur possible : l'équilibre est donc stable quand le centre de gravité occupe la position la plus basse possible.

179. Nous distinguerons, dans ce qui suit, le travail des forces intérieures de celui des forces extérieures. Soit F_i l'une quelconque des premières; F_e l'une des autres. L'équation (3) devient

$$\frac{1}{2}\Sigma m v^2 - \frac{1}{2}\Sigma m v_0^2 = \Sigma \mathfrak{T} F_i + \Sigma \mathfrak{T} F_e.$$

Le travail des forces intérieures admet une expression remarquable, si l'on observe que les actions réciproques de deux points matériels sont égales et opposées, et si l'on suppose, suivant une loi que les progrès de la physique tendent à confirmer, qu'elles sont toujours mesurées par le produit des masses m et m' par une certaine fonction $f(u)$ de leur distance mutuelle u; fonction que nous regarderons comme positive dans le cas d'une *attraction*, comme négative dans le cas d'une *répulsion*. L'action de m sur m' ou de m' sur m sera donc égale à $mm'f(u)$, et nous avons

vu (149) que la somme des travaux élémentaires de ces actions réciproques a pour expression $-mm'f(u)\,du$, ou encore, si l'on pose comme nous l'avons déjà fait

$$\varphi(u) = \int f(u)\,du,$$

$-mm'd.\varphi(u) = d[-mm'\varphi(u)]$. Indiquons par S une somme qui s'étend à tous les couples de points pris deux à deux, et, remarquant que la distance u de deux points est une fonction connue des coordonnées x, y, z, x', y', z' de ces points, posons

$$\mathrm{S}mm'\varphi(u) = \Pi(x, y, z, x', \ldots.).$$

Il est clair que la somme des travaux élémentaires des forces intérieures aura pour expression

$$\mathrm{S}d[-mm'\varphi(u)] = -d.\mathrm{S}mm'\varphi(u) = -d.\Pi(x, y, z, x', \ldots),$$

et par conséquent, que

$$\Sigma\mathfrak{T}F_i = -\Pi(x, y, z, x', \ldots) + \Pi(x_0, y_0, z_0, x'_0, \ldots) = \Pi_0 - \Pi,$$

Π_0 et Π désignant simplement les valeurs de la fonction Π aux époques t_0 et t. L'équation des forces vives prendra donc la forme

$$\text{(6)} \qquad \frac{1}{2}\Sigma mv^2 - \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 = \Pi_0 - \Pi + \Sigma\mathfrak{T}F_e.$$

Il importe d'observer que $\Pi = \mathrm{S}mm'\varphi(u)$ dépend uniquement des distances u comprises entre les points du système. Donc 1° cette fonction ne varie pas, lorsque les distances u restent constantes, comme cela a lieu, par exemple, dans un solide animé d'un mouvement quelconque; 2° cette fonction repasse par la même valeur, chaque fois que les points du système reprennent les mêmes positions les uns par rapport aux autres, comme cela a lieu périodiquement dans un corps élastique qui oscille autour de sa position d'équilibre; 3° en général, quand un système se meut en se déformant, comme un liquide, un gaz, un système composé de solides articulés, de cordes, etc., s'il est des portions du système qui se meuvent sans que les distances mutuelles de leurs points varient, les termes de la fonction Π qui se rapportent à ces couples de points peuvent être négligés, leur variation étant toujours nulle dans un intervalle de temps quelconque.

180. Ces remarques donnent lieu à d'importantes conséquences. Considérons un solide animé d'un mouvement quelconque et soumis à

l'action de forces extérieures, appliquons-lui l'équation (6) en tenant compte de ce qui précède; nous aurons

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 - \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 = \Sigma \mathfrak{C}F_e, \tag{7}$$

c'est-à-dire que *la variation de la demi-force vive totale d'un solide pendant un temps donné est égale à la somme des travaux des forces extérieures pendant ce temps*. Et en particulier, *si aucune force extérieure n'agit sur un solide en mouvement, sa force vive totale reste constante*.

Soit un système matériel qui varie de forme pendant son mouvement, mais en repassant périodiquement par la même figure, de sorte que tous ses points reprennent les mêmes positions relatives après des intervalles de temps constants ou même variables.

Dans l'équation (6), $\Pi - \Pi_0$ sera nul si l'on prend pour t_0 et t les époques correspondant au commencement et à la fin d'un de ces intervalles, et l'équation (7) aura encore lieu. Donc

Quand un système matériel quelconque en mouvement reprend la même figure après des intervalles de temps déterminés, la variation de la demi-force vive totale pendant un de ces intervalles est égale à la somme des travaux des forces extérieures pendant le même temps.

Ce théorème s'applique, entr'autres, au mouvement d'une machine à vapeur, d'une scierie, etc. Et s'il n'y a pas de forces extérieures ou que le travail de ces forces soit nul, *la force vive totale reprend la même valeur chaque fois que le système revient à la même figure*. Cela a lieu, par exemple, dans une lame élastique qui vibre, étant encastrée fixement par une de ses extrémités.

181. Le théorème renfermé dans l'équation (6) s'énonce sous une forme nouvelle au moyen de la terminologie introduite par Rankine. Nommons *énergie cinétique* d'un système la demi-somme T des forces vives de tous ses points à un instant donné; *énergie potentielle* cette quantité Π dont la différentielle changée de signe mesure la somme des travaux élémentaires des forces intérieures. Mais comme la fonction $\varphi(u)$, définie par une intégration (**179**), comporte nécessairement une constante arbitraire, et qu'il en est de même de la fonction $\Pi = \Sigma mm'\varphi(u)$, nous supposerons que cette constante soit déterminée par une condition qui sera précisée plus loin, et c'est à la fonction Π, ainsi complétement déterminée, que s'appliquera le nom d'énergie potentielle. Enfin,

l'*énergie totale* d'un système sera la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle. L'équation (6) peut se mettre sous la forme

$$\left(\frac{1}{2}\Sigma mv^2 + \Pi\right) - \left(\frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 + \Pi_0\right) = \Sigma \mathfrak{C}F_e,$$

ou

$$(8) \qquad (T + \Pi) - (T_0 + \Pi_0) = \Sigma \mathfrak{C}F_e;$$

donc, ***dans tout système de points matériels en mouvement, la variation de l'énergie totale pendant un temps donné est égale à la somme des travaux des forces extérieures pendant le même temps.***

Supposons qu'aucune force extérieure n'agisse sur le système considéré. Le second membre de l'équation (8) est nul, donc

$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0,$$

et comme le second membre est ici indépendant de t, le premier est aussi constant. Donc, ***l'énergie totale d'un système matériel soustrait à l'action de toute force extérieure, est invariable.***

L'énergie cinétique et l'énergie potentielle sont donc complémentaires l'une de l'autre, dans ce cas : quand l'une augmente, l'autre diminue, et *vice-versâ*. Considérons la lame vibrante du numéro précédent. Lorsqu'elle est le plus éloignée de sa position d'équilibre, sa vitesse est nulle, $T = 0$: son énergie potentielle est donc alors la plus grande possible. Au contraire, à l'instant où la lame passe par sa position d'équilibre, tous ses points sont animés de leurs plus grandes vitesses, T est maximum ; donc Π est alors le plus petit possible.

Si nous regardons l'ensemble de l'univers créé comme un système de points matériels soumis exclusivement à leurs actions réciproques et soustraits à toute action extérieure, le théorème précédent lui est applicable. Ainsi ***l'énergie totale de l'univers reste constante.***

182. Dans les applications que l'on doit faire du théorème des forces vives ou de l'énergie, il est essentiel de tenir compte de tous les mouvements dont la matière est animée, aussi bien de ceux qui échappent à nos mesures directes que des autres. Telles sont les vibrations de l'éther qui transmettent la lumière et la chaleur, les vibrations calorifiques imprimées aux molécules des corps par le frottement ou la radiation, etc. Ainsi nous avons dit que, quand les points du système partent d'une certaine position et y reviennent, le travail des forces intérieures correspondant à la période intermédiaire est nul; mais il ne faut pas conclure de

là que l'on puisse négliger l'effet du frottement dans l'équation des forces vives appliquée à une machine. Car les actions intérieures qui causent le frottement déterminent, dans les pièces en contact, des vibrations moléculaires que nous percevons sous forme de *chaleur*, et l'énergie cinétique invisible correspondant à ces vibrations est une partie de la force vive totale du système; de plus, par suite de la dilatation produite par l'échauffement, les molécules s'écartent les unes des autres, d'où il résulte une certaine variation de l'énergie potentielle.

De même, dans une machine à vapeur, les positions et les vitesses des points se retrouvant sensiblement les mêmes à la fin de chaque période du mouvement de la machine, on devrait en conclure que, l'énergie totale reprenant la même valeur, le travail des forces extérieures (réactions des appareils mus par la machine) est nul pendant une période, ce qui est évidemment faux. C'est que l'on a négligé l'énergie calorifique dépensée par le foyer : la quantité de force vive qui a ainsi disparu correspond au travail négatif des forces extérieures.

Mais l'étude complète des applications du théorème des forces vives à ce point de vue appartient à la *thermodynamique*.

182. Appliquons le théorème de Dirichlet aux forces intérieures qui existent dans le système matériel considéré, et nous aurons une définition plus nette de l'énergie potentielle du système. Parmi toutes les positions relatives que peuvent prendre les points du système, on peut concevoir qu'il en existe une pour laquelle la fonction $\Pi = Smm'\varphi(u)$ acquiert la plus petite valeur possible, et comme le potentiel des forces intérieures n'est autre que $-\Pi$ (**179**), la position dont il s'agit répond à un maximum de ce potentiel : c'est donc une position d'équilibre stable s'il n'y a pas de forces extérieures. Concevons que l'on dispose de la constante arbitraire qui affecte la fonction Π, de manière que cette fonction s'annule précisément quand les points du système occupent leurs positions d'équilibre stable : elle sera donc *positive* pour toute autre position du système. Si maintenant nous admettons que le système parte, à une époque t_0, de la position d'équilibre stable et arrive à l'époque t à une position donnée quelconque, le travail des forces intérieures dans ce mouvement sera, Π_0 étant nul,

$$\Sigma \mathfrak{E} F_i = -\Pi(x, y, z, \ldots).$$

Donc, *la fonction* Π *ou l'énergie potentielle correspondant à une posi-*

tion quelconque du système matériel représente le travail positif que développeraient les forces intérieures, si le système passait de la position considérée à la position d'équilibre stable pour laquelle cette fonction Π *est un minimum.*

184. Le théorème des forces vives s'applique aussi au mouvement relatif d'un système par rapport à trois axes $G\xi$, $G\eta$, $G\zeta$, ayant pour origine le centre de gravité G du système et mobiles parallèlement à eux-mêmes.

Décomposons d'abord la force vive totale en deux parties. Si w désigne la vitesse du centre de gravité; x_1, y_1, z_1 ses coordonnées rapportées aux axes fixes, les équations

$$x = x_1 + \xi, \quad y = y_1 + \eta, \quad z = z_1 + \zeta$$

du n° 175 donnent, v' étant la vitesse relative d'un point M du système par rapport à $G\xi\eta\zeta$,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_1}{dt} + \frac{d\xi}{dt}, \quad \text{ou} \quad v_x = w_x + v'_\xi, \text{ etc.}$$

Donc on a

$$\begin{aligned}\Sigma mv^2 = \Sigma m\,(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) &= \Sigma m\,[(w_x + v'_\xi)^2 + (w_y + v'_\eta)^2 + (w_z + v'_\zeta)^2] \\ &= (w_x^2 + w_y^2 + w_z^2)\,\Sigma m + 2w_x \Sigma mv'_\xi + 2w_y\,\Sigma mv'_\eta + 2w_z \Sigma mv'_\zeta \\ &\quad + \Sigma m\,(v'^2_\xi + v'^2_\eta + v'^2_\zeta).\end{aligned}$$

Mais, l'origine des axes mobiles étant au centre de gravité, nous avons

$$\Sigma m\xi = 0, \quad \text{d'où} \quad \Sigma m \frac{d\xi}{dt} = \Sigma mv'_\xi = 0,$$

et de même pour les autres axes. L'égalité ci-dessus se réduit donc à

$$\Sigma mv^2 = Mw^2 + \Sigma mv'^2; \tag{9}$$

c'est-à-dire que *la force vive totale d'un système matériel quelconque est la somme de la force vive de son centre de gravité où l'on supposerait toute la masse réunie, et de la force vive totale dont le système est animé dans son mouvement relatif par rapport à son centre de gravité.*

C'est ce qu'on appelle le *théorème de Koenig.*

185. Evaluons maintenant le travail des forces dans les mouvements absolu et relatif. Considérons une force quelconque P dont les composantes parallèles à OX, OY, OZ sont X, Y, Z. Nous avons

$$X dx + Y dy + Z dz = X\,(dx_1 + d\xi) + Y\,(dy_1 + d\eta) + Z\,(dz_1 + d\zeta);$$

donc, pour toutes les forces intérieures ou extérieures,

$$\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz) = dx_1\,\Sigma X + dy_1\,\Sigma Y + dz_1\,\Sigma Z + \Sigma(Xd\xi + Yd\eta + Zd\zeta).$$

Mais le mouvement du centre de gravité est, d'après le théorème du N° **167**, celui d'un point libre de masse M soumis à l'action d'une force dont les composantes sont ΣX, ΣY, ΣZ. Appliquant l'équation de la force vive à ce mouvement, on a donc

$$\frac{1}{2}d.Mw^2 = dx_1\,\Sigma X + dy_1\,\Sigma Y + dz_1\,\Sigma Z,$$

et l'équation ci-dessus devient

$$\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz) = \frac{1}{2}d.Mw^2 + \Sigma(Xd\xi + Yd\eta + Zd\zeta).$$

Substituons dans l'équation (1) relative au travail élémentaire, la valeur de Σmv^2 donnée par (9) et la somme des travaux des forces que nous venons d'obtenir. Nous aurons, réduction faite,

$$\frac{1}{2}d.\Sigma mv'^2 = \Sigma(Xd\xi + Yd\eta + Zd\zeta).$$

Or, cette équation ne diffère de l'équation (1) que par la substitution de ξ, η, ζ, v' à x, y, z, v, c'est-à-dire que la force vive du système et le travail des forces sont maintenant évalués, non plus dans le mouvement absolu du système, mais dans son mouvement relatif par rapport aux axes $G\xi$, $G\eta$, $G\zeta$. Donc, en intégrant les deux membres de l'équation depuis t_0 jusqu'à t, on en déduira le théorème suivant : *L'équation des forces vives subsiste complètement, lorsqu'au lieu d'évaluer la force vive du système et le travail des forces dans le mouvement absolu du système, on les évalue dans son mouvement relatif autour de son centre de gravité.*

Observons d'ailleurs que le travail des forces intérieures pendant le temps $t - t_0$ étant mesuré par $\Pi_0 - \Pi$, comme on l'a vu (**179**), et la fonction Π renfermant seulement les distances réciproques des points du système, ce travail ne dépend nullement du système d'axes coordonnés auquel on rapporte les points mobiles. *Le travail des forces intérieures est donc le même dans le mouvement absolu et dans le mouvement relatif.*

On appelle *énergie intérieure d'un système* la somme de son énergie cinétique évaluée par rapport au centre de gravité, ou $\frac{1}{2}\Sigma mv'^2$, et de son énergie potentielle qui, d'après la remarque que nous venons de

faire, est indépendante des axes fixes ou mobiles auxquels on rapporte le système. Le théorème des forces vives s'appliquant au mouvement relatif du système par rapport à son centre de gravité, il en est de même du théorème de l'énergie qui est une conséquence du premier. Ainsi

La variation de l'énergie intérieure d'un système matériel quelconque pendant un temps donné est égale à la somme des travaux des forces extérieures pendant ce temps, évalués dans le mouvement relatif du système autour de son centre de gravité.

Et s'il n'y a pas de forces extérieures appliquées au système, *son énergie intérieure demeure constante.*

Exercices.

1. Dans le mouvement d'un système quelconque de points matériels, la quantité totale de mouvement OV (165) est donnée en grandeur et en direction par la quantité de mouvement du centre de gravité où toute la masse serait réunie, et l'axe d'impulsion OK (170), relatif à un point fixe O, est la résultante de l'axe d'impulsion correspondant au mouvement du centre de gravité où toute la masse serait réunie, et de l'axe d'impulsion dû au mouvement relatif du système autour de son centre de gravité.

2. Deux points M, M', placés respectivement en A et B à l'état de repos, s'attirent proportionnellement à leurs masses m, m' et à leur distance MM'. Déterminer leur mouvement.

R. Origine A; $AB = a$, $AM = x$, $AM' = x'$. D'après le principe du centre de gravité, on a

$$(a) \qquad mx + m'x' = m'a.$$

D'ailleurs, les équations du mouvement sont

$$\frac{d^2x}{dt^2} = m'(x' - x), \quad \frac{d^2x'}{dt^2} = -m(x' - x), \quad \text{d'où} \quad \frac{d^2(x' - x)}{dt^2} = -(m + m')(x' - x).$$

Intégrant et combinant avec (a), on trouve

$$x = \frac{m'a(1 - \cos t\sqrt{m + m'})}{m + m'}, \quad x' = \frac{m'a + ma\cos t\sqrt{m + m'}}{m + m'}.$$

3. Trois masses m_1, m_2, m_3, liées invariablement, sont soumises, dans la direction des z positifs, à la pesanteur; dans la direction des x positifs, à une force accélératrice proportionnelle au temps, μt. Déterminer les coordonnées x_1, y_1, z_1 et la vitesse w du centre de gravité de ces trois masses à un instant quelconque, ainsi que sa trajectoire. Les coordonnées initiales (a_1, b_1, c_1) (a_2, b_2, c_2) (a_3, b_3, c_3) des masses m_1, m_2, m_3 sont données; leurs vitesses initiales sont nulles.

R. Posons

$$\alpha=\frac{m_1a_1+m_2a_2+m_3a_3}{m_1+m_2+m_3},\quad \beta=\frac{m_1b_1+m_2b_2+m_3b_3}{m_1+m_2+m_3},\quad \gamma=\frac{m_1c_1+m_2c_2+m_3c_3}{m_1+m_2+m_3},$$

nous trouverons

$$x_1=\alpha+\frac{\mu t^3}{6},\quad y_1=\beta,\quad z_1=\gamma+\frac{gt^2}{2},\quad w=\frac{t}{2}\sqrt{4g^2+\mu^2t^2},$$

$$z_1=\gamma-\frac{g}{2}\left[\frac{6}{\mu}(x_1-\alpha)\right]^{\frac{2}{3}}.$$

4. *Machine d'Atwood.* — Deux masses pesantes M, M′ (M > M′) sont réunies par un fil sans masse passant sur une roue mobile autour d'un axe horizontal O. Déterminer le mouvement du système.

R. Soient a le rayon de la roue, $\omega=\frac{d\theta}{dt}$ la vitesse angulaire de la rotation, prise positive dans le sens où agit le poids M. La somme des moments des quantités de mouvement du système par rapport à l'axe O est égale à $\omega\,[H+(M+M')\,a^2]$, H désignant la somme Σmr^2 des masses des points de la roue multipliés par les carrés de leurs distances à l'axe. La somme des moments des forces extérieures par rapport à cet axe est $(M-M')\,ga$; le théorème des moments (**270**) donne l'équation

$$[H+(M+M')\,a^2]\frac{d\omega}{dt}=(M-M')\,ga,\quad \text{d'où}\quad \omega=\frac{(M-M')\,gat}{H+(M+M')\,a^2}.$$

La vitesse de la roue est donc croissante uniformément et, toutes choses égales d'ailleurs, d'autant moindre que M — M′ est plus petit, que H et M + M′ sont plus grands.

5. Un treuil est mis en mouvement par une masse pesante M suspendue à un fil enroulé sur l'arbre; la vitesse de rotation est modérée par un système d'ailettes implantées sur la surface du treuil. Trouver la loi de la rotation, la résistance de l'air sur les ailettes étant proportionnelle au carré de la vitesse angulaire.

R. a le rayon de l'arbre, H la quantité Σmr^2 étendue à tous les points de l'arbre et des ailettes; $Mga\alpha^2\omega^2$ l'expression du moment, par rapport à l'axe du treuil, de la résistance de l'air contre les ailettes. Le théorème des moments donnera, comme dans l'exemple précédent,

$$(H+Ma^2)\frac{d\omega}{dt}=Mga\,(1-\alpha^2\omega^2),\quad \text{ou}\quad \frac{d\omega}{dt}=\frac{Mga\,(1-\alpha^2\omega^2)}{H+Ma^2}.$$

Cette équation, semblable à celle qui détermine la vitesse d'un point pesant dans un milieu résistant (**237**), se traite de même et les conséquences sont semblables. Discuter.

6. *Théorème d'Yvon Villarceau.* — Dans un système matériel quelconque, soient $G=\Sigma m\rho^2$ la somme des masses des points multipliées par les carrés de leurs distances à une origine fixe, v la vitesse d'un point, P la force extérieure qui agit sur ce point, Π l'énergie potentielle du système. On a, à chaque instant

$$\Sigma mv^2=\frac{1}{2}\frac{d^2G}{dt^2}+\mathrm{S}u\frac{d\Pi}{du}-\Sigma P\rho\cos\overline{P\rho}.$$

Si les points sont libres, s'attirant en raison des masses et en raison inverse du cube de la distance, et s'il n'y a pas de force extérieure, la quantité

$$\frac{d^2G}{dt^2}=\frac{d^2\Sigma m\rho^2}{dt^2}$$

est constante, quels que soient l'instant considéré et le point O auquel se rapportent les distances ρ.

7. Une droite rigide, dont la masse est insensible, tourne librement autour d'un de ses points O dans un plan horizontal; une masse m peut glisser sans frottement sur la droite; une masse m' est fixée sur la droite, en un point A, de l'autre côté du point fixe. Trouver l'équation différentielle de la trajectoire du point m.

***R.* Soient $Om'=a$; r, θ les coordonnées polaires de m; ce sont des fonctions inconnues de t. Le théorème des aires et celui des forces vives donnent**

$$(mr^2+m'a^2)\frac{d\theta}{dt}=k,\quad m\frac{dr^2}{dt^2}+(mr^2+m'a^2)\frac{d\theta^2}{dt^2}=h,$$

k, h étant des constantes faciles à déterminer par les données initiales. Éliminant dt, on a pour l'équation demandée

$$m\frac{dr^2}{d\theta^2}+(mr^2+m'a^2)-\frac{h}{k^2}(mr^2+m'a^2)^2=0.$$

8. Une barre homogène et pesante, de longueur $2a$, s'appuie par ses extrémités A et B sur deux glissières OX, OY, horizontale et verticale, sur lesquelles elle peut glisser sans frottement. Un insecte de masse m descend le long de la barre en réagissant contre elle. Quelle doit être la loi de son mouvement pour que la barre reste immobile, et quelles sont les pressions qu'elle exerce alors contre les glissières?

***R.* On applique le théorème de moments, en prenant pour centre des moments le centre instantané de la barre, intersection des réactions des glissières, ce qui élimine ces réactions. Soient M la masse de la barre, α son inclinaison sur OX, x la distance de m à l'extrémité supérieure B de la barre. L'équation des moments fournit pour le mouvement du système l'égalité**

$$-\frac{4}{3}Ma^2\frac{d^2\alpha}{dt^2}-m(2a-x)\cos\alpha\,\frac{d^2.(2a-x)\sin\alpha}{dt^2}+mx\sin\alpha\,\frac{d^2.x\cos\alpha}{dt^2}$$
$$=[Ma+m(2a-x)]\,g\cos\alpha.$$

Pour que la barre ne glisse pas, α doit être constant, ce qui donne la condition

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{g}{2a\sin\alpha}x=\frac{M+2m}{2m\sin\alpha}g.$$

Intégrer et discuter le résultat. Les réactions horizontale et verticale des glissières ont pour expressions respectivement

$$\frac{1}{2}g\cot\alpha\left(M+2m-\frac{mx}{a}\right),\quad \frac{1}{2}g\left(M+\frac{mx}{a}\right).$$

9. Un solide de masse M peut glisser sans frottement par sa face inférieure sur un

plan horizontal. Un plan vertical, passant par le centre de gravité G du solide, coupe sa surface supérieure suivant une courbe connue ABC, et un point pesant de masse m se meut librement sur cette courbe. Déterminer le mouvement du point m et celui qui en résulte pour le solide, la vitesse initiale étant nulle.

R. Soient, dans le plan vertical ABC, deux axes $G\xi$, $G\eta$, horizontal et vertical, passant par le centre de gravité; ξ, η les coordonnées du mobile m par rapport à ces axes, $\xi = \varphi(\eta)$ l'équation de la courbe ABC; x_1, y_1 les coordonnées de G par rapport à deux axes fixes parallèles aux précédents (y_1 est constant par l'hypothèse). — Le théorème du centre de gravité fournit l'équation

$$(M + m)x_1 + m\xi = \text{const.} = a, \quad \text{d'où} \quad \frac{dx_1}{dt} = -\frac{m}{M+m}\frac{d\xi}{dt}.$$

Le travail des forces intérieures étant nul, l'équation des forces vives donne, par l'équation précédente,

$$\frac{M}{M+m}\frac{d\xi^2}{dt^2} + \frac{d\eta^2}{dt^2} = 2g(\eta_0 - \eta), \quad \text{d'où} \quad dt = \pm\frac{d\eta\sqrt{M + m + M\varphi'(\eta)^2}}{\sqrt{2g(M+m)(\eta_0 - \eta)}}.$$

On a, par quadrature, t en fonction de η; par suite η, ξ et x_1 en fonction de t. Si ABC est une droite $\xi = \alpha\eta + \beta$, et que l'on pose

$$k\sqrt{2g(M+m)} = \sqrt{M + m + M\alpha^2},$$

on aura

$$\eta = \eta_0 - \frac{t^2}{4k^2}, \quad \xi = \alpha\eta_0 + \beta - \frac{\alpha t^2}{4k^2}, \quad x_1 = \frac{1}{M+m}\left(a - m\alpha\eta_0 - m\beta + \frac{m\alpha t^2}{4k^2}\right).$$

20. Déterminer le mouvement d'une baguette rectiligne, homogène et pesante AB, dont les extrémités s'appuient sans frottement sur deux glissières, l'une horizontale OX, l'autre verticale OY. Calculer les pressions ϖ' et ϖ exercées en A sur OX, en B sur OY. La vitesse initiale est nulle.

R. Soient $AB = 2a$, Mg le poids de la barre, appliqué en son milieu G; θ l'angle OAB de la baguette avec l'horizontale. Le théorème des forces vives donne, le travail des réactions normales ϖ et ϖ' étant nul,

$$\Sigma mv^2 = 2Mga(\sin\theta_0 - \sin\theta).$$

Pour calculer Σmv^2, on observe que la vitesse v d'un point M est égale à la vitesse angulaire $d\theta : dt$ de la baguette multipliée par la distance MC de ce point au centre instantané de rotation, qui a pour coordonnées $2a\cos\theta$, $2a\sin\theta$; que la densité linéaire ρ de la baguette est $M : 2a$; on a, calcul fait,

$$\Sigma mv^2 = \int_0^{2a} \rho v^2 ds = \frac{4}{3}Ma^2\frac{d\theta^2}{dt^2},$$

d'où enfin

$$(\beta) \quad \frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{3g}{2a}(\sin\theta_0 - \sin\theta).$$

Cette équation détermine θ en fonction de t, ce qui fait connaître tout le mouvement de la barre. Si l'on pose $\zeta = 90° + \theta$, on retombe sur l'équation du pendule simple, d'où ce théorème : *Concevons une verticale mobile* AZ *passant par le point* A : *le mouvement relatif de la baguette par rapport à cette verticale sera celui d'un pendule simple de longueur $l = 4a : 3$, jusqu'au moment où la baguette* AB *étant couchée sur l'horizontale* OX *s'arrêtera brusquement.*

Pour calculer ϖ, ϖ', on peut faire usage du principe du centre de gravité; il fournit les équations

$$M\frac{d^2x_1}{dt^2} = \varpi, \quad M\frac{d^2y_1}{dt^2} = -Mg + \varpi', \quad \text{et l'on a} \quad x_1 = a\cos\theta, \quad y_1 = a\sin\theta.$$

De là et de l'équation (β) on tire

$$\varpi = \frac{3Mg}{4}(3\sin\theta - 2\sin\theta_0)\cos\theta, \quad \varpi' = \frac{Mg}{4}(1 + 9\sin^2\theta - 6\sin\theta_0\sin\theta).$$

CHAPITRE XIV.

THÉORIE DES MOMENTS D'INERTIE.

186. Les théorèmes généraux qui précèdent suffisent, comme nous le verrons, pour résoudre les problèmes relatifs au mouvement des solides; mais cette application exige le calcul de certaines sommes qui s'étendent à tous les points matériels d'un corps, semblables à celles que nous a offertes la théorie des centres de gravité, et l'étude de leurs propriétés, qui jouent un rôle important dans les questions relatives au mouvement des solides.

On nomme *moment d'inertie* d'un corps par rapport à une droite la somme des masses de ses points multipliées respectivement par les carrés de leurs distances à la droite. Si donc m représente la masse d'un point, r sa distance à la droite, H le moment d'inertie du corps, on a

$$H = \Sigma mr^2,$$

Σ désignant une somme qui s'étend à tous les points du corps.

Les coordonnées de la masse m étant x, y, z, les moments d'inertie A, B, C du corps par rapport aux axes OX, OY, OZ auront pour expressions

$$A = \Sigma m(y^2 + z^2), \quad B = \Sigma m(z^2 + x^2), \quad C = \Sigma m(x^2 + y^2).$$

On voit, par ce qui précède, que le moment d'inertie d'un corps dépend 1° de la distribution de la matière dans le corps lui-même; 2° de la position de la droite par rapport à laquelle on prend le moment d'inertie. Nous allons successivement chercher pour un même corps, supposé donné, les relations qui ont lieu entre ses moments d'inertie par rapport à différentes droites 1° passant par une même origine O; 2° parallèles à une même direction donnée.

187. Soient α, β, γ les angles directeurs d'une droite OS; $MP = r$ la distance d'un point (x, y, z) à cette droite. On a

$$\begin{aligned} r^2 = \overline{OM}^2 - \overline{OM}^2 \cos^2 MOS &= (x^2+y^2+z^2) - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2 \\ &= (x^2+y^2+z^2)(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma) - (x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)^2 \\ &= (y^2+z^2)\cos^2\alpha + (z^2+x^2)\cos^2\beta + (x^2+y^2)\cos^2\gamma - 2yz\cos\beta\cos\gamma \\ &\quad - 2zx\cos\gamma\cos\alpha - 2xy\cos\alpha\cos\beta. \end{aligned}$$

Substituant dans l'équation $H = \Sigma mr^2$, faisant sortir du signe Σ les facteurs $\cos^2\alpha\ldots$, $\cos\beta\cos\gamma\ldots$, qui sont communs à tous les points, et posant

$$D = \Sigma myz, \quad E = \Sigma mzx, \quad F = \Sigma mxy,$$

on trouvera, pour le moment d'inertie par rapport à OS,

$$(1) \quad H = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma - 2D\cos\beta\cos\gamma - 2E\cos\gamma\cos\alpha - 2F\cos\alpha\cos\beta.$$

Mais la loi suivant laquelle varie H d'après la direction de OS se manifeste plus clairement par la construction suivante : portons sur OS, à partir de l'origine, une longueur $OR = 1 : \sqrt{H}$. Les coordonnées ξ, η, ζ du point R seront

$$\xi = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{H}}, \quad \eta = \frac{\cos\beta}{\sqrt{H}}, \quad \zeta = \frac{\cos\gamma}{\sqrt{H}},$$

et si l'on substitue ces valeurs de $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ dans l'équation (1), il viendra, après suppression du facteur H,

$$(2) \qquad A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 - 2D\eta\zeta - 2E\zeta\xi - 2F\xi\eta = 1,$$

équation qui est celle du lieu géométrique du point R. Ce lieu est une surface du second ordre qui a pour centre le point O; elle est fermée puisque OR ne peut devenir ni imaginaire, ni infini; c'est donc un ellipsoïde. Donc, *si l'on porte sur chaque droite* OS *passant par un point* O, *à partir de ce point, une longueur égale à l'unité divisée par la racine carrée du moment d'inertie correspondant, le lieu des extrémités de ces*

droites sera un ellipsoïde ayant pour centre le point O. On le nomme l'*ellipsoïde d'inertie* du corps relatif au point O.

On sait, par les propriétés des surfaces du second ordre, que cet ellipsoïde admet trois diamètres rectangulaires qui, étant pris pour axes coordonnés, auraient ramené l'équation de la surface à la forme

$$(3) \qquad A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1,$$

les coefficients de $\xi\eta$, $\xi\zeta$, $\eta\zeta$ étant nuls : ce sont les axes principaux de l'ellipsoïde; on les appelle ici *axes principaux d'inertie* du corps par rapport au point O, et les moments d'inertie A, B, C qui s'y rapportent sont les *moments principaux d'inertie*. D'ailleurs, comme la condition pour que l'équation de la surface ne renferme pas les rectangles $\xi\eta$, etc., est que D, E, F soient nuls, nous tirons de là cette propriété importante :

Par un point quelconque O *de l'espace on peut toujours mener trois axes rectangulaires tels que, si l'on y rapporte les points matériels d'un corps quelconque donné, on ait*

$$\Sigma myz = 0, \quad \Sigma mxz = 0, \quad \Sigma mxy = 0;$$

ce sont les axes principaux d'inertie du corps relatifs à ce point O.

Il importe d'observer que tout ellipsoïde ne peut être un ellipsoïde d'inertie, les axes de ce dernier étant assujettis à une relation d'inégalité. Il résulte en effet des valeurs de A, B, C, que l'on a

$$A + B - C = 2\Sigma mz^2 > 0, \quad A + B > C,$$

donc, si a, b, c désignent les demi axes de l'ellipsoïde d'inertie, $a > b > c$, on aura

$$A = \frac{1}{a^2}, \quad B = \frac{1}{b^2}, \quad C = \frac{1}{c^2}, \quad \frac{1}{c^2} < \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2},$$

d'où l'on tire facilement

$$c > \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Cette propriété peut s'énoncer comme il suit : *le plus petit demi axe d'un ellipsoïde d'inertie est toujours plus grand que la perpendiculaire abaissée du centre sur la droite qui joint les extrémités des deux autres axes.*

La recherche des axes et des moments principaux d'inertie d'un corps pour une origine donnée revient donc à celle des axes principaux d'un ellipsoïde, en grandeur et en direction. Ce problème a été résolu dans la géométrie analytique, et nous ne nous en occuperons pas.

188. L'expression (1) du moment d'inertie H d'un corps par rapport à une droite OS devient, en fonction des moments principaux A, B, C et des angles α, β, γ que cette droite fait avec les axes principaux,

$$(4) \qquad H = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma.$$

On déduit de cette équation, ou de la considération de l'ellipsoïde d'inertie, les corollaires suivants : 1° l'axe du plus grand moment d'inertie coïncide avec le plus petit axe de l'ellipsoïde, et l'axe du plus petit moment avec le plus grand axe de l'ellipsoïde ; 2° si deux moments principaux sont égaux, $B = C$, l'ellipsoïde d'inertie est de révolution autour du troisième axe ; toutes les droites également inclinées sur cet axe donnent des moments d'inertie égaux ; celles qui sont normales à cet axe donnent des moments égaux à B et sont des axes principaux.

3° Pour qu'une droite OZ soit axe principal d'inertie du corps relativement à un point O de cette droite, il faut et il suffit qu'en prenant le point pour origine et la droite pour axe des z, l'équation (2) ne renferme ζ qu'au carré, c'est-à-dire que l'on ait $D = 0$, $E = 0$, ou

$$\Sigma myz = 0, \quad \Sigma mxz = 0.$$

Telle est donc la condition à laquelle on reconnaîtra que OZ est un axe principal.

189. La loi qui lie les moments d'inertie relatifs à des droites parallèles se résume dans un théorème simple. Soient OZ, O'Z' deux droites parallèles ; H, H' les moments correspondants d'un corps déterminé ; δ la distance OO' des deux droites. La droite OZ étant prise pour axe des z et OO' pour axe des x positifs, nous avons

$$H' = \Sigma mr'^2 = \Sigma m\left[(x-\delta)^2 + y^2\right] = \Sigma m\,(x^2 + y^2) + M\delta^2 - 2\delta\Sigma mx,$$

ou, x_1 désignant l'abscisse du centre de gravité,

$$H' = H + M\delta^2 - 2\delta M x_1.$$

Cette équation se simplifie si l'on suppose que OZ passe par le centre de gravité du corps ; on a $x_1 = 0$, et

$$(5) \qquad H' = H + M\delta^2,$$

c'est-à-dire que *le moment d'inertie du corps par rapport à une droite quelconque est égal au moment d'inertie par rapport à une parallèle à cette droite menée par le centre de gravité, plus le moment d'inertie du*

centre de gravité lui-même, dans lequel toute la masse serait réunie, par rapport à la droite proposée.

D'où il suit que, de toutes les droites parallèles à une même direction, celle qui passe par le centre de gravité a le plus petit moment d'inertie, et toutes celles qui sont situées à la même distance de ce centre ont des moments d'inertie égaux.

Le théorème précédent, joint à la propriété qu'a l'ellipsoïde d'inertie de donner les moments d'inertie relatifs à toutes les droites passant par un même point, permet de trouver le moment d'inertie du corps par rapport à toute droite de l'espace, quand on connaît les axes et moments principaux relatifs à son centre de gravité.

190. Considérons les coefficients $D = \Sigma myz$, $E = \Sigma mzx$, $F = \Sigma mxy$ relatifs à un système d'axes rectangulaires donnés, et cherchons les coefficients $D' = \Sigma my'z'$, $E' = \Sigma mz'x'$, $F' = \Sigma mx'y'$ relatifs à un système O'X'Y'Z' d'axes parallèles aux premiers. Les coordonnées de O' par rapport à OXYZ étant α, β, γ, nous avons

$$D' = \Sigma my'z' = \Sigma m(y - \beta)(z - \gamma) = \Sigma myz - \beta\Sigma mz - \gamma\Sigma my + M\beta\gamma$$

ou

$$(6)\quad \begin{cases} D' = D - M(\beta z_1 + \gamma y_1 - \beta\gamma), \\ E' = E - M(\gamma x_1 + \alpha z_1 - \gamma\alpha), \\ F' = F - M(\alpha y_1 + \beta x_1 - \alpha\beta). \end{cases}$$

Ces formules permettent de résoudre plusieurs questions.

1° Si l'origine O coïncide avec le centre de gravité du corps, x_1, y_1, z_1 sont nuls; on a

$$D' = D + M\beta\gamma, \quad E' = E + M\gamma\alpha, \quad F' = F + M\alpha\beta.$$

2° Si OZ est un axe principal relatif au centre de gravité O, D et E sont nuls (**188**); si de plus on admet que le point O' soit sur OZ, c'est-à-dire que $\alpha = 0$, $\beta = 0$, on aura évidemment

$$D' = 0, \quad E' = 0, \quad F' = F,$$

donc O'Z' ou OZ sera encore axe principal d'inertie pour le point O'. De là ce théorème : *Chaque axe principal d'inertie d'un corps, relatif à son centre de gravité, jouit de la propriété de rester axe principal relativement à chacun de ses propres points.*

3° Étant donnée une droite OZ, déterminer sur cette droite un point O'

pour lequel OZ soit un axe principal d'inertie du corps? — Prenant OZ pour axe des z, on aura dans les formules (6), $\alpha=0$, $\beta=0$, et il faudra que l'on ait aussi $D'=0$, $E'=0$ pour que le point O' satisfasse à la question. De là les équations

$$0 = D - M\gamma y_1, \quad 0 = E - M\gamma x_1,$$

d'où

$$\frac{D}{My_1} = \frac{E}{Mx_1} = \gamma.$$

Il faudra donc, pour que le point O' existe, que l'on ait la relation $Dx_1 - Ey_1 = 0$, et alors l'équation précédente déterminera γ et fera connaître la position du point O'.

191. Nous allons montrer le rôle des moments d'inertie dans diverses questions relatives à la rotation. 1° Supposons un solide tournant actuellement autour d'un axe OR, fixe ou instantané, avec une vitesse angulaire ω, et cherchons la somme des moments des quantités de mouvement du solide par rapport à cet axe. Si m, r désignent la masse d'un point et sa distance à l'axe, sa quantité de mouvement est $m\omega r$, et comme elle est normale à l'axe OR et au rayon de rotation r, son moment par rapport à l'axe est $m\omega r^2$, le sens des moments positifs étant celui des rotations positives. On a donc, pour le solide entier,

$$\Sigma m\omega r^2 = \omega\Sigma mr^2 = H\omega,$$

donc *la somme des moments des quantités de mouvement d'un solide par rapport à son axe de rotation est égale au produit de la vitesse angulaire par le moment d'inertie du corps par rapport à cet axe.*

2° Pour trouver l'axe d'impulsion du solide relatif à un point O, pris sur l'axe de rotation OR, supposons que l'on choisisse pour axes coordonnés OX, OY, OZ les axes principaux d'inertie du solide par rapport au point O, considérés dans la position qu'ils occupent actuellement, et soient p, q, r les composantes de l'axe instantané OR suivant OX, OY, OZ. Les composantes de la vitesse d'un point M (x, y, z) sont (17)

$$v_x = qz - ry, \quad v_y = rx - pz, \quad v_z = py - qx.$$

La somme des moments des quantités de mouvement par rapport à OX sera donc

$$\Sigma m(yv_z - zv_y) = p\Sigma m(y^2 + z^2) - q\Sigma myx - r\Sigma mxz,$$

les facteurs p, q, r pouvant être mis hors du signe Σ. Mais OX, OY, OZ étant les axes principaux d'inertie, si A, B, C désignent les moments principaux correspondants, nous aurons

$$\Sigma m(y^2+z^2) = A, \quad \Sigma myz = 0, \quad \Sigma mxz = 0.$$

Substituant, et opérant de même pour les axes OY, OZ, *on aura*

$$Ap, \quad Bq, \quad Cr$$

pour les projections de l'axe d'impulsion du solide sur les axes principaux d'inertie relatifs au point O, *pris sur l'axe de rotation.*

3° Enfin, *la force vive totale du solide*, dans sa rotation autour de OR, a pour valeur

$$\Sigma mv^2 = \Sigma m\omega^2 r^2 = \omega^2 \Sigma mr^2 = H\omega^2;$$

elle *est le produit du carré de la vitesse angulaire par le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe de rotation.*

Soit Σmr^2 le moment d'inertie d'un corps par rapport à une droite; posons

$$\Sigma mr^2 = Mk^2.$$

La quantité k, définie par cette équation, se nomme souvent le *rayon de gyration.*

192. *Calcul des moments d'inertie.* — La difficulté est la même que dans la recherche des centres de gravité : une sommation à faire pour tous les points matériels d'un corps; et on la tourne de la même manière (**102**). Soient $H = \Sigma mr^2$ le moment d'inertie à évaluer, ρ la densité du corps en un point quelconque (x, y, z). Décomposons le volume V du corps en éléments *très petits* $\Delta\omega$; la masse contenue dans un de ces éléments étant $\rho\Delta\omega$, et la distance désignée par r étant sensiblement la même pour tous les points compris dans l'élément, la portion du moment d'inertie total H qui répond à l'élément $\Delta\omega$ sera sensiblement égale à $\rho\Delta\omega . r^2$, r se rapportant à un point déterminé de cet élément. On aura donc $H = \Sigma\rho r^2\Delta\omega$, le signe Σ se rapportant ici à tous les éléments de volume $\Delta\omega$ compris dans le corps. Or, cette somme ne diffère qu'infiniment peu de l'intégrale définie triple qui serait sa limite si l'on faisait tendre vers zéro tous les éléments $\Delta\omega$, en sorte que l'on aura sensiblement

$$H = \int_V \rho r^2 d\omega,$$

$d\omega$ étant l'élément *infiniment petit* du volume du corps, et les limites

de l'intégrale étant les mêmes que pour l'évaluation du volume de ce corps.

En raisonnant de la même manière, on transformera les formules

$$A = \Sigma m\,(y^2 + z^2),\quad B = \Sigma m\,(z^2 + x^2),\quad C = \Sigma m\,(x^2 + y^2),$$

qui déterminent exactement les moments d'inertie relatifs aux axes coordonnés, en celles-ci

$$A = \int_V \rho\,(y^2 + z^2)\,d\omega,\quad B = \int_V \rho\,(z^2 + x^2)\,d\omega,\quad C = \int_V \rho\,(x^2 + y^2)\,d\omega,$$

dont l'exactitude suffit pour les évaluations les plus précises. On aura de même

$$D = \int_V \rho yz\,d\omega,\quad E = \int_V \rho zx\,d\omega,\quad F = \int_V \rho xy\,d\omega.$$

Ces dernières intégrales s'annuleront si l'on choisit pour axes coordonnés les axes principaux relatifs à l'origine O.

192. Prenons pour exemple un parallélipipède rectangle homogène. L'origine étant au centre O, les axes OX, OY, OZ parallèles aux arêtes $2a$, $2b$, $2c$, la constante ρ sortant du signe d'intégration, il est clair que l'on a

$$\int yz\,d\omega = 0,\quad \int zx\,d\omega = 0,\quad \int xy\,d\omega = 0,$$

à cause de la symétrie par rapport aux plans coordonnés. Les axes OX, OY, OZ sont donc des axes principaux. Nous avons ensuite, en posant

$$d\omega = dx\,dy\,dz,$$

$$\int_V \rho x^2 d\omega = \rho \int_V x^2 d\omega = \rho \int_{-a}^{+a} x^2 dx \int_{-b}^{+b} dy \int_{-c}^{+c} dz = 4\rho bc \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{+a} = \frac{8\rho a^3 bc}{3},$$

ou, à cause de la relation $M = 8\rho abc$,

$$\int_V \rho x^2 d\omega = \frac{Ma^2}{3}.$$

Un calcul semblable donne

$$\int_V \rho y^2 d\omega = \frac{Mb^2}{3},\quad \int_V \rho z^2 d\omega = \frac{Mc^2}{3}.$$

Les moments principaux d'inertie relatifs au point O sont donc

$$A = \frac{M}{3}(b^2 + c^2),\quad B = \frac{M}{3}(c^2 + a^2),\quad C = \frac{M}{3}(a^2 + b^2).$$

Le moment d'inertie du parallélipipède par rapport à une droite

quelconque OS se tirera de la formule (4). Par exemple, pour une diagonale OK, on aura

$$H = \frac{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{2M}{3}\,\frac{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Faisant usage de la propriété établie au n° **189**, on trouve pour les moments d'inertie relatifs aux arêtes $2a$, $2b$, $2c$,

$$\frac{4M}{3}(b^2 + c^2), \quad \frac{4M}{3}(c^2 + a^2) \quad \frac{4M}{3}(a^2 + b^2).$$

194. Comme second exemple, déterminons le moment d'inertie H' d'une lentille homogène, biconvexe, comprise entre deux calottes sphériques de même rayon R, par rapport à une droite MN parallèle à l'axe de figure OX de la lentille et distante d'une quantité δ de cet axe. Soient $2a =$ AB l'épaisseur, $b =$ CD le rayon de la lentille. Cherchons d'abord le moment d'inertie H relatif à l'axe OX. Décomposons le volume de la lentille en tranches infiniment minces par des plans perpendiculaires à l'axe OX, et chaque tranche en anneaux engendrés par la révolution d'un élément plan $dxdy$ autour de cet axe. Nommant x, y les coordonnées d'un point de l'élément générateur, par rapport à AX, AY, on a évidemment



Fig. 93.

$$H = 4\pi\rho\int_0^a dx \int_0^{y_1} y^3 dy = \pi\rho\int_0^a y_1^4 dx,$$

$y_1 = \sqrt{x(2R - x)}$ représentant l'ordonnée de l'arc de cercle AD. De là

$$H = \pi\rho\int_0^a (2Rx - x^2)^2\, dx = \pi\rho a\left(\frac{4R^2}{3} - Ra + \frac{a^2}{5}\right).$$

Mais les coordonnées du point D étant a, b, on a

$$b^2 = a(2R - a) \quad \text{ou} \quad 2Ra = a^2 + b^2,$$

d'où, éliminant R, on tire

$$H = \frac{\pi\rho a}{30}(a^4 + 5a^2b^2 + 10b^4).$$

Pour avoir H', nous devons (**189**) ajouter à H le produit de la masse M de la lentille par le carré de la distance δ de son centre de gravité à la droite MN. Or, nous trouvons facilement

$$M = 2\rho.\pi\int_0^a y_1^2 dx = 2\pi\rho\int_0^a (2Rx - x^2)\, dx = 2\pi\rho a^2\left(R - \frac{a}{3}\right),$$

ou, mettant pour R sa valeur,

$$M = 2\pi\rho a\left(\frac{a^2}{6} + \frac{b^2}{2}\right) = \frac{\pi\rho a}{3}(a^2 + 3b^2).$$

Donc, enfin,

$$H' = \frac{\pi\rho a}{30}\left[a^4 + 5a^2b^2 + 10b^4 + 10(a^2 + 3b^2)\delta^2\right].$$

195. On a besoin de calculer, dans certaines questions de mécanique appliquée, le moment d'inertie d'une surface plane par rapport à une droite OX, ordinairement située dans son plan. On nomme ainsi la somme H des éléments infiniment petits $d\sigma$ de l'aire, multipliés respectivement par les carrés de leur distance r à la droite OX. On a donc

$$H = \Sigma r^2 d\sigma = \int dx \int r^2 dy,$$

les limites des intégrales étant déterminées par le contour de l'aire. Si la droite OX est prise pour axe des x, que l'on désigne par y_0, y les ordonnées correspondant à une même x sur le contour de l'aire, par x_0, x les valeurs de x entre lesquelles tombent tous les points de ce contour, on aura,

$$r = y, \quad H = \int_{x_0}^{x} dx \int_{y_0}^{y} y^2 dy = \frac{1}{3}\int_{x_0}^{x}(y^3 - y_0^3)\,dx.$$

Exemples. — I. *Rectangle, par rapport à une droite parallèle à un de ses côtés.* — Soient AD $= a$, AB $= b$ les côtés du rectangle, δ la distance du côté AD à la droite OX qui lui est parallèle. On a ici

$$y_0 = \delta, \quad y = \delta + b, \quad x = x_0 + a,$$

d'où

$$H = \frac{1}{3}\int_{x_0}^{x_0+a}[(\delta + b)^3 - \delta^3]\,dx = \frac{ab}{3}(3\delta^2 + 3b\delta + b^2).$$

II. *Ellipse, par rapport à l'un de ses axes.* — L'équation de l'ellipse étant

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

H est égal à quatre fois le moment d'inertie du quart de l'aire de l'ellipse; on a donc

$$x_0 = 0, \quad x = a, \quad y_0 = 0, \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

d'où

$$H = \frac{4b^3}{3a^3}\int_0^a (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx.$$

Posant $x = a \sin\varphi$, on trouve

$$H = \frac{4ab^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi d\varphi = \frac{ab^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\varphi)^2 d\varphi,$$

d'où

$$H = \frac{\pi ab^3}{4}.$$

Exercices.

1. Démontrer que la somme des moments d'inertie d'un corps par rapport à trois droites rectangulaires quelconques partant d'un point O est constante et égale à la somme des moments principaux relatifs au même point.

R. Conséquence de l'équation (4).

2. Déterminer le point de l'espace pour lequel les axes principaux d'inertie d'un corps donné sont parallèles à trois directions rectangulaires données.

R. L'origine des axes, parallèles à ces directions, étant placée au centre de gravité G du corps, soient $D = \Sigma myz$, $E = \Sigma mzx$, $F = \Sigma mxy$ les coefficients relatifs à ces axes; α, β, γ les coordonnées du point cherché. On a, par les équations (6),

$$\alpha = \sqrt{-\frac{EF}{MD}},\quad \beta = \sqrt{-\frac{FD}{ME}},\quad \gamma = \sqrt{-\frac{DE}{MF}}.$$

3. Étant donnés trois axes rectangulaires OX′, OY′, OZ′, et les coefficients correspondant à ces axes pour un corps donné, $A' = \Sigma m(y'^2 + z'^2),\ldots$, $D' = \Sigma m y' z',\ldots$, trouver les directions des axes principaux d'inertie relatifs au point O et les moments principaux correspondants A, B, C.

R. C'est le même problème que de trouver les directions et les grandeurs des axes principaux d'un ellipsoïde dont on a l'équation. Soient α, β, γ les angles directeurs d'un axe principal, H le moment d'inertie correspondant; on aura

$$\frac{A'\cos\alpha - F'\cos\beta - E'\cos\gamma}{\cos\alpha} = \frac{B'\cos\beta - D'\cos\gamma - F'\cos\alpha}{\cos\beta}$$
$$= \frac{C'\cos\gamma - E'\cos\alpha - D'\cos\beta}{\cos\gamma} = H.$$

De là

$$(\alpha)\quad \begin{cases} (A' - H)\cos\alpha - F'\cos\beta - E'\cos\gamma = 0, \\ -F'\cos\alpha + (B' - H)\cos\beta - D'\cos\gamma = 0, \\ -E'\cos\alpha - D'\cos\beta + (C' - H)\cos\gamma = 0, \end{cases}$$

Ces équations conduisent, par l'élimination de $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, à celle-ci :

$$\begin{vmatrix} A'-H & -F' & -E' \\ -F' & B'-H & -D' \\ -E' & -D' & C'-H \end{vmatrix} = 0,$$

équation dont les trois racines réelles en H donnent les valeurs des moments principaux demandés, après quoi le système (α) fera connaître, pour chacune de ces valeurs de H, les cosinus directeurs de l'axe principal correspondant.

4. Connaissant les axes et les moments principaux d'un corps relatifs à son centre de gravité G, trouver les axes et les moments principaux relatifs à un point donné K.

R. Les axes principaux relatifs à G étant pris pour axes coordonnés, soient A, B, C les moments principaux ; ξ, η, ζ les coordonnées du point K, $r = GK$; H le moment d'inertie du corps relatif à une droite menée par K et ayant pour cosinus directeurs $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. On a, par les équations (4) et (5),

$$H = (A+Mr^2)\cos^2\alpha + (B+Mr^2)\cos^2\beta + (C+Mr^2)\cos^2\gamma - M(\xi\cos\alpha + \eta\cos\beta + \zeta\cos\gamma)^2.$$

Pour rendre H maximum ou minimum, on pose $dH = 0$; on a d'ailleurs

$$\cos\alpha\, d.\cos\alpha + \cos\beta\, d.\cos\beta + \cos\gamma\, d.\cos\gamma = 0 ;$$

combinant ces relations et posant $\theta = Mr^2 - H$, on a

$$(A+\theta)\cos\alpha - M\xi(\xi\cos\alpha + \eta\cos\beta + \zeta\cos\gamma) = 0, \quad (B+\theta)\cos\beta - M\eta(\xi\cos\alpha + \cdots) = 0,$$
$$(C+\theta)\cos\gamma - M\zeta(\xi\cos\alpha + \cdots) = 0,$$

équations qui conduisent, par l'élimination de $\cos\alpha$, $\cos\beta$, ... à

$$(\beta) \quad \frac{\xi^2}{A+\theta} + \frac{\eta^2}{B+\theta} + \frac{\zeta^2}{C+\theta} = \frac{1}{M}.$$

Cette équation a trois racines réelles en θ, qui sont les valeurs de $Mr^2 - H$ correspondant aux axes principaux d'inertie relatifs au point K. La direction d'un axe principal vérifie les équations

$$\frac{\cos\alpha}{\dfrac{\xi}{A+\theta}} = \frac{\cos\beta}{\dfrac{\eta}{B+\theta}} = \frac{\cos\gamma}{\dfrac{\zeta}{C+\theta}},$$

qui conduisent au théorème suivant : *Si dans l'équation* (β) *on considère* ξ, η, ζ, *comme des coordonnées courantes ;* θ *comme un paramètre variable, cette équation représente un système de surfaces du second ordre homofocales à l'ellipsoïde*

$$\frac{\xi^2}{A} + \frac{\eta^2}{B} + \frac{\zeta^2}{C} = 1.$$

Par chaque point K *de l'espace passent trois de ces surfaces* (ellipsoïde, hyperboloïdes à une et à deux nappes); *les tangentes aux courbes d'intersection des trois surfaces en* K *se coupent à angle droit, et sont les directions des axes principaux d'inertie relatifs au point* K.

5. Connaissant les axes et les moments principaux relatifs au centre de gravité d'un

corps, trouver les points de l'espace pour lesquels l'ellipsoïde d'inertie se réduit à une sphère.

R. On calcule, par la transformation des coordonnées parallèles (1[illegible]), les quantités $\Sigma m(y'^2+z'^2),\ldots\ \Sigma m y'z',\ldots$ relatives à un point quelconque; on trouve 1° qu'il faut que l'ellipsoïde d'inertie relatif au c. de gr. soit de révolution autour de son plus petit axe; 2° qu'il y a alors deux points vérifiant la condition, situés sur cet axe de part et d'autre de G, à une distance $\sqrt{\dfrac{C-A}{M}}$, C se rapportant à l'axe de révolution.

6. M. d'in. d'un ellipsoïde homogène par rapport aux axes.

R. Soient $2a, 2b, 2c$ les axes; on a

$$A=\frac{M}{5}(b^2+c^2),\quad B=\frac{M}{5}(c^2+a^2),\quad C=\frac{M}{\overline{5}}(a^2+b^2).$$

7. M. d'in. d'une sphère homogène par rapport à un diamètre.

R. Le rayon de la sphère étant R, on a

$$H=\frac{8\pi}{15}\rho R^5=\frac{2M}{5}R^2.$$

8. Même problème, la densité décroissant uniformément du centre à la surface.

R. Soient ρ_0 la densité au centre, $\rho_0-\mu r$ la densité à une distance r, on a

$$H=\frac{8\pi R^5}{3}\left(\frac{\rho_0}{5}-\frac{\mu R}{6}\right).$$

9. M. d'in. d'un cylindre circulaire homogène de rayon a, de hauteur $2h$, par rapport à son axe.

R. $$H=\pi\rho h a^4.$$

10. M. d'in. du même corps, par rapport à une perpendiculaire au milieu de son axe.

R. On décompose le cylindre en éléments par des plans z parallèles aux bases, des plans φ passant par l'axe, des cylindres r de révolution autour de l'axe. On trouve

$$H=\rho\int_{-h}^{+h}dz\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a(z^2+r^2\sin^2\varphi)\,r\,dr=2\pi\rho a^2h\left(\frac{a^2}{4}+\frac{h^2}{3}\right)=M\left(\frac{a^2}{4}+\frac{h^2}{3}\right).$$

11. M. d'in. d'un cylindre elliptique homogène par rapport à son axe.

R. Hauteur $2h$; a, b demi-axes de la base;

$$H=\frac{2\rho b}{a}\int_0^{2h}dz\int_{-a}^{+a}x^2dx\sqrt{a^2-x^2}+\frac{2\rho}{3}\frac{b^3}{a^3}\int_0^{2h}dz\int_{-a}^{+a}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx;$$

$$H=\frac{\pi\rho h a b}{2}(a^2+b^2)=\frac{M}{4}(a^2+b^2.$$

12. M. d'in. d'une droite homogène par rapport à un axe passant par son extrémité et incliné d'un angle β.

R. Soit l la longueur de la droite;

$$H = \frac{\rho}{3} l^3 \sin^2 \beta.$$

13. M. d'inertie de l'aire d'un triangle isocèle, par rapport à la hauteur h perpendiculaire au milieu de la base $2b$.

R. $$H = \frac{b^3 h}{6}.$$

14. Une figure plane, symétrique par rapport à une droite AB, tourne autour d'une parallèle OX à AB et engendre un solide de révolution homogène. Trouver le moment d'inertie H de ce solide par rapport à OX.

R. $H = M(3k^2 + \delta^2)$, δ étant la distance entre AB et OX, k le rayon de gyration de la figure plane par rapport à AB, M la masse du solide engendré.

15. Trouver le moment d'inertie d'un anneau homogène, engendré par un losange tournant autour d'un axe OX parallèle à une de ses diagonales, par rapport à l'axe OX.

R. Application du précédent.

16. M. d'in. d'un tore homogène par rapport 1° à son axe de figure; 2° à un diamètre équatorial.

R. M, masse du tore; a, rayon du cercle générateur; δ, distance de son centre à l'axe de figure.

$$1° \quad C = M\left(\delta^2 + \frac{3a^2}{4}\right); \qquad 2° \quad A = M\left(\frac{\delta^2}{2} + \frac{7}{8}a^2\right).$$

CHAPITRE XV.

MOUVEMENT D'UN SOLIDE.

§ 1. MOUVEMENT D'UN SOLIDE AUTOUR D'UN AXE FIXE.

196. Considérons un solide qui ne peut que tourner autour d'un axe fixe OO′; soient, à l'époque t, ω la vitesse angulaire du solide autour de OO′, P_1 la composante, normalement à l'axe, de l'une quelconque des forces qui agissent sur le corps, p la distance entre l'axe et cette composante, H le moment d'inertie *constant* du solide par rapport à l'axe.

Appliquons le théorème des moments (**170**) : la dérivée par rapport à t de la somme des moments des quantités le mouvement relative à l'axe fixe OO′, est égale à la somme des moments des forces extérieures par rapport au même axe. Or, la première de ces deux sommes est égale

à $H\omega$ (**191**), la seconde à $\Sigma P_1 p$ (**72**), le signe Σ s'étendant à toutes les forces extérieures. Les réactions des points fixes O et O' font partie des forces extérieures, mais leurs moments sont nuls. On a donc

$$\frac{d.H\omega}{dt} = \Sigma P_1 p,$$

ou, autrement,

$$(1) \qquad \frac{d\omega}{dt} = \frac{\Sigma P_1 p}{H}.$$

A chaque instant, *la dérivée de la vitesse angulaire par rapport au temps est égale à la somme des moments des forces appliquées au solide par rapport à l'axe de rotation, divisée par le moment d'inertie du solide par rapport au même axe.*

On doit observer que l'équation (1) suppose que le sens des moments *positifs* soit le même que le sens de la rotation *positive*, et qu'ainsi, le produit $P_1 p$ doit être affecté du signe $+$ ou du signe $-$ selon que la force P_1 tend à produire une rotation dans le sens positif ou en sens contraire.

Soit θ l'angle compris entre deux plans, l'un fixe, l'autre mobile avec le solide, passant par l'axe. On sait que l'on a

$$\omega = \frac{d\theta}{dt};$$

substituant cette valeur dans l'équation (1), on aura une équation du second ordre en θ, et si on sait l'intégrer, on en déduira les valeurs de θ, ω en fonction du temps, avec deux constantes arbitraires que déterminent les valeurs θ_0, ω_0 de ces variables pour $t = 0$.



Fig. 94.

197. Comme exemple du mouvement d'un solide autour d'un axe fixe, prenons un solide pesant et un axe horizontal. G étant le centre de gravité du solide, menons par ce point un plan GOZ perpendiculaire à l'axe, et soient O l'intersection de ce plan et de l'axe, $OG = a$ la distance du centre de gravité à l'axe, M la masse du solide, θ l'angle variable que fait la droite OG avec la verticale OZ, α la valeur de θ pour $t = 0$.

Nous pouvons appliquer l'équation (1), mais le théorème des forces

vives conduit plus vite au résultat. La force vive totale du solide, à l'époque t, a pour expression (**191**) $H\omega^2$. Le travail produit par la pesanteur, depuis l'époque $t = 0$ jusqu'à l'époque t, est mesuré (**177**) par

$$Mg\,[z_1 - z_{10}] = Mga\,(\cos\theta - \cos\alpha).$$

L'axe étant fixe, le travail des réactions des points d'appui est égal à zéro. On a donc, en vertu du théorème des forces vives (**180**) et en supposant nulle la vitesse initiale

$$H\omega^2 = 2Mga\,(\cos\theta - \cos\alpha),$$

ou

$$(2) \qquad \frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{2Mga}{H}(\cos\theta - \cos\alpha).$$

Telle est l'équation différentielle du premier ordre qui détermine l'angle θ et par suite fait connaître le mouvement du solide : on l'aurait tirée de l'équation (1) par une première intégration.

Mais il est inutile d'intégrer l'équation (2), car on voit sans peine que si l'on pose

$$\frac{Ma}{H} = \frac{1}{l} \quad \text{ou} \quad (3) \quad l = \frac{H}{Ma},$$

elle prend la forme

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\alpha),$$

et devient identique avec celle qui détermine (**156**) le mouvement du pendule simple de longueur l. Donc la droite OG, dans le solide, a exactement le même mouvement qu'un pendule simple dont la longueur l est définie par l'équation (3), et comme ce dernier mouvement nous est bien connu, comme d'ailleurs il est clair que le mouvement de la droite OG détermine celui du solide tout entier, le problème proposé est résolu.

198. On nomme *pendule composé* un solide pesant qui oscille autour d'un axe horizontal; sa *longueur* l est la longueur du pendule simple dont le mouvement serait le même que celui de la droite OG dans le pendule composé : elle est donnée par l'équation (3). Ainsi *la longueur du pendule composé est égale au moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe de suspension, divisé par le produit de la masse du pendule et de la distance de son centre de gravité à l'axe.*

Toutes les conséquences développées aux numéros **156** et suiv. sont applicables : ainsi, l'amplitude des oscillations étant supposée très petite, la durée d'une demi-oscillation sera donnée par la formule

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad \text{etc...}$$

Prenons sur OG, à partir du point O, une longueur OC égale à l; C sera le *centre d'oscillation* du pendule, O étant le *centre de suspension.*

Concevons, par le centre de gravité G du solide, une parallèle à l'axe; soit Mk^2 le moment d'inertie du solide par rapport à cette parallèle. Nous aurons, par le théorème connu (**189**),

$$H = Mk^2 + Ma^2,$$

d'où

$$l = a + \frac{k^2}{a},$$

ce qui montre d'abord que l est $> a$; donc *le centre de gravité est toujours compris entre le centre d'oscillation et le centre de suspension.* De plus, il vient

$$a(l - a) = GO \cdot GC = k^2.$$

Or, k^2 est évidemment constant si la direction de l'axe de suspension ne change pas par rapport au solide, donc le produit GO · GC reste aussi constant dans ces conditions. En particulier, *si l'on prend le point* C *pour centre de suspension,* O *deviendra le centre d'oscillation,* et la longueur l du pendule, conséquemment *la durée d'oscillation, ne variera pas.* En d'autres termes, *le centre d'oscillation et le centre de suspension sont réciproques l'un de l'autre.*

On peut même s'assurer que la longueur l reste la même pour tous les axes de suspension parallèles, situés à la même distance du centre de gravité, et que, de tous les axes parallèles, celui qui donne l'oscillation la plus courte correspond à

$$1 - \frac{k^2}{a^2} = 0, \qquad \text{ou} \qquad a = k.$$

D'après l'expression de T, si l était connu, la valeur de g se déduirait sans peine de la durée d'oscillation du pendule. Pour déterminer l, on forme un pendule muni de deux couteaux de suspension ayant leurs

arêtes O et C parallèles, mais placés en sens inverse; l'un des couteaux est susceptible d'un glissement parallèle au moyen d'une vis. On fait osciller le pendule en le suspendant successivement sur ces deux couteaux, et l'on déplace le couteaux mobile jusqu'à ce que la durée d'oscillation soit exactement la même dans les deux positions. On s'assure d'ailleurs que le centre de gravité G du pendule est sur la ligne OC, à des distances inégales des arêtes O et C. Ces résultats obtenus, on est certain que si le centre de suspension est en O, le centre d'oscillation est en C, car l'égalité des durées T d'oscillation entraîne l'égalité des longueurs l des pendules. On a donc, en posant $OG = a$, $GC = b$,

$$a + \frac{k^2}{a} = b + \frac{k^2}{b}, \quad a - b = k^2 \frac{a - b}{ab},$$

d'où

$$ab = k^2,$$

c'est précisément la relation qui caractérise les centres d'oscillation et de suspension. On a donc $a + b = l$, et en mesurant avec soin la distance OC on connaîtra la longueur l.

199. *Pression sur l'axe.* — Revenons au cas général du N° **196**. Pour calculer les pressions que le solide tournant exerce sur ses points d'appui fixes O et O′, prenons OO′ pour axe des z positifs, l'origine en O, $OO' = a$. Soient X, Y, Z les composantes parallèles aux axes rectangulaires de l'une quelconque des forces P qui sollicitent le solide; x, y, z les coordonnées de son point d'application, U, V, W les composantes de la réaction du point O; U′, V′, W′ celles de la réaction du point O′. Joignons ces réactions aux forces motrices; le solide sera considéré comme libre, et l'on appliquera les équations (3) et (7) du chapitre XIII, § 1.

On a d'abord, pour un point quelconque (**17**).

$$v_x = -\omega y, \quad v_y = \omega x, \quad v_z = 0,$$

d'où

$$\Sigma m v_x = -\omega \Sigma m y, \quad \Sigma m v_y = \omega \Sigma m x, \quad \Sigma m v_z = 0,$$

$$\Sigma m (y v_z - z v_y) = -\omega \Sigma m x z, \quad \Sigma m (z v_x - x v_z) = -\omega \Sigma m y z,$$

$$\Sigma m (x v_y - y v_x) = \omega \Sigma m (x^2 + y^2) = H\omega.$$

De là on tire, en prenant les dérivées par rapport à t, remplaçant

v_x, v_y, v_z par leurs valeurs ci-dessus, et observant que

$$\Sigma mx = Mx_1, \quad \Sigma my = My_1,$$

$$\frac{d}{dt}\Sigma mv_x = -M\left(\omega^2 x_1 + \frac{d\omega}{dt}y_1\right), \quad \frac{d}{dt}\Sigma mv_y = -M\left(\omega^2 y_1 - \frac{d\omega}{dt}x_1\right),$$

$$\frac{d}{dt}\Sigma mv_z = 0, \quad \frac{d}{dt}\Sigma m(yv_z - zv_y) = \omega^2\Sigma myz - \frac{d\omega}{dt}\Sigma mxz,$$

$$\frac{d}{dt}\Sigma m(zv_x - xv_z) = -\omega^2\Sigma mxz - \frac{d\omega}{dt}\Sigma myz,$$

$$\frac{d}{dt}\Sigma m(xv_y - yv_x) = H\frac{d\omega}{dt}.$$

Substituons ces résultats dans les équations (3) et (7) du ch. XIII. Il viendra

$$(4) \quad \left\{\begin{array}{l} \Sigma X + U + U' = -M\left(\omega^2 x_1 + \frac{d\omega}{dt}y_1\right), \\ \Sigma Y + V + V' = -M\left(\omega^2 y_1 - \frac{d\omega}{dt}x_1\right), \\ \Sigma Z + W + W' = 0; \end{array}\right.$$

$$(5) \quad \left\{\begin{array}{l} \Sigma(yZ - zY) - aV' = \omega^2\Sigma myz - \frac{d\omega}{dt}\Sigma mxz, \\ \Sigma(zX - xZ) + aU' = -\omega^2\Sigma mxz - \frac{d\omega}{dt}\Sigma myz, \\ \Sigma(xY - yX) = H\frac{d\omega}{dt}. \end{array}\right.$$

La dernière équation n'est autre que l'équation (1); c'est celle qui détermine le mouvement du solide. Les deux premières équations (5) font ensuite connaître U' et V', après quoi l'on tire des deux premières équations (4) les valeurs de U et de V. Quant aux réactions suivant l'axe, W et W', leur somme seule est déterminée par l'équation

$$W + W' = \Sigma Z,$$

par un motif que nous avons déjà discuté (91). Elle est d'ailleurs la même que si le solide était en repos.

200. Considérons en particulier le cas où le solide continue à

tourner en vertu d'une impulsion acquise, sans qu'aucune force agisse encore sur lui. Nous ferons $X = Y = Z = 0$ pour un point quelconque. La dernière équation (5) nous donnera

$$\frac{d\omega}{dt} = 0, \qquad \omega = \text{const.} = \omega_0.$$

Ainsi, *la vitesse angulaire de rotation ne varie plus.* De plus, nous aurons

$$U + U' = -M\omega^2 x_1, \quad V + V' = -M\omega^2 y_1, \quad W + W' = 0,$$
$$aV' = -\omega^2 \Sigma myz, \quad aU' = -\omega^2 \Sigma mxz,$$

équations qui servent à calculer les réactions des points d'appui O, O'.

Supposons que l'axe OO' soit un axe principal d'inertie du solide relatif au point O; nous aurons, quel que soit t,

$$\Sigma myz = 0, \quad \Sigma mxz = 0,$$

d'où

$$U' = 0, \quad V' = 0.$$

On sait d'ailleurs que la réaction W' du point O' peut être supposée transportée en O (**91**) sans que rien soit changé au mouvement du système; cela revient à supposer $W' = 0$. Or, U', V', W' représentent les forces qu'il faudrait appliquer en O, si ce point cessait d'être fixé, pour que le mouvement du solide continuât sans changement. Donc, *si un solide s'appuie sur un point fixe O, et est animé d'une vitesse quelconque autour d'un de ses axes principaux d'inertie par rapport à ce point; si d'ailleurs aucune force extérieure n'agit plus sur le solide, il continuera indéfiniment à tourner, avec la même vitesse angulaire, autour de cet axe comme s'il était fixe.*

Cette propriété a fait donner aux axes principaux d'inertie le nom *d'axes permanents de rotation;* elle s'appliquera même à un solide pesant, si le point fixe O coïncide avec le centre de gravité du corps, puisque alors l'action de la pesanteur sera détruite.

Les conditions précédentes étant toujours remplies, supposons en outre que le point O soit le centre de gravité du solide. Nous aurons $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, et les expressions des réactions des points d'appui deviendront

$$U' = 0, \quad V' = 0, \quad U = 0, \quad V = 0, \quad W + W' = 0,$$

d'où il suit que l'on peut rendre libres ces deux points, dont les réac-

tions sont nulles, sans troubler le mouvement du solide. Donc *un solide libre, qui a reçu une rotation initiale autour d'un des trois axes principaux d'inertie relatifs à son centre de gravité, et n'est soumis d'ailleurs à aucune force extérieure, continue à tourner indéfiniment d'un mouvement uniforme autour de cet axe comme s'il était fixe.*

Pour ce motif, on donne à ces axes principaux le nom d'*axes naturels de rotation*.

Exercices.

1. Soient A, B, C les moments principaux d'inertie d'un solide, relatifs à son centre de gravité; α, β, γ les angles directeurs d'une droite quelconque, par rapport aux axes de ces moments; a la distance du centre de gravité à cette droite. Toutes les droites qui vérifient la condition

$$a + \frac{A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma}{Ma} = \text{const.},$$

sont des axes de suspension synchrones.

2. Déterminer la longueur du pendule composé formé d'une sphère homogène, de rayon R, dont le centre est fixé sur une tige rectiligne sans masse, suspendue à un point fixe O.

3. Un pendule composé est formé de deux sphères homogènes, de rayons R, R', de masses M, M', dont les centres sont sur une tige rectiligne sans masse. La sphère inférieure restant fixe, quelle position faut-il donner à l'autre pour que la durée de l'oscillation soit aussi courte que possible?

R. Soient a, x les distances respectives des centres de la première et de la seconde sphère au centre de suspension. La longueur du pendule est

$$l = \frac{M(2R^2 + 5a^2) + M'(2R'^2 + 5x^2)}{5(Ma + M'x)}.$$

La valeur de x qui rend l minimum est racine de l'équation

$$x^2 + \frac{2Ma}{M'}x - \frac{M(2R^2 + 5a^2) + 2MM'^2}{5M'} = 0.$$

Si les sphères ont même rayon et même densité, on a

$$x = a + \sqrt{2a^2 + \frac{4R^2}{5}}.$$

4. Un pendule composé est formé d'une tige mince portant un cylindre étroit dont l'axe est dans le prolongement de la tige, et qui renferme du mercure. On connaît le poids P de ce pendule, les distances a, l de son centre de gravité et de son centre d'oscillation à l'axe horizontal de rotation, le rayon intérieur r du cylindre, la distance

du niveau du mercure à l'axe de suspension. On demande la hauteur x de mercure qu'il faut ajouter dans le cylindre pour que le pendule batte exactement la seconde.

R. La longueur λ du pendule à seconde est

$$\lambda = \frac{g}{\pi^2} = \frac{9,809}{(3,14159)^2}.$$

Calculant par la formule (3) la longueur du pendule formé du pendule primitif et du petit cylindre de mercure de hauteur x, on aura d'autre part

$$\lambda = \frac{Pal + gH'}{Pa + M'a'g},$$

M', a', H' se rapportant au petit cylindre. On trouve, ρ étant la densité du mercure,

$$M' = \pi\rho r^2 x, \quad a' = u - \frac{x}{2}, \quad H' = \pi\rho r^2 x\left(\frac{r^2}{4} + u^2 - ux + \frac{x^2}{3}\right),$$

et en égalant les deux valeurs de λ, on a pour déterminer x l'équation

$$x^3 - 3x^2\left(u - \frac{g}{2\pi^2}\right) + 3x\left(u^2 + \frac{r^2}{4} - \frac{gu}{\pi^2}\right) + \frac{3Pa}{\pi\rho r^2}\left(\frac{l}{g} - \frac{1}{\pi^2}\right) = 0.$$

5. Une plaque pesante, homogène, infiniment mince et ayant la forme d'un triangle rectangle, peut tourner autour d'un axe horizontal normal à son plan et passant par le sommet A de l'angle droit. Déterminer 1° l'angle que fait un des côtés c de l'angle droit avec l'horizontale située dans le plan d'oscillation, quand la plaque est en équilibre; 2° l'amplitude des oscillations qu'exécute la plaque lorsqu'on l'abandonne à son poids, le côté c ayant été amené dans la position horizontale.

R. Soient a l'hypothénuse, b le troisième côté du triangle, ρ la densité superficielle, θ l'angle que fait le côté c avec l'horizontale AX à l'époque t. Application de l'équation (1). On trouve

$$H = \frac{\rho bca^2}{12}, \quad P = \frac{1}{2}g\rho bc, \quad p = \frac{a}{3}\sin(C-\theta) \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{2g}{a}\sin(C-\theta).$$

Pour l'équilibre, il faut que $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$, $\theta = C$.

L'amplitude des oscillations est égale à l'angle C. Le mouvement est celui d'un pendule de longueur $a : 2$.

6. Une barre MN est suspendue par deux fils verticaux, de longueur égale a, à deux points fixes A, B, et peut tourner autour d'un axe vertical OO' passant par le centre de gravité O de la barre. On écarte celle-ci très-peu de sa position d'équilibre, et on l'abandonne à la réaction des fils suspenseurs. Déterminer son mouvement, en supposant que l'angle θ que fait la barre avec sa position d'équilibre soit toujours assez petit pour qu'on puisse admettre qu'elle reste dans un plan horizontal, et que $\sin\theta = \theta$.



Fig. 95.

R. Soient P le poids de la barre, OM $= m$, ON $= n$. Les moments des réactions horizontales des fils sont

$$-\frac{Pm^2n\theta}{a(m+n)}, \quad -\frac{Pmn^2\theta}{a(m+n)},$$

et l'on a, par l'équation (1), en désignant par H le moment d'inertie de la barre par rapport à OO′, posant $Pmn = aHk^2$,

$$\theta = \theta_0 \cos kt, \qquad \omega = -k\theta_0 \sin kt.$$

7. Un pendule composé est formé d'une tige cylindrique AB (fig. 96), suspendue en O, d'une lentille biconvexe (104) fixée à la tige en A, d'un curseur C mobile sur la branche supérieure OB (*métronome de Maelzel*). En quel point faut-il amener le curseur pour que le métronome batte par minute un nombre donné n d'oscillations? — On suppose le curseur assez petit pour qu'on puisse l'assimiler à un simple point matériel.



Fig. 96.

R. P, poids de la lentille, P′ de la tige, ϖ du curseur; OA $= a$, OB $= b$; 2α, épaisseur de la lentille; β, rayon de base des calottes sphériques qui la terminent; k, k' rayons de gyration de la lentille et de la tige par rapport à l'axe de suspension; x l'inconnue OC.

La longueur l du pendule composé est

$$(\alpha) \qquad l = \frac{2(Pk^2 + P'k'^2 + \varpi x^2)}{2P(a+b) + P'(a-b) - 2\varpi x},$$

les portions OA, OB de la tige ayant respectivement pour poids

$$\frac{P'a}{a+b}, \quad \frac{P'b}{a+b}.$$

On a d'ailleurs, par le N° 104,

$$k^2 = a^2 + 2a\beta + \frac{\alpha^4 + 15\alpha^2\beta^2 + 10\beta^4}{10(\alpha^2 + 3\beta^2)}, \qquad k'^2 = \frac{a^2 - ab + b^2}{3}.$$

Enfin, pour satisfaire à la condition du problème, il faut que l'on ait

$$l = \frac{g}{n^2\pi^2}(60)^2 = \frac{9{,}809 \times 3600}{n^2(3{,}14159)^2}.$$

On tire de l'équation (α), pour déterminer x, l'équation

$$x^2 + lx + \frac{P}{\varpi}(k^2 - al - bl) + \frac{P'}{\varpi}\left(k'^2 - \frac{al}{2} + \frac{bl}{2}\right) = 0,$$

dans laquelle il faudra mettre pour k, k', l leurs valeurs ci-dessus.

8. Un solide, animé d'une vitesse initiale ω_0 autour d'un axe fixe, n'est soumis qu'à l'action d'une résistance équivalente à une force $A + B\omega^2$, agissant normalement à la distance p de l'axe. Déterminer le mouvement du corps, l'époque t_1 à laquelle ce mouvement s'arrêtera, et l'angle total θ_1 dont le corps aura tourné à cet instant.

R. Nommant H le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe et posant

$$\frac{B}{A} = \alpha^2, \quad \frac{Ap}{H} = \beta,$$

on trouvera l'équation différentielle

$$d\omega = -\beta\,(1 + \alpha^2\omega^2)\,dt,$$

d'où l'on tirera

$$\omega = \frac{1}{\alpha}\,\frac{\alpha\omega_0 \cos\alpha\beta t - \sin\alpha\beta t}{\cos\alpha\beta t + \alpha\omega_0 \sin\alpha\beta t}, \quad \theta = -\frac{1}{\alpha^2\beta}\,\mathrm{l.}\,(\cos\alpha\beta t + \alpha\omega_0 \sin\alpha\beta t),$$

$$t_1 = \frac{1}{\alpha\beta}\,\mathrm{arc\,tg}\,\alpha\omega_0, \qquad \theta_1 = -\frac{1}{2\alpha^2\beta}\,\mathrm{l.}\,(1 + \alpha^2\omega_0^2).$$

§ 2. MOUVEMENT D'UN SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE.

201. Un solide est fixé par un de ses points O; on donne les positions et les vitesses initiales de tous les autres et les forces qui agissent sur le solide à un instant quelconque. Il s'agit de déterminer le mouvement du solide, c'est-à-dire les positions et les vitesses de tous ses points dans toute la suite du temps.

Pour simplifier le problème, prenons comme dans la cinématique (**24**) troix axes rectangulaires Ox, Oy, Oz liés au solide et mobiles avec lui, axes dont la position à chaque instant, par rapport aux trois axes rectangulaires fixes OX, OY, OZ, sera définie par leurs cosinus directeurs ou au moyen des trois angles ψ, θ, φ déjà introduits (**29**). Chaque point du solide ayant une position fixe par rapport au système $Oxyz$, le mouvement de ce système fera connaître entièrement celui du corps.

Pour former les équations différentielles du mouvement, appliquons le théorème du n° **170** : *Si l'on détermine à chaque instant l'axe* OG *du couple résultant des forces extérieures et l'axe d'impulsion* OK, *pour le centre de réduction fixe* O, OG *sera égal et parallèle à la vitesse du point* K.

Pouvant choisir les axes Ox, Oy, Oz dans le solide, nous prendrons les axes principaux d'inertie relatifs au point O. Soient A, B, C les moments principaux correspondants; p, q, r les projections sur Ox, Oy, Oz de l'axe instantané de rotation OR; G_x, G_y, G_z celles de l'axe du couple résultant des forces motrices, à l'époque t. On sait (**191**, 2°) que les projections de OK sur les axes mobiles, ou les coordonnées du point K par rapport à ces axes, sont Ap, Bq, Cr; leurs dérivées par rapport au temps donneront les composantes, parallèles à Ox, Oy, Oz de la vitesse *relative* du point K *par rapport au système* $Oxyz$, soit

$$A\frac{dp}{dt}, \quad B\frac{dq}{dt}, \quad C\frac{dr}{dt}.$$

Pour avoir les composantes, parallèles aux mêmes axes, de la vitesse *absolue* du point K, nous devons (**12**) ajouter respectivement à celles-là les composantes de la vitesse d'*entraînement* du point K, c'est-à-dire, d'après les formules du N° **17** qui expriment les composantes de la vitesse d'un point pour un solide en rotation,

$$q \cdot Cr - r \cdot Bq = (C - B)\,qr, \quad (A - C)\,rp, \quad (B - A)\,pq.$$

D'après le théorème rappelé, il faut égaler les projections de la vitesse totale du point K sur Ox, Oy, Oz respectivement à celles de l'axe du couple moteur G, ce qui fournit les *Équations d'Euler :*

$$(1)\quad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C - B)\,qr = G_x, \\[2mm] B\dfrac{dq}{dt} + (A - C)\,rp = G_y, \\[2mm] C\dfrac{dr}{dt} + (B - A)\,pq = G_z. \end{cases}$$

Les réactions du point fixe font partie des forces extérieures, mais leurs moments par rapport à Ox, Oy, Oz étants nuls, on n'en tiendra pas compte dans les équations (1).

Si les quantités G_x, G_y, G_z étaient données en fonction de p, q, r, t, ces trois équations du premier ordre pourraient être intégrées, feraient connaître p, q, r en fonction du temps, avec trois constantes arbitraires que l'on déterminerait, connaissant les composantes p_0, q_0, r_0 de la rotation initiale. Puis on déduirait de là la position du mobile à une époque quelconque en substituant ces valeurs de p, q, r dans les équations du N° **29**,

$$(2)\quad \begin{cases} p = \sin\theta \sin\varphi \dfrac{d\psi}{dt} + \cos\varphi \dfrac{d\theta}{dt}, \\[2mm] q = \sin\theta \cos\varphi \dfrac{d\psi}{dt} - \sin\varphi \dfrac{d\theta}{dt}, \\[2mm] r = \cos\theta \dfrac{d\psi}{dt} + \dfrac{d\varphi}{dt}, \end{cases}$$

intégrant ce système d'équations du premier ordre entre ψ, θ, φ et t, et déterminant les constantes arbitraires de l'intégration par les données initiales $\psi_0\ \theta_0\ \varphi_0$.

Mais, en général, G_x, G_y, G_z dépendent de la position du solide et sont donnés immédiatement en fonction de ψ, θ, φ. Alors le système (1) ne peut plus être intégré indépendamment du système (2), il faut éliminer p, q, r entre les deux systèmes, ce qui conduit à trois équations du second ordre entre ψ, θ, φ et t.

202. *Cas où il n'y a pas de forces motrices.* — Lorsque les forces extérieures manquent ou donnent une résultante passant par le point fixe, OG est nul et les équations (1) se réduisent à celles-ci :

$$(3)\quad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt}+(C-B)\,qr=0, \\ B\dfrac{dq}{dt}+(A-C)\,rp=0, \\ C\dfrac{dr}{dt}+(B-A)\,pq=0. \end{cases}$$

On a une première intégrale en multipliant par p, q, r et ajoutant, ce qui donne

$$Apdp+Bqdq+Crdr=0,$$

d'où, intégrant et désignant par h une constante,

$$(4)\qquad Ap^2+Bq^2+Cr^2=h.$$

C'est l'*intégrale des forces vives*, car, comme il n'y a pas de travail des forces extérieures, la force vive du corps est constante (**179**), et son expression est (**191**, 3°)

$$H\omega^2=\omega^2\left(A\frac{p^2}{\omega^2}+B\frac{q^2}{\omega^2}+C\frac{r^2}{\omega^2}\right)=Ap^2+Bq^2+Cr^2.$$

On trouve une seconde intégrale en multipliant ces mêmes équations (3) par Ap, Bq, Cr et ajoutant; il vient

$$A^2pdp+B^2qdq+C^2rdr=0,$$

d'où, intégrant et désignant par l une constante,

$$(5)\qquad A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2=l^2.$$

C'est l'intégrale du *théorème de la conservation des moments* (**171**); car l'axe d'impulsion OK qui a pour projections Ap, Bq, Cr sur les axes mobiles, doit être ici invariable en grandeur et en direction.

Avant de déduire les conséquences remarquables qui découlent de ces

équations, nous considérerons un cas particulier dans lequel le calcul s'achève sans l'intervention des fonctions elliptiques.

202. Supposons que deux des moments principaux soient égaux, A = B : l'ellipsoïde d'inertie est de révolution autour de l'axe Oz. La troisième équation (1) devient

$$\frac{dr}{dt} = 0, \quad r = \text{const.} = n,$$

n étant la composante de la rotation initiale du solide autour de l'axe Oz. Les deux premières deviennent, en posant $C - A = A\mu$,

$$(\alpha) \qquad \frac{dp}{dt} + \mu n q = 0, \quad \frac{dq}{dt} - \mu n p = 0,$$

d'où l'on tire en éliminant q

$$\frac{d^2p}{dt} + \mu n \frac{dq}{dt} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2p}{dt^2} + \mu^2 n^2 p = 0.$$

L'intégrale de cette équation est, α et β désignant des constantes,

$$p = \alpha \sin(\mu n t + \beta),$$

d'où, par la première équation (α), on tire

$$q = -\alpha \cos(\mu n t + \beta).$$

On en déduit

$$p^2 + q^2 = \alpha^2 = p_0^2 + q_0^2.$$

α est donc la composante de la rotation initiale normalement à l'axe Oz. Pour $t = 0$, on a

$$\alpha \sin \beta = p_0, \quad \alpha \cos \beta = -q_0,$$

ce qui détermine entièrement l'angle β. De plus, étant libres de choisir l'axe fixe OZ, dirigeons le suivant l'axe d'impulsion OK qui est fixe. Les projections de OK sur Ox, Oy, Oz sont ici Ap, Aq, Cn, donc

$$\cos \theta = \cos \overline{Zz} = \frac{Cn}{l} = \frac{Cn}{\sqrt{A^2\alpha^2 + C^2n^2}},$$

l'angle θ est constant : *l'axe de révolution Oz de l'ellipsoïde d'inertie décrit un cône circulaire droit autour de l'axe d'impulsion* OK.

On a donc $d\theta = 0$, et les valeurs de p, q des équations (2) deviennent

$$p = \sin \theta \sin \varphi \frac{d\psi}{dt}, \quad q = \sin \theta \cos \varphi \frac{d\psi}{dt},$$

d'où

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{p}{q} = -\operatorname{tg}(\mu\, nt + \beta), \quad \varphi = k\pi - (\mu\, nt + \beta),$$

k étant un nombre entier qui se détermine par l'équation $\varphi_0 = k\pi - \beta$. Enfin, la dernière équation (2) donne

$$\cos\theta \frac{d\psi}{dt} = n - \frac{d\varphi}{dt} = n(1 + \mu) = \frac{nC}{A},$$

d'où

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{nC}{A\cos\theta} = \frac{l}{A}, \quad \psi = \frac{l}{A}t + \psi_0.$$

Les variables p, q, r, ψ, θ, φ sont connues en fonction du temps, la solution est complète. On remarquera que

$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2} = \sqrt{\alpha^2 + n^2}$$

est constant, *la vitesse angulaire de la rotation ne change pas;* il en est de même de $d\psi : dt$, *la trace* OX_1 *du plan de l'équateur de l'ellipsoïde sur le plan du couple résultant se meut d'un mouvement uniforme.* Le rapport $n : \omega$ est constant, l'*axe instantané décrit un cône circulaire droit dans le solide, autour de l'axe* Oz; il décrit aussi un cône droit autour de l'axe d'impulsion OK, car on a

$$\cos\overline{ROZ} = \frac{Ap}{l}\cdot\frac{p}{\omega} + \frac{Bq}{l}\cdot\frac{q}{\omega} + \frac{Cr}{l}\cdot\frac{r}{\omega} = \frac{h}{l\omega},$$

quantité constante. Il en résulte que *les axes* OK, Oz, OR *sont toujours dans un même plan.*

204. Revenons au cas général et supposons

$$A > B > C,$$

ce qui peut toujours être réalisé. L'équation de l'ellipsoïde d'inertie rapporté à Ox, Oy, Oz est

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1.$$

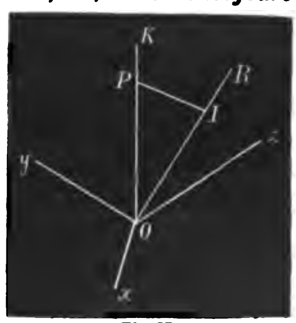


Fig. 97.

Nommons *pôle instantané de rotation* le point I (x, y, z) (fig. 97) où l'axe instantané OR perce cette surface, u le rayon vecteur OI. Nous avons

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r} = \frac{u}{\omega},$$

et les cosinus directeurs de la normale à l'ellipsoïde en I sont proportionnels à Ax, By, Cz, ou à Ap, Bq, Cr, c'est-à-dire aux cosinus directeurs de l'axe d'impulsion OK. D'où ce théorème : *Menons, à l'ellipsoïde d'inertie du corps relatif au point fixe* O, *un plan tangent* (P) *perpendiculaire à l'axe d'impulsion* OK : *le point de contact* I *sera le pôle instantané de rotation.*

Le plan diamétral conjugué de l'axe de rotation OI est parallèle au plan tangent en I, il est donc normal à OK; donc, *à chaque instant, l'axe instantané de rotation est le diamètre conjugué du plan du couple résultant des quantités de mouvement, dans l'ellipsoïde d'inertie.*

On a aussi, ϖ étant la perpendiculaire OP abaissée du centre O sur le plan tangent au point I,

$$\varpi = (A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Enfin, on tire des relations ci-dessus

$$\frac{x^2}{p^2} = \frac{y^2}{q^2} = \frac{z^2}{r^2} = \frac{x^2+y^2+z^2}{p^2+q^2+r^2} = \frac{Ax^2+By^2+Cz^2}{Ap^2+Bq^2+Cr^2} = \frac{A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2}{A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2},$$

et d'après les formules précédentes, les deux dernières s'écriront

$$\frac{u^2}{\omega^2} = \frac{1}{h} = \frac{1}{\varpi^2 l^2},$$

d'où l'on déduit

$$(6)\qquad \omega = u\sqrt{h}, \quad \varpi = \frac{\sqrt{h}}{l}.$$

Comme h, l sont constants, on a les théorèmes suivants : 1° *La vitesse angulaire* ω *de la rotation instantanée est proportionnelle au rayon de l'ellipsoïde d'inertie autour duquel elle s'effectue;* 2° *le plan* (P) *qui touche l'ellipsoïde d'inertie au pôle instantané* I *est à une distance invariable du point fixe* O, et comme il est d'ailleurs perpendiculaire à l'axe fixe OK, *ce plan* (P) *est un plan fixe*; 3° l'angle IOK compris entre l'axe instantané et l'axe d'impulsion est donné par l'équation

$$u \cos \mathrm{IOK} = \varpi,$$

d'où, multipliant les deux membres par $\sqrt{h}$ et ayant égard aux relations (6), on a

$$(6')\qquad \omega \cos \mathrm{IOK} = \frac{h}{l},$$

c'est-à-dire que la ***composante de la rotation instantanée suivant l'axe d'impulsion a une valeur constante***, que nous désignerons par m.

Ces théorèmes donnent une image nette du mouvement. Prenons sur l'axe OK (fig. 98), à partir du point O, une longueur OP égale à ϖ; menons par ce point un plan (P) normal à OK; ce plan fixe touchera l'ellipsoïde d'inertie du solide relatif au point O pendant toute la durée du mouvement, et le point de contact I sera, à chaque instant, le pôle de la rotation instantanée du solide. Ce point du solide n'aura donc aucune vitesse actuelle, en sorte que ***l'ellipsoïde d'inertie***, dont le mouvement entraîne celui du solide, ***ne fera que rouler sur le plan fixe*** (P) ***sans aucun glissement***.

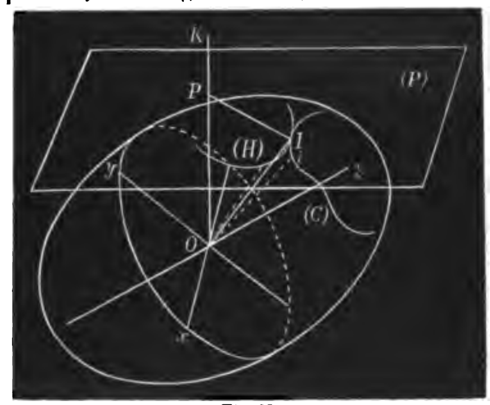


Fig. 98.

205. Pour éclaircir davantage cette solution, il convient d'étudier la courbe (C) que parcourt le pôle instantané I sur la surface de l'ellipsoïde d'inertie, ou la ***polhodie***; et la courbe (H) qu'il décrit sur le plan (P), ou ***l'herpolhodie***. Rapportons la première aux axes principaux Ox, Oy, Oz, et observons que le point I est sur l'ellipsoïde et sur un plan tangent qui est à une distance ϖ du centre. Nous aurons

$$(7)\qquad \begin{cases} Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1, \\ A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 = \dfrac{1}{\varpi^2} \end{cases}$$

pour les équations de la polhodie. On en déduit une troisième, en retranchant la première de la seconde multipliée par ϖ^2 :

$$(8)\qquad A(A\varpi^2 - 1)x^2 + B(B\varpi^2 - 1)y^2 + C(C\varpi^2 - 1)z^2 = 0.$$

C'est l'équation d'un cône du second ordre (Q), qui a pour sommet O, dont les axes ont mêmes directions que ceux de l'ellipsoïde d'inertie, et dont l'intersection avec celui-ci, qui n'est autre que la polhodie (C), est une courbe symétrique par rapport aux plans principaux de l'ellipsoïde. Ce cône est évidemment le lieu de l'axe instantané dans le solide (**25**). $\sqrt{A}$, $\sqrt{B}$, $\sqrt{C}$ sont respectivement les inverses des demi-

axes mineur, moyen et majeur de l'ellipsoïde; on sait que l'on aura, en conséquence,

$$\varpi > \frac{1}{\sqrt{A}}, \quad \varpi < \frac{1}{\sqrt{C}},$$

ou

$$A\varpi^2 > 1, \quad C\varpi^2 < 1,$$

$B\varpi^2$ pouvant être supérieur, inférieur ou égal à l'unité. Dans l'équation (8), le coefficient de x^2 est toujours positif et celui de z^2 négatif, celui de y^2 pouvant être positif, négatif ou nul. Dans le premier cas, les sections elliptiques du cône (8) sont perpendiculaires à l'axe Oz, *la courbe entoure donc le sommet de l'ellipsoïde qui répond au plus petit moment d'inertie.*

De même, dans le second cas, $B\varpi^2 - 1 < 0$, *la polhodie entoure l'axe du plus grand moment d'inertie.* Enfin, dans le cas particulier où $B\varpi^2 = 1$, l'équation du cône se réduit à

$$A(A - B)x^2 + C(C - B)z^2 = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{z}{x} = \pm\sqrt{\frac{A(A - B)}{C(B - C)}}.$$

Cette équation représente deux plans passant par l'axe moyen de l'ellipsoïde d'inertie et également inclinés sur le plan principal yOz. La polhodie se compose donc de deux ellipses.

On peut avoir, comme cas extrêmes, soit $A\varpi^2 = 1$, soit $C\varpi^2 = 1$; l'équation (8) ne peut plus être vérifiée dans le premier cas, que par $y = 0$, $z = 0$, et le cône (8) se réduit à une droite, l'axe mineur de l'ellipsoïde central; dans le second cas, on doit avoir $x = 0$, $y = 0$, et l'axe instantané coïncide constamment avec l'axe majeur de l'ellipsoïde. Dans ces deux cas, le solide tourne autour d'un axe principal d'inertie qui reste fixe, ce qui s'accorde avec le théorème démontré (**200**).

Il existe, au point de vue de la *stabilité* de l'axe de rotation, des différences notables entre les différents cas que nous venons d'indiquer, mais nous ne nous y arrêterons pas(1).

206. Il nous reste à reconnaître la nature de la courbe (H), lieu du pôle instantané dans l'espace, ou lieu des points de contact de l'ellipsoïde d'inertie avec le plan (P). On reconnaît immédiatement que, la courbe (C) étant une courbe fermée et symétrique par rapport à deux

---

(1) V. Poinsot, *Théorie nouvelle de la rotation des corps*, in-8°, pp. 71-74 et Bour, *Cours de Mécanique*, pp. 154-166.

des plans principaux de l'ellipsoïde d'inertie, le rayon vecteur u passe alternativement par des maxima et minima toujours les mêmes; que, ce rayon vecteur étant commun aux courbes (C) et (H), il en est de même de sa projection sur le plan (P), et que l'*herpolhodie*, par suite, présente une suite indéfinie d'ondulations régulières s'approchant et s'éloignant alternativement du point P, projection de O sur le plan (P). Cette courbe est la base d'un cône fixe (Q_1), ayant son sommet en O, lieu de l'axe instantané dans l'espace, et en faisant rouler sur ce cône fixe (Q_1) le cône (Q) de l'équation (8), supposé lié au solide, on réalisera *géométriquement* le mouvement de celui-ci (**25**).

Mais pour étudier plus intimement la nature de la courbe (H), nous devons former son équation différentielle, et nous suivrons pour cela la marche élégante tracée par M. Darboux (1).

Par simplifier les calculs, nous poserons

$$(9) \qquad A\varpi^2 = \frac{1}{a}, \quad B\varpi^2 = \frac{1}{b}, \quad C\varpi^2 = \frac{1}{c},$$

et ayant égard aux relations déjà écrites

$$\varpi = \frac{\sqrt{h}}{l}, \quad m = \frac{h}{l}, \quad \omega = u\sqrt{h},$$

nous écrirons les équations (3) sous la forme

$$(10) \quad \frac{dp}{dt} = a\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)qr, \quad \frac{dq}{dt} = b\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)rp, \quad \frac{dr}{dt} = c\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)pq,$$

et les intégrales (4) et (5) sous la forme

$$(11) \qquad \frac{p^2}{a} + \frac{q^2}{b} + \frac{r^2}{c} = m^2, \quad \frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} + \frac{c^2}{r^2} = m^2,$$

en y joignant l'égalité

$$(11) \qquad p^2 + q^2 + r^2 = \omega^2.$$

On en déduit immédiatement

$$(12) \qquad \frac{p^2}{a^2}(a-1) + \frac{q^2}{b^2}(b-1) + \frac{r^2}{c^2}(c-1) = 0.$$

---

(1) Note XVII de la *Mécanique* de Despeyrons.

Eliminant r^2 entre les équations (11), on en tire d'abord

$$\frac{p^2}{a}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)+\frac{q^2}{b}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)=m^2\left(1-\frac{1}{c}\right),$$

$$p^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)+q^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)=m^2-\frac{\omega^2}{c},$$

et en éliminant q^2 entre ces dernières,

$$\frac{p^2}{a^2}(a-b)(a-c)=\omega^2+m^2(bc-b-c).$$

On exprimerait de même q^2 et r^2 en fonction de ω^2. Mais, d'autre part, si ρ désigne la projection PI (fig. 98) du rayon vecteur OI sur le plan (P), on a

$$\omega^2 = hu^2 = h(\varpi^2+\rho^2) = m^2 + h\rho^2,$$

et en posant pour simplifier $\rho = \varpi\zeta$,

$$(13)\qquad \omega^2 = m^2(1+\zeta^2).$$

Les équations prennent alors cette forme plus simple

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{p^2}{a^2}(a-b)(a-c)=m^2[\zeta^2+(1-b)(1-c)], \\[2ex] \dfrac{q^2}{b^2}(b-c)(b-a)=m^2[\zeta^2+(1-c)(1-a)], \\[2ex] \dfrac{r^2}{c^2}(c-a)(c-b)=m^2[\zeta^2+(1-a)(1-b)]. \end{cases}$$

207. Nous aurons encore besoin des relations suivantes : d'après les équations (6′) et (13), la rotation instantanée ω autour de OI peut se décomposer en deux autres, l'une *constante* et égale à m autour de l'axe d'impulsion OP (fig. 99), l'autre variable, égale à $m\zeta$, autour de OI′ parallèle à PI. Cherchons les composantes de ces deux rotations suivant Ox, Oy, Oz. Multiplions la rotation m par les cosinus directeurs de OK, qui sont, comme on l'a vu,

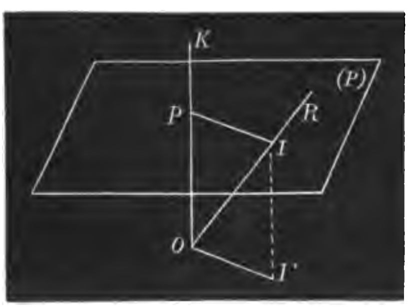


Fig. 99.

$$\frac{Ap}{l}=\frac{p}{l\varpi^2 a}=\frac{p}{ma},\quad \frac{q}{mb},\quad \frac{r}{mc},$$

nous aurons

$$(15) \qquad m_x = \frac{p}{a}, \quad m_y = \frac{q}{b}, \quad m_z = \frac{r}{c}$$

pour les composantes de la première. Il s'en suit évidemment que les composantes de la seconde rotation autour de OI′ sont

$$\omega'_x = \frac{p}{a}(a - 1), \quad \omega'_y = \frac{q}{b}(b - 1), \quad \omega'_z = \frac{r}{c}(c - 1).$$

Les équations (14) permettent aussi de déterminer entre quelles limites varie ζ, et par suite $\rho = \varpi\zeta$. Des inégalités déjà signalées (**205**) résultent les suivantes

$$a < b < c, \quad a < 1, \quad c > 1, \quad b \gtrless 1,$$

elles font voir que p, q, r ne peuvent être réels que si l'on a

$$\begin{aligned} \zeta^2 + (1 - b)(1 - c) &> 0 \quad \text{ou} \quad \zeta^2 > (1 - b)(c - 1), \\ \zeta^2 + (1 - c)(1 - a) &< 0 \quad \text{ou} \quad \zeta^2 < (1 - a)(c - 1), \\ \zeta^2 + (1 - a)(1 - b) &> 0 \quad \text{ou} \quad \zeta^2 > (1 - a)(b - 1). \end{aligned}$$

Il faut distinguer deux cas 1° si $b > 1$, la première inégalité est toujours vérifiée, et les deux autres montrent que ζ varie entre un maximum

$$\zeta_1 = \sqrt{(1 - a)(c - 1)},$$

et un minimum

$$\zeta_2 = \sqrt{(1 - a)(b - 1)},$$

qui correspondent respectivement à $q = 0$, $r = 0$; p ne peut s'annuler.

2° Si $b < 1$, la troisième inégalité a toujours lieu, les deux autres montrent que ζ oscille entre un maximum

$$\zeta_1 = \sqrt{(1 - a)(c - 1)}$$

et un minimum

$$\zeta_2 = \sqrt{(1 - b)(c - 1)},$$

qui répondent à $q = 0$, $p = 0$, r ne pouvant devenir nul.

208. Nous allons maintenant chercher les équations différentielles du mouvement du point I sur le plan (P), en prenant pour coordonnées le rayon $\mathrm{PI} = \rho$ et l'angle θ que fait ce rayon avec sa position initiale.

Différentiant la troisième équation (11) et appliquant les relations (10), on a d'abord

$$\omega \frac{d\omega}{dt} = \frac{pqr}{abc}[a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a)]$$

$$= \frac{pqr}{abc}(b-c)(c-a)(a-b).$$

D'autre part, l'équation (13) nous donne

$$\omega \frac{d\omega}{dt} = m^2 \zeta \frac{d\zeta}{dt},$$

d'où, substituant, élevant au carré, remplaçant p^2, q^2, r^2 par leurs valeurs (14) et extrayant la racine, on trouve entre ζ et t l'équation différentielle

$$(A)\quad \zeta \frac{d\zeta}{dt} = \pm m \sqrt{-[\zeta^2 + (1-b)(1-c)][\zeta^2 + (1-c)(1-a)][\zeta + (1-a)(1-b)]}.$$

A cause de la relation $\rho = \varpi \zeta$, cette équation peut être regardée comme exprimant le rayon vecteur ρ en fonction du temps.

209. Pour obtenir $d\theta$, observons que l'aire $\frac{1}{2}\rho^2\, d\theta$, décrite par le rayon ρ dans le temps dt, est la projection sur le plan (P) de l'aire décrite par le rayon OI sur le cône fixe (Q_1) dans le même temps, ou, ce qui revient au même, de l'aire $d\Sigma$ que l'axe instantané décrit sur le cône (Q), car ce cône ne fait que rouler sur le cône fixe qui a pour base la courbe (H); on peut donc, en désignant par $d\Sigma_x$, $d\Sigma_y$, $d\Sigma_z$ les projections de cette aire infiniment petite sur les plans principaux de l'ellipsoïde, écrire (**147**)

$$\frac{d\Sigma_x}{dt} = \frac{1}{2}\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right), \quad \frac{d\Sigma_y}{dt} = \frac{1}{2}\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right), \ldots$$

et en observant, d'autre part, que les cosinus directeurs de OP sont (**207**)

$$\frac{p}{ma}, \quad \frac{q}{mb}, \quad \frac{r}{mc},$$

on aura facilement

$$\rho^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{m}\left[\frac{p}{a}\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) + \frac{q}{b}\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) + \frac{r}{c}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)\right].$$

Mais les relations du n° 204,

$$x = \frac{u}{\omega} p = \frac{p}{\sqrt{h}} = \frac{\varpi}{m} p, \quad y = \frac{\varpi}{m} q, \quad z = \frac{\varpi}{m} r$$

changent cette équation dans la suivante :

$$\rho^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{\varpi^2}{m^3} \left[\frac{p}{a} \left(q \frac{dr}{dt} - r \frac{dq}{dt} \right) + \frac{q}{b} \left(r \frac{dp}{dt} - p \frac{dr}{dt} \right) + \cdots \right].$$

Or, nous avons par les équations (10) et (11)

$$\begin{aligned} q \frac{dr}{dt} - r \frac{dq}{dt} &= p \left[c \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) q^2 - b \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a} \right) r^2 \right] \\ &= bcp \left[\frac{1}{a} \left(\frac{p^2}{a} + \frac{q^2}{b} + \frac{r^2}{c} \right) - \left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} + \frac{r^2}{c^2} \right) \right] \\ &= bcm^2 (1 - a) \frac{p}{a}, \end{aligned}$$

et de même

$$r \frac{dp}{dt} - p \frac{dr}{dt} = cam^2 (1 - b) \frac{q}{b}, \quad p \frac{dq}{dt} - q \frac{dp}{dt} = abm^2 (1 - c) \frac{r}{c},$$

donc, en substituant, observant que $\rho = \varpi\zeta$, divisant par ϖ^2 et réduisant, on aura

$$\zeta^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{m} \left[bc (1 - a) \frac{p^2}{a^2} + ca (1 - b) \frac{q^2}{b^2} + ab (1 - c) \frac{r^2}{c^2} \right].$$

Remplaçons, dans le second membre, p^2, q^2, r^2 par leurs valeurs (14), en fonction de ζ^2, réduisons au même dénominateur. Le coefficient de ζ^2

$$bc (1 - a)(c - b) + ca (1 - b)(a - c) + ab (1 - c)(b - a),$$

se réduit, à cause de la relation

$$bc (c - b) + ca (a - c) + ab (b - a) = (b - c)(c - a)(a - b),$$

à ce dernier produit. Le terme indépendant de ζ^2 sera le carré de ce même produit. Toutes réductions faites, on trouvera

$$\text{(B)} \qquad \zeta^2 \frac{d\theta}{dt} = m [\zeta^2 + (1 - a)(1 - b)(1 - c)],$$

qui, avec l'équation (A), complète le système d'équations propre à déterminer le mouvement du point I sur le plan (P).

210. Les équations (A) et (B) donnent lieu aux observations suivan-

tes : 1° Elles ne renferment plus que les rapports a, b, c, ζ^2 des carrés des demi-axes de l'ellipsoïde et du rayon vecteur ρ au carré de la perpendiculaire ϖ, plus la vitesse angulaire m. Elles ne changeraient donc pas si l'ellipsoïde restait homothétique.

2° D'après la décomposition de la rotation instantanée ω en deux autres, suivant OP et OI′, signalée plus haut (207), on voit que *l'on peut réaliser le mouvement de l'ellipsoïde d'inertie en faisant rouler le cône* (Q′), *qui serait le lieu de la droite* OI′ *dans l'intérieur du corps, sur un plan* (P′) *parallèle à* (P), *avec une vitesse angulaire* $m\zeta$ *proportionnelle au rayon de l'herpolhodie, en même temps que ce plan* (P′) *tournerait autour de* OP *avec une vitesse angulaire constante* m, ce qui donne une nouvelle représentation du mouvement.

Or, dans ce mouvement, *le rayon* OI′ *décrit des aires proportionnelles au temps*, car l'équation (B) peut se mettre sous la forme

$$\zeta^2 \frac{d(\theta - mt)}{dt} = m(1-a)(1-b)(1-c),$$

et $\theta - mt$ est l'angle que fait OI′ avec une droite tournant autour de OP avec la vitesse angulaire m.

211. Les équations (A) et (B) prennent une forme plus simple, si l'on observe que l'équation aux carrés des axes de l'éllipsoïde est censée connue, et par suite l'équation qui a pour racines a, b, c. Posons donc

$$(16) \qquad f(x) = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - Px^2 + Qx - R;$$

f sera une fonction connue, ainsi que

$$P = a + b + c, \quad Q = bc + ca + ab, \quad R = abc,$$

et l'on aura

$$(1-a)(1-b)(1-c) = f(1).$$

Posons encore

$$\begin{aligned}(17)\ F(\zeta^2) &= [\zeta^2 + (1-b)(1-c)][\zeta^2+(1-c)(1-a)][\zeta^2+(1-a)(1-b)] \\ &= \left[\zeta^2 + \frac{f(1)}{1-a}\right]\left[\zeta^2 + \frac{f(1)}{1-b}\right]\left[\zeta^2 + \frac{f(1)}{1-c}\right] \\ &= \frac{\zeta^6}{f(1)}\left[1 - a + \frac{f(1)}{\zeta^2}\right]\left[1 - b + \frac{f(1)}{\zeta^2}\right]\left[1 - c + \frac{f(1)}{\zeta^2}\right],\end{aligned}$$

d'où enfin

$$(18) \qquad F(\zeta^2) = \frac{\zeta^6}{f(1)} f\left[1 + \frac{f(1)}{\zeta^2}\right].$$

Les équations (A) et (B) deviennent

$$(19)\quad \begin{cases} \zeta \dfrac{d\zeta}{dt} = \pm m \sqrt{-F(\zeta^2)}, \\[2mm] \zeta^2 \dfrac{d\theta}{dt} = m\,[\zeta^2 + f(1)], \end{cases}$$

et nous allons montrer, avec M. Darboux, que deux équations de cette forme représentent toujours une herpolhodie, si $F(x)$ est un polynôme du 3ᵉ degré en x dont le premier terme est x^3, et si la constante désignée par $f(1)$ satisfait à la condition

$$f(1) = \pm \sqrt{F(0)}.$$

En effet, si nous prenons la rotation autour de la droite OP égale à m, il restera, pour identifier les équations (19) avec celles d'une herpolhodie, à déterminer les constantes a, b, c, par les équations

$$f(1) = (1-a)(1-b)(1-c),$$
$$F(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$
$$= [x + (1-b)(1-c)]\,[x + (1-c)(1-a)]\,[x + (1-a)(1-b)],$$

α, β, γ étant les racines de $F(x)$. On aura donc

$$-\alpha = (1-b)(1-c) = \frac{f(1)}{1-a},$$

d'où

$$(\gamma)\qquad a - 1 = \frac{f(1)}{\alpha}, \quad b - 1 = \frac{f(1)}{\beta}, \quad c - 1 = \frac{f(1)}{\gamma},$$

et comme on a d'ailleurs

$$(a-1)(b-1)(c-1) = -f(1) = \frac{f(1)^3}{\alpha\beta\gamma},$$

il faudra que l'on ait

$$f(1)^2 = -\alpha\beta\gamma = F(0),$$

comme nous l'avons indiqué. Si cette condition est vérifiée, les relations (γ) feront connaître a, b, c et par suite les rapports des demi-axes de la surface roulante à la perpendiculaire OP. Seulement, comme les valeurs de a, b, c peuvent bien ne pas satisfaire aux relations d'inégalité qui caractérisent un ellipsoïde d'inertie, et peuvent même être, en partie, négatives, nous devons généraliser la conception de l'herpolhodie et

attribuer ce nom à la courbe de contact d'une surface quelconque du second ordre, fixée par son centre et roulant sur un plan tangent fixe.

212. Revenons aux équations (19), et pour les simplifier encore, posons, w, étant une nouvelle variable,

$$w = 1 + \frac{f(1)}{\zeta^2}, \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{\zeta^2} = \frac{w-1}{f(1)}.$$

Nous tirons de là

$$\text{l.}\,\zeta = \frac{1}{2}[\text{l.}\,f(1) - \text{l.}\,(w-1)], \quad \frac{d\zeta}{\zeta} = -\frac{1}{2}\frac{dw}{w-1};$$

de l'équation (18),

$$\text{F}\,(\zeta^2) = \zeta^6 \frac{f(w)}{f(1)},$$

et en substituant dans la première des équations (19) et élevant au carré, on aura

$$\frac{1}{\zeta^2}\frac{dw^2}{dt^2} = -\frac{4m^2(w-1)^2 f(w)}{f(1)},$$

d'où, remplaçant encore $1:\zeta^2$ par sa valeur en w dans cette équation et dans la seconde des équations (19), on aura enfin pour représenter la courbe (H) les équations suivantes :

$$(20)\quad \begin{cases} \rho = \varpi\zeta, & \dfrac{1}{\zeta^2} = \dfrac{w-1}{f(1)}, \\ \dfrac{d\theta}{dt} = mw, & \dfrac{dw^2}{dt^2} = -4m^2(w-1)f(w). \end{cases}$$

Il en résulte immédiatement que l'on a toujours $(w-1)f(1) > 0$, $(w-1)f(w) < 0$, et par suite

$$f(1)f(w) < 0.$$

La variable w ne peut jamais s'annuler, car on a vu (207) que si $b > 1$, ζ varie entre

$$\sqrt{(1-a)(c-1)} \quad \text{et} \quad \sqrt{(1-a)(b-1)},$$

et comme on a

$$w = 1 + \frac{(1-a)(1-b)(1-c)}{\zeta^2},$$

w sera compris toujours entre les limites b et c; de même, si $b < 1$, w variera entre a et b, et comme a, b, c sont positifs, w ne saurait devenir nul.

212. Les formules (20) vont permettre de tirer une conclusion importante, relativement à la forme de l'herpolhodie, en rectifiant une idée de Poinsot.

Les résultats établis au nº **207** font voir que le rayon vecteur $\rho = PI$ de l'herpolhodie reste compris entre deux limites, $\varpi\zeta_1$ et $\varpi\zeta_2$, et il est facile de voir qu'il les atteint successivement et alternativement, car l'équation (A) montre que $d\zeta : dt$ ne peut changer de signe que si le radical ou $F(\zeta^2)$ s'annule, c'est-à-dire précisément si ζ atteint une de ses limites ζ_1, ζ_2. Si donc on décrit dans le plan (P), du centre P, deux circonférences ayant pour rayons respectifs

$$\varpi\sqrt{(1-a)(b-1)} \quad \text{et} \quad \varpi\sqrt{(1-a)(c-1)},$$

si $b > 1$, et

$$\varpi\sqrt{(1-b)(c-1)} \quad \text{et} \quad \varpi\sqrt{(1-a)(c-1)}$$

si $b < 1$, l'herpolhodie restera toujours comprise entre ces deux circonférences. Mais elle peut encore aller de l'une à l'autre en ondulant de manière à les toucher par sa convexité, comme le croyait Poinsot, ou en présentant à l'une d'elles des rebroussements, comme la courbe décrite par la pointe d'une toupie. Des travaux récents de M. W. Hess(1) et de M. le C^{te} de Sparre(2) ont fait voir qu'il n'en est rien et que l'herpolhodie tourne toujours sa concavité vers le point P. C'est ce que nous allons établir d'une manière plus directe au moyen des équations (20).

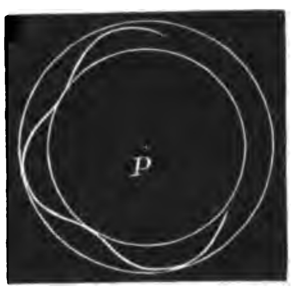


Fig. 100.

Appelons μ l'angle que fait le rayon PI de la courbe (H), prolongé, avec la tangente menée du côté où l'angle θ est croissant. On sait (Cours d'An., **185**) que l'angle μ est donné par l'équation

$$\operatorname{tg}\mu = \rho\frac{d\theta}{d\rho} = \zeta\frac{d\theta}{d\zeta} = -2(w-1)\frac{d\theta}{dw} = -2mw(w-1) : \frac{dw}{dt},$$

(1) *Das Rollen einer Fläche*, etc., Munich, 1880.

(2) *Annales de la Soc. scient. de Bruxelles*, t. IX.

en vertu des équations (20). On tire de là, par ces mêmes équations,

$$\frac{1}{\cos^2\mu} = 1 + \mathrm{tg}^2\mu = 1 - \frac{w^2(w-1)}{f(w)}.$$

D'autre part, on a

$$\frac{d.\mathrm{tg}\mu}{dt} = -2m\frac{d}{dt}\frac{w(w-1)}{\left(\frac{dw}{dt}\right)} = -2m\left[2w - 1 - \frac{w(w-1)}{\frac{dw^2}{dt^2}}\frac{d^2w}{dt^2}\right].$$

Mais la différentiation de la dernière équation (20) donne

$$\frac{d^2w}{dt^2} = -2m^2[f(w) + (w-1)f'(w)],$$

d'où

$$\frac{d^2w}{dt^2} : \frac{dw^2}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{f(w) + (w-1)f'(w)}{(w-1)f(w)},$$

et en substituant on a

$$\frac{d.\mathrm{tg}\mu}{dt} = \frac{1}{\cos^2\mu}\frac{d\mu}{dt} = -m\left[3w - 2 - \frac{w(w-1)f'(w)}{f(w)}\right].$$

Rermarquons maintenant que si l'on désigne par φ l'angle que fait la direction de la tangente menée dans le sens où θ croît, avec la direction du rayon vecteur ρ rendu immobile, on a évidemment

$$d\varphi = d\mu + d\theta,$$

et que $d\varphi$ sera positif si la courbe tourne sa concavité vers le pôle P, négatif si elle lui présente sa convexité. Nous concluons de là que *la courbe* (H) *tourne sa concavité ou sa convexité vers le point* P *selon que l'expression*

$$V = \frac{d.\mathrm{tg}\mu}{dt} + \frac{1}{\cos^2\mu}\frac{d\theta}{dt}$$

est positive ou négative. Or, en substituant les valeurs ci-dessus de

$$\frac{d.\mathrm{tg}\mu}{dt}, \quad \frac{1}{\cos^2\mu}, \quad \frac{d\theta}{dt},$$

on trouvera après réductions

$$V = \frac{m(w-1)}{f(w)}[-2f(w) + wf'(w) - w^3],$$

et comme on a

$$f(w) = w^3 - Pw^2 + Qw - R, \quad f'(w) = 3w^2 - 2Pw + Q,$$

l'expression entre crochets se réduira à $-Qw + 2R$, en sorte que

$$V = \frac{m(w-1)}{f(w)}(2R - Qw).$$

Nous avons remarqué (**212**) que $(w-1) : f(w)$ est toujours négatif dans les limites où w varie. D'autre part, les expressions de Q, R en a, b, c (**211**) montrent que

$$\frac{Q}{R} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c},$$

et comme, dans un ellipsoïde d'inertie, on a toujours

$$B + C > A, \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > \frac{1}{a},$$

on aura

$$\frac{Q}{R} > \frac{2}{a} \quad \text{ou} \quad 2R < Qa,$$

d'où

$$2R - Qw < Q(a - w),$$

et puisque w est toujours $> a$ (**212**), il s'ensuit que l'on aura

$$2R - Qw < 0.$$

Donc V est toujours positif. Il résulte de toute cette analyse que *l'inclinaison φ de la tangente à l'herpolhodie sur une direction fixe, celle du rayon vecteur dans une position donnée, croît constamment et d'une manière continue, ce qui montre que la courbe tourne toujours sa concavité vers le pôle* P *et n'a aucun point de rebroussement.*

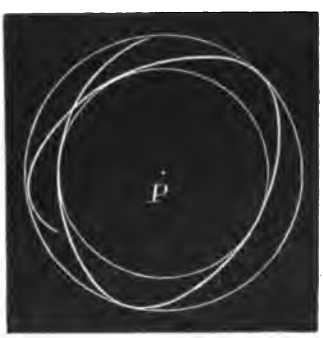


Fig. 101.

La forme de la courbe est donc celle que représente la figure 101 ; elle serpente entre les deux circonférences de rayons $\varpi\zeta_1$ et $\varpi\zeta_2$ en touchant successivement la première par sa concavité et la seconde par sa convexité, sans avoir aucun point d'inflexion ; mais cette conséquence ne s'appliquerait pas à un ellipsoïde quelconque, ne satisfaisant pas aux relations d'inégalité des ellipsoïdes d'inertie.

214. L'intégration des équations (A) et (B) de l'herpolhodie exige, en général, l'emploi des fonctions elliptiques, de même que la détermination des valeurs de p, q, r en fonction du temps. Mais, dans le cas particulier où le demi axe moyen de l'ellipsoïde est égal à la distance OP, $b = 1$, l'intégration se fait par les fonctions élémentaires.

En introduisant l'hypothèse $b = 1$ dans les équations (A) et (B), on a

$$\frac{d\zeta}{dt} = \pm m\zeta\sqrt{(1-a)(c-1)-\zeta^2}, \quad \frac{d\theta}{dt} = m.$$

La seconde donne

$$\theta = mt,$$

en comptant l'angle θ à partir de la position initiale du rayon vecteur PI; *ce rayon vecteur* ρ *tourne donc autour de* P *d'un mouvement uniforme.* On a ensuite

$$mdt = \pm\frac{d\zeta}{\zeta\sqrt{(1-a)(c-1)-\zeta^2}} = \pm\frac{d\zeta}{\zeta\sqrt{\zeta_2^2-\zeta^2}},$$

d'après la valeur de ζ_2 trouvée ci-dessus. On déduit de là, en intégrant,

$$mt = \frac{1}{\zeta_2}\,\text{l}.\frac{\zeta_2-\sqrt{\zeta_2^2-\zeta^2}}{\zeta},$$

si l'on prend $t = 0$ pour $\zeta = \zeta_2$; d'où

$$\zeta_2 - \sqrt{\zeta_2^2-\zeta^2} = \zeta e^{m\zeta_2 t},$$

et en résolvant par rapport à ζ,

$$\zeta = \frac{2\zeta_2}{e^{m\zeta_2 t}+e^{-m\zeta_2 t}},$$

d'où enfin, on a l'équation de l'herpolhodie sous forme finie,

$$\rho = \frac{2\zeta_2\varpi}{e^{\zeta_2\theta}+e^{-\zeta_2\theta}}.$$

On voit facilement que la courbe est une spirale infinie qui a pour asymptote le point P, et que ce point n'est jamais atteint parce que $t = \infty$ pour $\rho = 0$.

215. La représentation due à Poinsot (**204**) donne une idée géométrique complète du mouvement d'un solide autour d'un point fixe, mais n'apprend rien au point de vue cinématique, c'est-à-dire du temps que le corps met à passer d'une position à une autre. La loi établie au N° **204**

nous apprend que la vitesse angulaire de la rotation est proportionnelle au rayon de l'ellipsoïde autour duquel elle s'effectue, mais il est difficile de réaliser géométriquement cette condition. On y parvient en combinant les deux modes de représentation du mouvement que nous connaissons.

Dans le premier, le cône (Q) qui a pour sommet le point O et pour base la polhodie, étant lié au solide, roule sans glisser sur la cône fixe (Q_1) qui a pour base l'herpolodie (**25**). Dans le second, indiqué au N° **210**, un autre cône (Q') qui est le lieu, dans le solide, de la droite OI' parallèle à OI, étant lié au corps, roule sans glisser sur un plan (P') parallèle à (P), passant par O, et tournant autour de la droite OP avec une vitesse angulaire constante *m*. L'équation de ce cône (Q'), rapportée aux axes d'inertie du corps, s'obtient en exprimant qu'un point quelconque de OI' a ses coordonnées x', y', z' proportionnelles à ω'_x, ω'_y, ω'_z (**207**), en sorte que l'on a

$$\frac{ax'}{p(a-1)} = \frac{by'}{q(b-1)} = \frac{cz'}{r(c-1)} = \mathrm{U},$$

d'où l'on tire

$$p = \frac{ax'}{\mathrm{U}(a-1)}, \quad q = \frac{by'}{\mathrm{U}(b-1)}, \quad r = \frac{cz'}{\mathrm{U}(c-1)},$$

et en substituant dans l'équation (12), on aura

$$(21) \qquad \frac{x'^2}{a-1} + \frac{y'^2}{b-1} + \frac{z'^2}{c-1} = 0$$

pour l'équation cherchée du cône. C'est un cône du second degré dont les axes principaux coïncident en direction avec ceux de l'ellipsoïde d'inertie, et qui est homofocal à ce dernier.

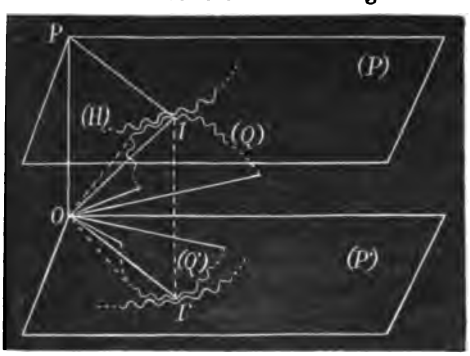


Fig. 102.

Ce cône (Q') étant connu, concevons un mécanisme qui imprime au plan (P') (fig. 102) une rotation uniforme autour de l'axe OP; lions le cône (Q') au solide, et par un système de dents, obligeons-le à rouler sans glisser sur le plan (P'). Construisons, d'autre

part, le cône (Q), lions-le au corps, et obligeons-le également, par un système de cannelures, à rouler sans glisser sur le cône (Q_1) qui sera maintenu fixe. Les cônes (Q) et (Q′) étant solidaires, la rotation du plan (P′) imprime au système de ces deux cônes ainsi soumis à des liaisons complètes un mouvement tout à fait déterminé, qui satisfait aux conditions du *mouvement de Poinsot* et par conséquent réalise complètement ce mouvement, tant au point de vue géométrique qu'au point de vue cinématique.

L'appareil représenté par la figure ci-contre, imaginé par MM. Darboux et Kœnigs et construit par MM. Château de Paris, réalise cette concep-

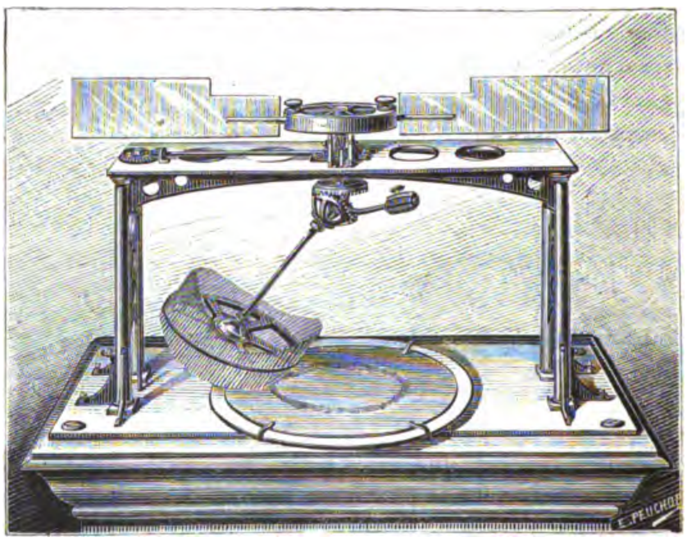


Fig. 103.

tion. Seulement, la disposition de la figure précédente est renversée. Le plan (P) est ici au-dessous de (P′), représenté par la roue dentée horizontale placée dans le haut. Le cône (Q′) est remplacé par son intersection avec une surface sphérique. Le système des cônes (Q) et (Q_1) est remplacé par un cylindre coupant l'ellipsoïde d'inertie suivant la polhodie (C), et par un plan fixe horizontal sur lequel roule cette polhodie en y traçant par points l'herpolhodie (H).

Exercices.

1. Dans le mouvement d'un solide autour d'un point fixe sans l'action de forces extérieures, la somme des carrés des distances des sommets de l'ellipsoïde d'inertie à l'axe d'impulsion OK reste constante. Sa valeur est

$$\varpi^2 (a^2 + b^2 + c^2 - 1).$$

2. L'aire de l'ellipse variable, intersection de l'ellipsoïde d'inertie par le plan du couple résultant, reste constante pendant le mouvement.

3. Si l'on a un système de valeurs de p, q, r en fonction de t qui répondent à un mouvement de Poinsot et si l'on pose

$$p' = \alpha p, \quad q' = \beta q, \quad r' = \gamma r,$$

α, β, γ étant des constantes, pour que p', q', r' représentent encore un mouvement de Poinsot, il est nécessaire et suffisant que l'on ait la relation

$$a^2 (c - b) \alpha^2 + b^2 (c - a) \beta^2 + c^2 (a - b) \gamma^2 + (c - b)(a - c)(b - a) = 0,$$

a, b, c étant proportionnels aux carrés des demi-axes de l'ellipsoïde roulant dans le premier mouvement (Darboux).

4. Une polhodie peut toujours être considérée comme l'intersection d'un ellipsoïde et d'un hyperboloïde à deux nappes homofocaux; elle coupe donc normalement le système d'hyperboloïdes à une nappe homofocaux (Darboux).

§ 3. MOUVEMENT D'UN SOLIDE DE RÉVOLUTION PESANT FIXÉ PAR UN POINT DE SON AXE DE FIGURE.

216. Considérons un solide de résolution homogène, fixé par un point O de son axe de figure, et soumis uniquement à l'action de la pesanteur (fig. 104). Le centre de gravité G est sur l'axe de résolution, au-dessus ou au-dessous du point O; si ces points coïncidaient, on retomberait sur le cas déjà étudié où il n'y a pas de forces motrices.



Fig. 104.

Prenons l'axe fixe OZ vertical en sens contraire de la pesanteur; l'axe mobile Oz suivant la portion de l'axe de figure qui fait un angle aigu α avec OZ à l'instant $t = 0$. Soient M la masse du corps, l la distance OG prise avec

le signe + ou — suivant que G tombe sur Oz ou sur son prolongement; C le moment d'inertie relatif à l'axe principal Oz, $A = B$ le moment relatif à un axe quelconque passant par O dans le plan xOy; ψ, θ, φ les mêmes angles que précédemment. La seule force motrice est le poids $P = Mg$ du solide agissant verticalement au centre de gravité; le couple résultant a son axe dirigé suivant OX_1, et ses composantes G_x, G_y, G_z, suivant Ox, Oy, Oz sont évidemment

$$Mgl \sin\theta \cos\varphi, \quad -Mgl \sin\theta \sin\varphi, \quad 0.$$

La troisième équation d'Euler se réduit donc ($A = B$) à

$$C\frac{dr}{dt}, \quad r = \text{const.} = n,$$

n désignant la composante donnée de la rotation initiale du solide suivant Oz. Les deux autres équations d'Euler, divisées par A, deviennent, en posant

$$(\alpha) \qquad D = \frac{Mgl}{A}, \quad 2E = \frac{Cn}{A},$$

et ayant égard à la valeur de r,

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= (n - 2E)\, q + D \sin\theta \cos\varphi, \\ \frac{dq}{dt} &= -(n - 2E) p - D \sin\theta \sin\varphi. \end{aligned}\right.$$

D'autre part, les formules (2) du § 2, où nous désignerons par ψ', θ', φ' les dérivées de ψ, θ, φ par rapport à t, deviendront

$$(2) \qquad \left\{\begin{aligned} p &= \psi' \sin\theta \sin\varphi + \theta' \cos\varphi, \\ q &= \psi' \sin\theta \cos\varphi - \theta' \sin\varphi, \\ n &= \varphi' + \psi' \cos\theta. \end{aligned}\right.$$

Multipliant les équations (1) respectivement par p, q et ajoutant, on a

$$p\frac{dp}{dt} + q\frac{dq}{dt} = D \sin\theta\, (p \cos\varphi - q \sin\varphi) = D \sin\theta \frac{d\theta}{dt},$$

d'où, intégrant et désignant par H une constante,

$$(3) \qquad p^2 + q^2 = 2\,(H - D\cos\theta),$$

ou, en vertu des équations (2),

$$(4) \qquad \theta'^2 + \psi'^2 \sin^2\theta = 2\,(H - D\cos\theta).$$

C'est l'intégrale qui répond au théorème des forces vives.

L'axe du couple moteur est normal à OZ, la projection de l'axe d'impulsion sur OZ est donc constante (**171**). Ses projections sur Ox, Oy, Oz étant Ap, Aq, Cn (**191**), et les cosinus directeurs de OZ par rapport à ces axes étant $\sin\theta \sin\varphi$, $\sin\theta\cos\varphi$, $\cos\theta$ (**29**), on a donc

$$Ap \sin\theta \sin\varphi + Aq \sin\theta \cos\varphi + Cn \cos\theta = \text{const.},$$

et en remplaçant encore p, q par leurs valeurs (2),

$$A\,\psi' \sin^2\theta = \text{const.} - Cn \cos\theta,$$

d'où encore, L étant une constante,

$$\psi' \sin^2\theta = 2\,(L - E\cos\theta). \tag{5}$$

Les équations (4) et (5), jointes à la dernière des équations (2), déterminent ψ, θ, φ en fonction du temps et leur intégration donnera la solution du problème.

217. Nous étudierons d'abord quelques propriétés générales remarquables du mouvement du solide. Pour cela, posons

$$u = \cos\theta;$$

l'équation (5) deviendra

$$\psi' = \frac{2\,(L - E\,u)}{1 - u^2}; \tag{6}$$

la dernière équation (2) donnera

$$\varphi' = \frac{n - 2L\,u - (n - 2E)\,u^2}{1 - u^2}, \tag{7}$$

et en éliminant ψ' entre les équations (4) et (5), on aura, à cause de $\sin\theta\, d\theta = -du$,

$$\frac{du^2}{dt^2} = 2\,(H - Du)\,(1 - u^2) - 4\,(L - Eu)^2, \tag{8}$$

équation différentielle qui détermine u ou θ en fonction de t.

Portons sur l'axe instantané de rotation une longueur $OI = \omega$, vitesse angulaire de cette rotation; p, q, r sont les coordonnées du point I par rapport aux axes mobiles liés au solide. Cherchons la courbe décrite par ce *pôle* dans l'intérieur du solide. L'équation $r = n$ montre qu'elle est dans un plan (P) normal à l'axe de révolution, mené à la distance $OP = n$ du point fixe. Soient ρ, χ les coordonnées polaires du point I par rapport au pôle P et à un axe polaire parallèle à Ox dans le plan (P).

Nous aurons, en vertu de l'équation (3),

$$\rho^2 = p^2 + q^2 = 2(H - Du);$$

puis

$$\operatorname{tg}\chi = \frac{q}{p}, \quad (p^2+q^2)\frac{d\chi}{dt} = p\frac{dq}{dt} - q\frac{dp}{dt},$$

ou

$$\rho^2\frac{d\chi}{dt} = p\frac{dq}{dt} - q\frac{dp}{dt}.$$

Mais les équations (1) donnent

$$\begin{aligned} p\frac{dq}{dt} - q\frac{dp}{dt} &= (2E-n)(p^2+q^2) - D\sin\theta\,(p\sin\varphi + q\cos\varphi) \\ &= 2(2E-n)(H-Du) - D\psi'\sin^2\theta \\ &= 2(2E-n)(H-Du) - 2D(L-Eu) \\ &= 2(E-n)(H-Du) + 2(EH-DL), \end{aligned}$$

d'où enfin

(9) $$\rho^2\frac{d\chi}{dt} = (E-n)\rho^2 + 2(EH-DL).$$

D'autre part, si l'on différentie la valeur de ρ^2 en fonction de u, on a

$$\rho\frac{d\rho}{dt} = -D\frac{du}{dt},$$

ou, en vertu de l'égalité (8),

$$\rho\frac{d\rho}{dt} = \mp D\sqrt{2(H-Du)(1-u^2) - 4(L-Eu)^2},$$

et en substituant à u sa valeur en ρ^2,

$$u = \frac{2H-\rho^2}{2D},$$

on voit sans peine que l'équation prend la forme

$$\rho\frac{d\rho}{dt} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{-F(\rho^2)},$$

$F(\rho^2)$ étant une fonction du 3ᵉ degré en ρ^2 dont le premier terme a pour coefficient l'unité. D'ailleurs, si l'on y fait $\rho = 0$, d'où $u = H : D$, on a immédiatement

$$\left(\rho\frac{d\rho}{dt}\right)_{\rho=0} = \pm 2(EH-DL)\sqrt{-1},$$

ce qui, rapproché de l'équation (9) et de la proposition établie au n° **211**, nous permet d'énoncer la proposition suivante :

La courbe décrite par le pôle de la rotation instantanée I, *dans l'intérieur du solide, est une herpolhodie dont le plan est normal à l'axe de résolution du corps.*

212. Pour reconnaître la nature de la courbe décrite par le point I dans l'espace, nous ferons d'abord une remarque qui simplifie le problème.

Concevons un solide dont le mouvement relatif, par rapport au solide de révolution considéré, se réduirait à une rotation uniforme autour de Oz, avec une vitesse angulaire $n_1 - n$. Dans ce nouveau mobile, les angles ψ et θ auraient les mêmes valeurs que dans le premier; la rotation r serait égale à $n_1 - n + n = n_1$, et l'angle φ_1 qui remplace l'angle φ, serait lié à celui-ci par l'égalité

$$\varphi_1 = \varphi + (n_1 - n)\,t,$$

en sorte que l'on aurait d'après l'équation (7)

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{(n_1 - 2Lu) \mp (n_1 - 2E)\,u^2}{1 - u^2},$$

les équations (6) et (8) subsistant.

La constante n_1 pouvant avoir toute valeur, si nous supposons que l'on choisisse $n_1 = 2E$, l'équation précédente se réduira à la forme

$$(10) \qquad \frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{2(E - Lu)}{1 - u^2}.$$

Mais c'est là précisément ce que deviendrait la valeur (7) de $d\varphi : dt$ si l'on supposait $n = 2E$, c'est-à-dire, d'après la valeur de E,

$$\frac{C}{A} = 1, \qquad C = A,$$

auquel cas l'ellipsoïde d'inertie se réduirait à une sphère. De là ce théorème important : *Le mouvement d'un solide de révolution pesant peut se déterminer en supposant que les moments d'inertie* C *et* A *soient égaux, pourvu que l'on joigne, au mouvement du solide ainsi déterminé, une rotation uniforme autour de l'axe de révolution, avec une vitesse angulaire égale à*

$$n - 2E = \frac{n(A - C)}{A}.$$

219. La question étant ainsi ramenée au cas où l'ellipsoïde d'inertie se réduit à une sphère, il suffira de chercher dans cette hypothèse, la route du pôle instantané par rapport aux axes OX, OY, OZ. Soient p', q', r' les composantes de l'axe OI suivant ces trois directions. Nous aurons d'abord

$$p'^2 + q'^2 + r'^2 = p^2 + q^2 + r^2 = 2(\mathrm{H} - \mathrm{D}u) + n^2.$$

Pour exprimer p', q', r' au moyen de $\theta, \psi, \ldots$, suivons la même marche qu'au n° **29**; la rotation ω résulte des rotations ψ' autour de OZ, θ' autour de OX_1, φ' autour de Oz; on a d'ailleurs

$$\cos\overline{\mathrm{ZX}} = 0, \quad \cos\overline{\mathrm{ZY}} = 0, \quad \cos\overline{\mathrm{ZZ}} = 1;$$
$$\cos\overline{\mathrm{X_1X}} = \cos\psi, \quad \cos\overline{\mathrm{X_1Y}} = \sin\psi, \quad \cos\overline{\mathrm{X_1Z}} = 0,$$
$$\cos\overline{z\mathrm{X}} = \sin\theta\sin\psi, \quad \cos\overline{z\mathrm{Y}} = -\sin\theta\cos\psi, \quad \cos\overline{z\mathrm{Z}} = \cos\theta.$$

De là on tire immédiatement

$$(11)\quad \begin{cases} p' = \varphi'\sin\theta\sin\psi + \theta'\cos\psi, \\ q' = -\varphi'\sin\theta\cos\psi + \theta'\sin\psi, \\ r' = \varphi' + \varphi'\cos\theta. \end{cases}$$

Observons d'abord que, dans notre hypothèse actuelle $\mathrm{C} = \mathrm{A}$, ou $n = 2\mathrm{E}$, l'équation (7) se réduit à

$$(12)\qquad \varphi' = \frac{2(\mathrm{E} - \mathrm{L}u)}{1 - u^2},$$

les équations (6) et (8) subsistant sans changement.

La dernière équation (11) devient, par la substitution de valeurs de ψ' et φ' données par (6) et (12),

$$r' = 2\mathrm{L},$$

donc *la composante de la rotation suivant la verticale* OZ *est constante*. On voit que la courbe, lieu du point I dans l'espace, est plane et que son plan est horizontal. On pourrait ensuite calculer, par les valeurs de p', q', l'équation de cette courbe, mais la remarque suivante conduit plus simplement au but. Pour trouver le mouvement du pôle I par rapport au système $Oxyz$, nous devrions faire usage des valeurs de p, q, r tirées des équations (2) et du système des équations (6), (12), (8). De même, pour trouver son mouvement par rapport à OXYZ, il faut joindre les valeurs (11) de p', q', r' aux mêmes relations (6), (12), (8). Or, le premier système d'équations ne diffère du second que par

la permutation de ψ avec φ et de E avec L, pourvu que l'on change le sens de l'axe OY positif. On conclut évidemment de là et de manière dont sont mesurés les angles ψ et φ que le mouvement du pôle I par rapport à OX, — OY, OZ, se déduira de son mouvement par rapport à Ox, Oy, Oz, par le simple changement de E en L et réciproquement. D'où résulte ce théorème : *Lorsque l'ellipsoïde d'inertie se réduit à une sphère, la courbe décrite par le pôle instantané de rotation dans l'espace est une herpolhodie tracée sur un plan horizontal, mené à une distance* 2L *du point fixe.*

Le théorème peut être étendu au cas où C est différent de A, et l'on en déduit alors un théorème remarquable de Jacobi sur le mouvement d'un solide pesant de révolution autour d'un point fixe, mais nous renverrons pour ces développements au beau mémoire de M. Darboux(1).

220. Reprenons le problème proposé, dans le cas où le solide ayant reçu une rotation initiale n autour de son axe Oz est abandonné à l'action de la pesanteur. On a $p_0 = 0$, $q_0 = 0$, et par suite θ' et ψ' sont nuls pour $t = 0$. Appelant α la valeur initiale de l'angle θ, les équations (4), (5) et la 3e des équations (2) deviennent

$$(13)\quad \begin{cases} \theta'^2 + \psi'^2 \sin^2\theta = 2D(\cos\alpha - \cos\theta), \\ \psi' \sin^2\theta = 2E(\cos\alpha - \cos\theta), \\ \varphi' + \psi' \cos\theta = n. \end{cases}$$

Sans intégrer ces équations, on peut en déduire quelques conséquences générales.

La première a son premier membre positif, donc le second l'est aussi, et, à cause de la valeur $D = Mgl : A$, l et $\cos\alpha - \cos\theta$ seront donc toujours de même signe. Si donc $l > 0$, ou *si le centre de gravité* G *est au dessus du point* O *dans l'état initial*, on aura $\cos\alpha > \cos\theta$, ou $\theta > \alpha$, *l'axe de figure* Oz *fera constamment avec la verticale un angle plus grand que dans l'état initial.* Au contraire, si $l < 0$, on aura $\theta < \alpha$ et *l'axe de figure sera toujours plus rapproché de* OZ *qu'à l'instant* $t = 0$.

La deuxième équation (13) montre que ψ' est toujours de même signe que le produit $E(\cos\alpha - \cos\theta)$ ou, d'après ce qui précède, que le produit nl. La rotation de la trace OX_1 sur le plan XY, ou *le mouvement de précession du corps*, comme on dit, *sera donc de même sens que la*

(1) Notes XVIII et XIX de la *Mécanique* de Despeyrous.

rotation initiale du solide autour de Oz, *ou de sens contraire, suivant que le centre de gravité* G *sera au dessus ou au dessous du point fixe à l'époque* $t = 0$.

221. Eliminons ψ' entre les deux premières équations (13), ou, simplement, remplaçons dans l'équation (8) u par $\cos\theta$, H par $D\cos\alpha$, L par $E\cos\alpha$; nous aurons

$$(14)\quad dt = \pm \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{2(\cos\alpha - \cos\theta)[D\sin^2\theta - 2E^2(\cos\alpha - \cos\theta)]}}.$$

Le double signe montre que θ peut croître ou décroître lorsque t augmente. Pour fixer les idées, nous prendrons $l > 0$, donc

$$\cos\alpha - \cos\theta > 0 \quad \text{ou} \quad \theta > \alpha.$$

L'angle θ étant d'abord croissant, θ' est > 0; le signe $+$ du radical se conserve jusqu'à ce que θ atteigne une valeur qui annule le radical, car θ' ne peut changer de signe qu'en s'annulant. Soit β cette valeur de θ pour laquelle

$$D\sin^2\theta - 2E^2(\cos\alpha - \cos\theta) = 0,$$

valeur réelle, car le premier membre a des signes contraires pour $\theta = \alpha$ et pour $\theta = \pi$. Appelons T le temps que met θ à atteindre la valeur β;

$$T = \int_\beta^\alpha \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{2(\cos\alpha - \cos\theta)[D\sin^2\theta - 2E^2(\cos\alpha - \cos\theta)]}}$$

est donc donné par une intégrale elliptique.

A partir de l'instant $t = T$, l'angle θ décroît, sans quoi θ' deviendrait imaginaire, les deux facteurs sous le radical étant de signes contraires. Il faut alors prendre le signe — dans l'équation (14); θ se rapproche de sa valeur initiale α, et comme la valeur de dt ne dépend que de θ, après un nouveau temps T l'angle θ revient à cette valeur α; θ' s'évanouit, change de nouveau de signe, et l'angle θ croît de nouveau de $\theta = \alpha$ à $\theta = \beta$, dans un intervalle de temps T, et ainsi de suite. *L'axe de figure* Oz *exécute des oscillations isochrones d'amplitude constante* $\beta - \alpha$, *de durée* T, *dans le plan vertical* ZOz *tournant autour de* OZ. Ce mouvement oscillatoire constitue la *nutation de l'axe.*

Il résulte de la deuxième équation (13) que ψ' est fonction de θ seulement; la vitesse de précession varie donc périodiquement avec θ, elle est nulle pour $\theta = \alpha$ et atteint son maximum pour $\theta = \beta$, en restant

toujours de même signe que n. Le plan ZOz tourne autour de la verticale avec une vitesse angulaire périodiquement croissante et décroissante, toujours dans le même sens.

L'équation

$$\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2 = n^2 + \theta'^2 + \psi'^2 \sin^2\theta$$

nous donne

$$\omega^2 = n^2 + 2D(\cos\alpha - \cos\theta),$$

et nous montre que la vitesse angulaire de la rotation instantanée varie périodiquement avec θ, entre son minimum qui répond à $\theta = \alpha$, et son maximum qui a lieu pour $\theta = \beta$.

222. Étudions spécialement le cas où la vitesse n a une valeur numérique très considérable, et où le rapport C : A est > 1, comme cela a lieu dans un tore en bronze TT (fig. 105) dont le diamètre AB est très grand par rapport au rayon du cercle générateur. L'expression



Fig. 105.

$$D\sin^2\theta - 2E^2(\cos\alpha - \cos\theta),$$

positive pour $t=0$ ou $\theta=\alpha$, atteint la valeur zéro dès que $\cos\alpha - \cos\theta$ acquiert une valeur sensible, le facteur

$$2E^2 = \frac{C^2n^2}{2A^2}$$

ayant une très grande valeur. La limite supérieure β de l'angle θ diffère donc très peu de α, et $\theta - \alpha$ reste toujours très petit. On posera donc

$$\theta = \alpha + s,$$

s étant une variable positive très petite, dont le carré sera négligeable, sauf lorsqu'il sera multiplié par un facteur de l'ordre de n. On aura donc

$$\cos\theta = \cos(\alpha + s) = \cos\alpha\left(1 - \frac{s^2}{2} + \cdots\right) - \sin\alpha\left(s - \frac{s^3}{6} + \cdots\right)$$

ou

$$\cos\theta = \cos\alpha - s.\sin\alpha, \quad \cos\alpha - \cos\theta = s.\sin\alpha, \quad d\theta = ds.$$

L'équation (14) devient par ces substitutions, en restant dans l'approximation voulue,

$$dt = \mp \frac{ds}{\sqrt{2s(D\sin\alpha - 2E^2 s)}},$$

ou, si l'on pose

$$(\beta)\qquad s_1 = \frac{D \sin\alpha}{4E^2} = \frac{MAgl \sin\alpha}{C^2 n^2},$$

$$2E\,dt = \mp \frac{ds}{\sqrt{2s_1 s - s^2}} = \mp \frac{ds}{\sqrt{s_1^2 - (s_1 - s)^2}},$$

et en intégrant, on aura, s étant nul pour $t = 0$,

$$2Et = \pm \operatorname{arc\,cos} \frac{s_1 - s}{s_1}, \quad s_1 - s = s_1 \cos 2Et,$$

et enfin

$$(15)\qquad \theta = \alpha + s_1(1 - \cos 2Et).$$

La seconde équation (13) donne, au degré voulu d'approximation,

$$\psi' = \frac{2Es \sin\alpha}{\sin^2\theta} = \frac{2Es}{\sin\alpha},$$

d'où, remplaçant s par sa valeur, intégrant et prenant $\psi = 0$ pour $t = 0$,

$$\psi = \frac{2Es_1}{\sin\alpha}\left(t - \frac{\sin 2Et}{2E}\right)$$

ou

$$\psi = \frac{2Es_1 t}{\sin\alpha} - \frac{s_1}{\sin\alpha} \sin 2Et,$$

ou enfin

$$(16)\qquad \psi = \frac{Mgl}{Cn} t - \frac{MAgl}{C^2 n^2} \sin 2Et.$$

D'ailleurs, de l'équation

$$\varphi' = n - \psi' \cos\theta$$

on déduira, en remplaçant ψ' par sa valeur

$$\frac{2Es}{\sin\alpha} = \frac{2Es_1}{\sin\alpha}(1 - \cos 2Et),$$

$\cos\theta$ par $\cos\alpha$ puisque Es_1 est déjà du premier ordre, et intégrant,

$$\varphi = nt - 2Es_1 t \cot\alpha + s_1 \cot\alpha \sin 2Et,$$

la constante étant déterminée par l'hypothèse $\varphi_0 = 0$. Donc

$$(17)\qquad \varphi = nt - \frac{Mgl \cos\alpha}{Cn} t + \frac{MAgl \cos\alpha}{C^2 n^2} \sin 2Et.$$

228. Les formules (15), (16) et (17) donnent ψ, θ et φ en fonction du temps et complètent la solution du problème.

L'angle θ, que fait l'axe Oz avec la verticale OZ, varie périodiquement entre sa valeur initiale α et la valeur $\alpha + 2s_1$, valeur maximum de θ; comme s_1 est une très petite quantité, ce qui résulte de sa valeur (β), la variation de θ est excessivement petite et l'oscillation de l'axe ou la nutation est insensible. L'axe de figure semble décrire un cône de révolution autour de la verticale. La durée de l'oscillation totale de l'axe est, d'après (15)

$$\frac{\pi}{E} = \frac{2\pi A}{Cn},$$

elle est donc fort petite.

L'angle ψ se compose d'un terme proportionnel au temps et d'un terme périodique; les coefficients de ces deux termes sont très petits, mais le second est bien plus petit que le premier, renfermant n^2 en diviseur. Si l'on néglige d'abord ce terme périodique, on a

$$\psi = \frac{Mgl}{Cn}t;$$

le mouvement *moyen* de précession est donc une rotation uniforme autour de OZ, avec une faible vitesse angulaire $Mgl : Cn$. Ce mouvement change de sens, comme on l'a déjà vu d'ailleurs, avec la rotation initiale n.

Quant au terme périodique, il introduit dans le mouvement de précession une petite inégalité qui augmente et diminue alternativement, d'une façon à peine appréciable, l'angle ψ qui répond au mouvement moyen.

Enfin, l'angle φ (éq. 17) comprend un terme proportionnel au temps nt, qui croît rapidement avec t à cause de la grande valeur de n; un second terme du même genre, mais incomparablement plus petit; enfin, un terme périodique dont la valeur est beaucoup plus petite encore. Quand on néglige ce dernier terme, on a une rotation uniforme, d'une grandeur considérable, de la ligne Ox dans le plan xy; elle est de même sens que la rotation initiale imprimée au solide.

Pour obtenir une représentation géométrique claire du mouvement de l'axe de figure du solide, on décrit du centre O une sphère de rayon-unité. On appelle *pôle moyen* le point P' où cette surface est percée par

l'axe moyen ont le mouvement est défini par les équations

$$\theta = \alpha + s_1, \quad \psi = \frac{Mgl}{Cn} t;$$

le *pôle vrai* est le point P où l'axe de figure vrai Oz, dont le mouvement est défini par les formules (15) et (16), rencontre la surface sphérique. On voit alors sans peine que, pendant que le point P' décrit sur la sphère, d'un mouvement uniforme, un cercle dont OZ est l'axe, dans le sens de la rotation n, le pôle vrai décrit autour du centre mobile P' un tout petit cercle, d'un mouvement également uniforme.

Nous avons développé cette solution dans l'hypothèse $l > 0$; mais les calculs ne changeraient pas et les équations (13), (14), (15), (16), (17) subsisteraient si l était négatif. Le changement de signe de l entraînant celui de s_1, l'angle θ varierait entre un maximum α et un minimum $\alpha + 2s_1$, le mouvement de précession deviendrait contraire au mouvement de rotation, etc.

224. Ces résultats de l'analyse se vérifient au moyen de divers *gyroscopes*, et en particulier de l'appareil Robert. L'axe d'acier $O\zeta$, terminé en pointes à ses extrémités, s'appuie par l'une d'elles O dans le fond d'un godet creusé au sommet d'une colonne de cuivre C (fig. 106). Cet axe porte un anneau en bronze T, qui lui est fixé de telle manière qu'une bague B, en glissant le long de l'axe, peut porter à volonté le centre de gravité de la masse au-dessus ou au-dessous du point d'appui O, ou en ce point même. L'axe étant d'abord maintenu verticalement, on imprime à l'anneau une vive rotation au moyen d'une ficelle; on place ensuite l'axe dans une direction inclinée, et on abandonne le mobile à l'action de la pesanteur. On voit alors le corps, résistant à cette action qui semblerait devoir, ou le renverser, ou ramener l'axe verticalement, prendre le mouvement de précession dans le sens indiqué par les formules et qui dépend à la fois du sens de la rotation initiale et de la position du centre de gravité par rapport à O. La nutation est presque insensible si n est très grand, et l'inclinaison de l'axe sur la verticale du point O paraît à peu près constante.



Fig. 106.

225. Les solides de révolution tournant avec une grande vitesse autour de leur axe de figure et fixés par un point de cet axe présentent des effets remarquables, dont la théorie est comprise dans les formules générales du chapitre précédent.

Concevons un semblable solide tournant rapidement autour de son axe Oz, et qu'on lui applique une force quelconque P en un point C de cet axe (fig. 107). Conservant les mêmes notations que précédemment, appelons a la distance OC; X_1, Y_1, les composantes de P parallèlement à la trace OX_1 et à sa perpendiculaire OY_1 dans le plan normal à Oz; et pour nous débarrasser de l'influence de la pesanteur, admettons que le centre de gravité du corps coïncide avec le point O. Le moment de P par rapport à Oz étant nul, ainsi que B — A, la troisième équation d'Euler donne toujours $r = n$, n étant la vitesse initiale imprimée au solide autour de Oz. Pour obtenir les deux autres équations du mouvement, appliquons encore le théorème du n° **170**, mais en projetant l'axe d'impulsion et l'axe du couple moteur sur les directions OX_1, OY_1, *qui ne sont pas liées au solide*, mais qui sont, à chaque instant, des axes principaux d'inertie relatifs au point O. En raisonnant comme au n° **201**, puisque les projections de l'axe instantané du solide sur OX_1, OY_1, Oz sont égales à θ', $\psi' \sin\theta$, n, on trouve pour les projections de l'axe OK

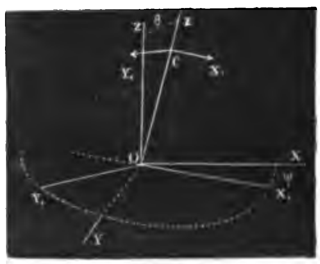


Fig. 107.

$$A\theta', \quad A\psi' \sin\theta, \quad Cn,$$

et les projections de la vitesse *relative* du point K sur OX_1, OY_1 seront

$$A\frac{d\theta'}{dt}, \quad A\frac{d(\psi' \sin\theta)}{dt}.$$

Pour calculer les composantes de sa vitesse d'entraînement, observons que le mouvement du système mobile OX_1Y_1z se compose d'une rotation autour de OX_1 avec une vitesse angulaire θ', et d'une rotation autour de OZ avec la vitesse ψ'; les projections de l'axe instantané du système OX_1Y_1z sur OX_1, OY_1, Oz sont donc

$$\theta', \quad \psi' \sin\theta, \quad \psi' \cos\theta,$$

et l'application des formules du n° **17** donne, pour les composantes de

la vitesse d'entrainement du point K parallèlement à OX_1, OY_1,

$$\psi' \sin\theta \cdot Cn - \psi' \cos\theta \cdot A\theta' \sin\theta, \quad \psi' \cos\theta \cdot A\theta' - \theta' \cdot Cn.$$

Ajoutant respectivement ces composantes à celles de la vitesse relative du point K, et égalant aux moments $-aY_1$, aX_1 de la force P par rapport à OX_1, OY_1, on a

$$(18) \quad \begin{cases} A\dfrac{d\theta'}{dt} + (Cn - A\psi' \cos\theta)\,\psi' \sin\theta = -aY_1, \\ A\sin\theta\dfrac{d\psi'}{dt} + 2A\psi'\theta' \cos\theta - Cn\theta' = aX_1. \end{cases}$$

On arriverait aux mêmes équations en éliminant p, q, r entre les équations (1) et (2) du paragraphe précédent, dans l'hypothèse $r = n$.

226. Les équations (18) se prêtent à la solution de nombreuses questions, mais nous nous bornerons ici à en tirer l'explication des faits principaux que nous avons en vue. Supposons que le rapport $Cn : A$ ait une valeur absolue très-considérable, comme c'est le cas pour une tore en bronze auquel on a imprimé une rotation excessivement rapide autour de son axe de figure, et laissons de côté les cas où θ', ψ', et leurs dérivées par rapport au temps pourraient acquérir des valeurs très grandes. Les équations (18), divisées par Cn, montrent qu'alors ψ' et θ' ne peuvent généralement être que des quantités fort petites, de l'ordre de $P : Cn$. On y négligera donc les termes en ψ'^2, $\psi'\theta'$; de plus, si l'on ne tient pas compte dans θ' et ψ', des petites variations périodiques, ce qui revient à substituer à l'axe de figure un axe moyen dont l'axe vrai ne s'écarte jamais que par des oscillations insensibles, il faudra que les dérivées de θ' et ψ' par rapport au temps soient elles-mêmes très petites, et leurs quotients par Cn seront aussi négligeables. Ces équations se réduisent alors à celles-ci :

$$(19) \qquad \psi' = -\frac{aY_1}{Cn \sin\theta}, \quad \theta' = -\frac{aX_1}{Cn}.$$

Ces équations donnent les valeurs approchées de ψ', θ', pour l'axe moyen, si X_1 et Y_1 sont donnés, et réciproquement.

1° Si l'on suppose $X_1 = 0$, θ' est nul, θ est donc constant, l'axe de figure du solide a un mouvement conique autour de la droite fixe OZ.

Si, au contraire, on fait $Y_1 = 0$, ψ' est nul, l'axe de figure Oz se meut donc dans un plan fixe ZOz perpendiculaire à la direction de la force

motrice X_1, avec une vitesse angulaire θ' donnée par la seconde équation (19). Si X_1 est > 0, ou si la force agit dans le sens OX_1, θ' sera de signe contraire à n, l'axe Oz se rapprochera de OZ ou s'en éloignera suivant que la rotation du solide autour de Oz aura lieu de gauche à droite ou de droite à gauche. L'inverse aurait lieu si la force motrice X_1 était dirigée en sens contraire de OX_1. Remarquons maintenant que la force X_1, appliquée sur l'axe Oz, tend à donner au solide une rotation dont l'axe est dirigé suivant OY_1 ou suivant son prolongement selon que X_1 est positif ou négatif. On peut donc formuler toutes les circonstances du mouvement produit par cette force X_1 dans ce théorème :

Lorsqu'un solide de révolution, fixé par un point de son axe, tourne avec une grande rapidité autour de cet axe, si l'on applique sur celui-ci une force de direction constante, la rotation que cette force déterminerait sur le solide en repos ne se produit pas, mais l'axe de figure du solide se porte par le plus court chemin vers l'axe de la rotation que la force tend à produire, comme si les deux rotations tendaient à se faire autour d'une même droite et dans le même sens. C'est là ce qu'on nomme *la tendance des axes de rotation au parallélisme.*

2° Supposons maintenant que, sous l'action de la main, l'axe de figure du solide décrive, d'un mouvement uniforme, un cône de révolution autour de l'axe OZ. On aura $\theta' = 0$, θ étant constant; d'où $X_1 = 0$. La première des équations (19) donnera

$$Y_1 = -\frac{Cn\psi' \sin\theta}{a}.$$



Fig. 108.

Telle est la force qui produit le mouvement conique, et qui est égale et opposée à la réaction que l'axe exerce sur la main appliquée en C. Cette réaction est donc très grande, à cause du facteur Cn; elle est parallèle à OY_1, c'est-à-dire perpendiculaire à la direction dans laquelle on déplace l'axe, contrairement à ce qui aurait lieu si la rotation n n'existait pas.

Toutes ces conséquences du calcul se vérifient dans le *gyroscope de Foucault*, la *balance de Plücker*, le *culbuteur de Hardy*, etc. Supposons un tore en bronze T (fig. 108), dont l'axe de figure CC est monté

sur un anneau E, mobile lui-même autour d'un axe DD perpendiculaire au premier, et porté par un deuxième anneau F qui peut tourner autour d'un axe GG perpendiculaire à DD. On voit que l'axe du tore peut ainsi prendre toutes les directions autour du point O, intersection des trois axes, qui seul reste fixe. Après avoir imprimé au tore une rotation très rapide autour de son axe CC, on l'abandonne à lui-même : cet axe reste immobile. Si l'on agit ensuite sur l'anneau E pour le faire tourner autour de DD, on éprouve une résistance énergique, comme si cet anneau était fixé à l'anneau F, et le seul résultat que l'on obtienne est une rotation de tout le système autour de GG. De même, si l'on agit sur l'anneau F comme pour le faire tourner autour de GG, on n'y parvient pas, mais l'anneau E bascule autour de son axe DD. Le sens de ces mouvements est d'ailleurs toujours conforme à la loi de la tendance des axes au parallélisme.

On peut, au moyen de divers appareils dus à MM. Sire et Gruey, manifester cette loi sous des formes curieuses et saisissantes, dont nous ne pouvons parler ici.

Exercices.

1. Un tore, dont le cercle générateur a 0^m01 de rayon et a son centre à une distance $\delta = 0^m12$ de l'axe de rotation, tourne avec une vitesse de 6000 tours par minute autour de cet axe. La distance l de son centre de gravité au point fixe de cet axe est 0^m02, et l'inclinaison initiale α de l'axe sur la verticale est de $45°$. Déterminer la durée T et l'amplitude $2\varepsilon_1$ de la nutation, la vitesse ψ' de la précession moyenne et le temps T′ que l'axe du tore met à faire un tour entier autour de la verticale.

R. On trouve, au moyen des formules de l'ex. 16, chap. XIV,

$$2E = 1183,1 ; \quad 2\varepsilon_1 = 0,00002578 = 5''.392 ; \quad T = 0^s,00531 ; \quad \psi' = 0,02157 ;$$
$$T' = 291^s,29 = 4^m51^s,29.$$

2. Un solide de révolution, homogène et pesant, fixé par un point de son axe de figure, a reçu un mouvement initial quelconque. Déterminer les conditions pour que l'axe décrive un cône de révolution autour de la verticale du point fixe.

R. Les notations restant celles du N° 216, il faut que l'on ait $\theta' = 0$, $\theta = \alpha$. Cette hypothèse, introduite dans les formules, conduit à

$$\psi' = \text{const.} = \mu, \quad \varphi' = \text{const.} = \nu, \quad \psi = \mu t, \quad \varphi = \nu t,$$
$$p = \mu \sin \alpha \sin \nu t, \quad q = \mu \sin \alpha \cos \nu t, \quad r = \nu + \mu \cos \alpha.$$

Pour que ces valeurs satisfassent aux équations d'Euler, il faut et il suffit que α, μ, ν vérifient l'équation

$$\sin\alpha\,[(C-A)\,\mu^2\cos\alpha + C\mu\nu - Mgl] = 0.$$

L'hypothèse $\sin\alpha = 0$ suppose l'axe de révolution vertical, sans autre condition. L'hypothèse

$$(C-A)\,\mu^2\cos\alpha + C\mu\nu - Mgl = 0$$

donne *une seule valeur* pour μ dans les cas suivants : 1° $\cos\alpha = 0$: l'axe est horizontal; 2° $A = C$, l'ellipsoïde central est une sphère; dans ces deux cas on a

$$\mu = \frac{Mgl}{C\nu}.$$

3° $l = 0$; le centre de gravité est au point fixe. On a

$$\mu = \frac{-C\nu}{(C-A)\cos\alpha}.$$

En général, pour des valeurs données de α et de ν, il y a deux valeurs de μ qui satisfont au problème, si

$$C^2 n^2 + 4Mgl\,(C-A)\cos\alpha > 0.$$

Le cas particulier où $\nu = 0$ renferme la solution du problème du *pendule centrifuge*. La vitesse avec laquelle le plan passant par l'axe et la verticale du point fixe tourne autour de celle-ci est

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{Mgl}{(C-A)\cos\alpha}}.$$

Discuter.

§ 4. MOUVEMENT D'UN SOLIDE LIBRE.

227. Pour simplifier la question du mouvement d'un solide libre, nous concevrons que par son centre de gravité G on mène trois axes $G\xi$, $G\eta$, $G\zeta$ constamment parallèles à des axes fixes OX, OY, OZ; le mouvement de translation du système $G\xi\eta\zeta$ sera connu si l'on sait trouver celui du centre de gravité; le mouvement relatif du solide par rapport au système de comparaison $G\xi\eta\zeta$ sera celui d'un solide autour d'un point fixe, et si on sait le déterminer, le problème proposé sera résolu.

Or, le centre de gravité G se meut comme si la masse M du solide était réunie en ce point, et que toutes les forces extérieures y fussent transportées parallèlement à elles-mêmes. On appliquera donc les équations du mouvement d'un point libre (**129**).

Pour établir les équations du mouvement du solide par rapport à

$G\xi\eta\zeta$, nous rappellerons que le théorème des moments subsiste, comme on l'a vu au n° **175**, lorsque l'on prend les moments des quantités de mouvement du système et les moments des forces extérieures, par rapport à des axes passant par le centre de gravité et animés d'une simple translation. Donc, si l'on considère le mouvement du solide par rapport à $G\xi\eta\zeta$, on peut dire que l'axe du couple résultant des forces extérieures, relatif au point G, est égal et parallèle à la vitesse, par rapport au système $G\xi\eta\zeta$, du point K, extrémité de l'axe d'impulsion dans le mouvement *relatif* par rapport à ce même système. De là ce théorème, qui décompose le problème en deux autres déjà traités : *Lorsque un solide libre se meut sous l'action de forces extérieures données, on détermine le mouvement de son centre de gravité en y supposant toute la masse réunie et toutes les forces transportées parallèlement à elles-mêmes; et on détermine le mouvement du solide autour de son centre de gravité en regardant ce dernier point comme fixe, supposant que les forces extérieures agissent sur le corps sans aucun changement, et appliquant la théorie du mouvement d'un solide autour d'un point fixe.*

Si donc x_1, y_1, z_1 désignent les coordonnées de G par rapport aux axes fixes; X, Y, Z les composantes de l'une quelconque des forces appliquées au solide; p, q, r les projections de l'axe instantané de rotation relatif au point G sur les axes principaux d'inertie Gx, Gy, Gz correspondant au même point; θ, ψ, φ les angles qui déterminent la position du système $Gxyz$ par rapport au système $G\xi\eta\zeta$, les équations

$$M\frac{d^2x_1}{dt^2}=\Sigma X,\quad M\frac{d^2y_1}{dt^2}=\Sigma Y,\quad M\frac{d^2z_1}{dt^2}=\Sigma Z,$$

jointes aux équations (1) et (2) du § 2, détermineront $x_1, y_1, z_1, p, q, r, \theta, \psi, \varphi$ en fonction du temps; et donneront la solution du problème.

228. Quand les forces extérieures ne dépendent que du temps ou de la position du centre de gravité, les trois équations ci-dessus permettent de déterminer le mouvement du point G isolément, sans que l'on ait besoin de connaître le mouvement de rotation du solide autour de son centre de gravité. Mais, en général, ces forces dépendent de la position du solide tout entier, et, par suite, de son mouvement de translation et de son mouvement de rotation à la fois. Dans ce cas, la détermination indépendante de x_1, y_1, z_1 ne peut se faire de la même manière, puisque

ΣX, ΣY, ΣZ dépendent de θ, φ, ψ, et il faut intégrer simultanément les équations différentielles de la translation et de la rotation. Le problème est alors bien plus compliqué.

Le théorème ci-dessus n'en reste pas moins remarquable, car on a vu dans la Statique que les forces appliquées à un solide sont réductibles à une seule force R appliquée, par exemple, au centre de gravité du solide, et à un couple G. Or, le mouvement du centre de gravité est produit uniquement par la résultante R, sans que le couple G ait aucune influence; et la rotation du solide autour de son centre de gravité est produite uniquement par le couple G, sans que la force R influe en rien sur cette rotation.

229. Considérons, comme exemple du premier cas, un solide de révolution homogène et pesant, lancé dans un espace libre de toute résistance. Son centre de gravité, situé sur l'axe de figure, est soumis simplement à l'action de la pesanteur; il décrit une parabole suivant les lois discutées au n° **150**. Si nous fixons ensuite le centre de gravité pour étudier le mouvement autour de ce point, nous détruisons l'action de la pesanteur, et nous tombons dans le cas d'un solide de révolution fixé par un point de son axe et sur lequel n'agit aucune force motrice. On peut donc appliquer au mouvement du solide autour de son centre de gravité les propriétés et les formules des nos **202-206**. Le problème est donc complètement résolu.

230. Comme second exemple, considérons un projectile cylindro-conique auquel l'explosion de la poudre a imprimé une vitesse de translation très grande suivant la direction commune de l'axe de la pièce et de l'axe de figure du projectile, en même temps qu'une rotation excessivement rapide autour de cet axe, et qui se meut dans un milieu résistant tel que l'air. Les forces motrices se réduisent à une force verticale égale au poids du corps, appliquée à son centre de gravité G, et à la résultante DE (fig. 109) des pressions que l'air exerce sur la face antérieure, résultante dirigée, à cause de la symétrie, dans le plan passant par la direction GT de la vitesse du centre de gravité et par l'axe de figure GA du projectile (on néglige le frottement contre l'air produit par la rotation). Si l'axe de figure GA coïncidait constamment avec GT, cette résultante passerait par le centre de gravité et ne produirait aucun effet sur la rotation du

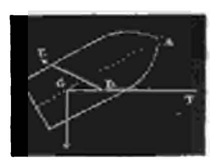


Fig. 109.

projectile, mais dès que cette coïncidence n'existe plus, la résultante DE, à cause du glissement des filets d'air sur la surface, se rapproche plus que GT d'une direction normale à l'axe GA; elle tend donc à écarter l'axe de la direction du mouvement GT et à renverser le projectile, car elle coupe habituellement l'axe GA en avant du centre de gravité. Comme d'ailleurs la direction et l'intensité de la résultante DE dépendent évidemment de la position de l'axe GA par rapport à GT, on voit qu'ici le mouvement du centre de gravité est influencé par la rotation du projectile autour de ce centre. Mais, dans une première approximation, on peut admettre que la composante principale de DE est dirigée suivant DG, et l'on n'a plus, pour déterminer le mouvement du centre de gravité G, qu'à chercher le mouvement d'un point pesant soumis à une résistance opposée à la vitesse et fonction de cette vitesse (Ch. XII, § 3); on suppose donc que le centre de gravité du projectile reste sensiblement dans le plan vertical passant par la direction de sa vitesse initiale (axe de la pièce).

Considérons ensuite le mouvement du corps autour de son centre de gravité G, supposé fixe. La direction de la force DE coupant constamment l'axe principal GA, la rotation n autour de cet axe est constante. Cette force produit d'ailleurs le même effet qu'une force P, appliquée perpendiculairement sur l'axe GA à une distance a du centre de gravité, dans le plan AGT. D'après la loi de la tendance des axes au parallélisme (**226**), comme le couple Pa tend à produire une rotation autour d'un axe normal au plan AGT, l'axe de figure de projectile se porte vers cet axe, et *se déplace donc, à chaque instant, normalement au plan passant par la direction de la translation* GT *et l'axe* GA *du corps*, en sorte qu'il décrirait un cône droit autour de la direction GT si celle-ci était invariable, ce qui n'a pas lieu, vu le mouvement curviligne du centre de gravité.


Fig. 110.

Supposons que le sens de la rotation initiale soit de gauche à droite autour de GA; l'angle TGZ (fig. 110) que fait la direction GT avec la verticale croît constamment; donc, au début, GT s'abaisse un peu par rapport à GA; la direction GY' de l'axe de la rotation que la force P tend à produire est donc horizontale et vers la gauche du tireur; l'axe GA se porte donc de droite à gauche, puis de

haut en bas. Par suite de l'abaissement continu de GT, l'angle AGT croît et décroît alternativement, en restant toujours très petit puisque l'axe GA tourne autour de GT. Ce résultat est d'une grande importance pour la précision du tir, parce que 1° le projectile se présente constamment à l'air qu'il traverse dans le sens où la résistance est la plus petite, vu la forme donnée au corps : la portée est donc augmentée; 2° la rotation énergique imprimée au corps absorbe les rotations accidentelles qui se produisaient autrefois, soit dans l'âme de la pièce, soit par le frottement de l'air, et permet ainsi de déterminer expérimentalement à l'avance l'effet de cette rotation quant au mouvement du centre de gravité.

En effet, dès que l'axe GA s'écarte de la direction GT, la composante de DE normale à GT, transportée au centre de gravité, agit 1° pour soulever le centre de gravité; 2° pour le porter vers la gauche du tireur. La première action a peu d'influence sur le tir, parce qu'elle s'exerce en sens contraire dès que, par suite de son mouvement conique, l'axe de figure est plus bas que GT; la deuxième s'exerce toujours dans le même sens, parce que, en suite de l'abaissement de GT, l'angle $\nu=$ZTA croît et décroît alternativement, et l'axe du projectile reste à gauche du plan vertical ZGT; c'est ce qui donne lieu à la *dérivation* horizontale des projectiles tournants.

Exercices.

1. Une figure plane de masse M se déplace dans son plan sous l'action de forces données. Déterminer son mouvement; examiner en particulier le cas où les forces motrices se réduisent à un couple constant.

R. Soient, à l'époque t, x_1, y_1 les coordonnées du centre de gravité, rapportées à deux axes rectangulaires fixes OX, OY; X, Y les composantes de l'une des forces motrices; G le moment du couple résultant de ces forces par rapport au centre de gravité; H le moment d'inertie de la figure par rapport à une normale au plan menée par le centre de gravité; ω la vitesse angulaire de rotation de la figure autour de ce centre; α, β les coordonnées du centre instantané de rotation. On a

$$M\frac{d^2x_1}{dt^2}=\Sigma X,\quad M\frac{d^2y_1}{dt^2}=\Sigma Y,\quad \frac{d\omega}{dt}=\frac{G}{H}.$$

Après avoir tiré de là x_1, y_1, ω en fonction de t, on aura

$$\alpha=x_1+\frac{1}{\omega}\frac{dy_1}{dt},\quad \beta=y_1-\frac{1}{\omega}\frac{dx_1}{dt},$$

et la vitesse d'un point quelconque de la figure sera connue en grandeur et en direction.

Dans le cas de G constant, soient a, b, ω_0 les composantes de la vitesse initiale du c. de gr. et la vitesse angulaire initiale; $\mu = G : H$; on a

$$x_1 = at,\quad y_1 = bt,\quad \omega = \mu t + \omega_0,\quad \theta = \frac{\mu t^2}{2} + \omega_0 t,$$

$$\alpha = at + \frac{b}{\mu t + \omega_0},\quad \beta = bt - \frac{a}{\mu t + \omega_0}.$$

Le c. de gr. décrit une droite; la vitesse angulaire ω croît proportionnellement au temps; le centre instantané de rotation se meut sur une droite mobile, passant par le c. de gr. et perpendiculaire à celle que décrit celui-ci, en se rapprochant indéfiniment du c. de gr.

2. Mouvement de la toupie.

R. On suppose un solide de révolution pesant, s'appuyant par un point O de son axe de figure sur un plan horizontal parfaitement poli. Soient M la masse du corps, R la réaction normale du plan d'appui, z_1 la hauteur du c. de gr. G de la toupie au-dessus de ce plan.

Le mouvement du centre de gravité résulte d'une force verticale égale au poids du corps, $-Mg$, et d'une autre force verticale R. Les composantes horizontales de la force motrice étant nulles, *la projection du c. de gr. sur le plan d'appui décrit une droite d'un mouvement uniforme.* On a ensuite

$$M\frac{d^2 z_1}{dt^2} = -Mg + R,\quad R = M\left(g + \frac{d^2 z_1}{dt^2}\right).$$

Pour étudier le mouvement de la toupie autour de son centre de gravité fixe, on cherche celui de l'axe Gz de la toupie par rapport à trois axes GX, GY, GZ dont le premier est vertical vers le haut. La force $-Mg$ étant détruite, R rencontrant l'axe Gz, la rotation r autour de Gz est constante et égale à n. Soient θ l'angle zGZ, ψ l'angle du plan zGZ avec un plan vertical fixe, l la longueur OG; C, A les moments principaux relatifs au point G. Appliquant le théorème des forces vives au mouvement du corps autour de son centre de gravité, on a

$$A(\theta'^2 + \psi'^2 \sin^2\theta) + Cn^2 = -2\int R\,dz_1;$$

d'où, mettant pour R sa valeur ci-dessus, et observant que $z_1 = l\cos\theta$, on obtient l'équation

$$(1)\qquad (A + Ml^2\sin^2\theta)\theta'^2 + A\psi'^2\sin^2\theta = h - 2Mgl\cos\theta,$$

h étant une constante. Le théorème des moments appliqué à GZ fournit l'équation

$$(2)\qquad A\sin\theta^2\cdot\psi' + Cn\cos\theta = k,$$

k étant une constante. Eliminant ψ' entre (1) et (2), on arrive à

$$dt = \pm\frac{\sqrt{A}\sin\theta d\theta\sqrt{A + Ml^2\sin^2\theta}}{\sqrt{(h - 2Mgl\cos\theta)A\sin^2\theta - (k - Cn\cos\theta)^2}}.$$

La discussion de cette équation fournit des résultats semblables à ceux des nos 220 et suiv. L'angle θ varie périodiquement, l'axe de la toupie s'abaisse et se relève alternativement, pendant que le plan vertical passant par l'axe de figure tourne autour de la verticale du point G avec un mouvement de précession continu dans le même sens. Si l'on suppose, en particulier, que la vitesse horizontale de G soit nulle, la pointe de la toupie décrit sur le plan autour de la projection du point G, une sorte de rosace composée d'une série d'arcs égaux, tangents à une circonférence extérieure, normaux à une circonférence intérieure.

2. Trouver, dans le mouvement d'un projectile cylindro-conique dans l'air, les équations qui déterminent le mouvement de l'axe du projectile autour du centre de gravité

R. Soient (fig. 110) ZGX le plan vertical du tir, θ l'angle AGZ que fait l'axe de figure avec la verticale, ψ l'angle AZX compris entre le plan du tir et le plan AGZ, δ l'angle AGT, ν l'angle ATZ entre le plan du tir et le plan AGT, ε l'angle entre les plans AGT, AGZ; φ l'inclinaison de la vitesse GT du centre de gravité sur l'horizontale GX; X_1, Y_1, les composantes de la force P perpendiculairement au plan AGZ et dans ce plan. Les formules du no 226 donnent

$$\theta' = -\frac{aX_1}{Cn}, \quad \psi' = \frac{aY_1}{Cn \sin\theta}.$$

Or, on a $X_1 = -P\sin\varepsilon$, $Y_1 = P\cos\varepsilon$. De plus, soit A'GT' le plan passant par l'axe et la vitesse de G à l'époque $t + dt$; projetant T sur l'arc A'T', on a

$$(\alpha) \qquad d\delta = -d\varphi \cos\nu.$$

Le triangle sphérique AZT donne la relation

$$\sin\delta \sin\nu = \sin\theta \sin\psi$$

qui, différentiée, conduit à

$$\cot\delta\, d\delta + \cot\nu\, d\nu = \cot\theta\, d\theta + \cot\psi\, d\psi = \frac{adt}{Cn}\left(\frac{Y_1 \cot\psi}{\sin\theta} - X_1 \cot\theta\right)$$

$$= \frac{Padt}{Cn \sin\theta \sin\psi}(\cos\varepsilon \cos\psi + \sin\varepsilon \sin\psi \cos\theta) = \frac{Pa \cot\nu}{Cn \sin\delta}\, dt.$$

On tire delà

$$(\beta) \qquad d\nu = -\frac{\operatorname{tg}\nu}{\operatorname{tg}\delta}\, d\delta + \frac{Padt}{Cn \sin\delta}.$$

L'angle φ est connu en fonction du temps, et le moment Pa est déterminé en fonction de δ par expérience. On a donc à intégrer le système (α), (β) entre δ, ν et t.

CHAPITRE XVI.

DU MOUVEMENT RELATIF.

§ 1. MOUVEMENT RELATIF D'UN POINT.

221. Les équations différentielles du mouvement d'un point ou d'un système, telles que nous les avons établies; les propriétés que nous en avons déduites, reposent sur les principes fondamentaux énoncés au chapitre IV et supposent, par suite, que le mouvement est rapporté à un système immobile; en d'autres termes, elles conviennent seulement au mouvement que nous nommons *absolu* (**50**). Mais dans bien des cas, on a besoin de connaître le mouvement *apparent* ou *relatif*, rapporté à un système de comparaison qui se déplace lui-même par rapport à celui que nous regardons comme fixe. Ainsi, dans les cas où nous avons étudié le mouvement d'un point ou d'un solide à la surface de la terre, nous avons raisonné comme si celle-ci était en repos et traité ce mouvement comme absolu; or, nous savons que la terre possède un mouvement assez compliqué par rapport au système des étoiles fixes. Il reste donc à justifier la marche suivie et, plus généralement, à établir la théorie du mouvement rapporté à un système de comparaison mobile dans l'espace.

On peut suivre deux méthodes : 1° déterminer le mouvement absolu du corps par les théories connues, et passer du mouvement absolu au mouvement relatif par un changement de coordonnées; mais cela peut devenir impraticable lorsque les forces motrices dépendent du mouvement relatif du corps; 2° former directement les équations différentielles du mouvement d'un point ou d'un système de points, rapporté à un système de comparaison animé d'un mouvement d'ailleurs connu. C'est ce que nous allons faire, en considérant d'abord le cas d'un simple point libre.

222. Reprenons les formules du chapitre III, § 2. Soient OX, OY, OZ les axes rectangulaires mobiles auxquels nous réduisons le système de comparaison; p, q, r les projections sur ces axes de l'axe instantané de

rotation du système OXYZ, à l'époque t; m la masse, x, y, z les coordonnées relatives du point mobile M; X, Y, Z les composantes de la force motrice P qui détermine le mouvement *absolu* du point M. Cette force est représentée en grandeur et en direction par l'accélération absolue j multipliée par la masse m du point; ses composantes X, Y, Z sont donc respectivement égales à mj_x, mj_y, mj_z. Multipliant par m l'équation

$$j'_x = j_x - j''_x - j'''_x,$$

remplaçant mj_x par X, j'_x par sa valeur $\frac{d^2x}{dt^2}$, j'''_x par sa valeur donnée au numéro **40**, et opérant de même pour les deux autres axes, on a les équations

$$(1)\quad \begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = X - mj''_x - 2m\,(qv'_z - rv'_y), \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = Y - mj''_y - 2m\,(rv'_x - pv'_z), \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = Z - mj''_z - 2m\,(pv'_y - qv'_x). \end{cases}$$

Ces équations sont celles du mouvement relatif d'un point libre. La force qui a pour composantes $-mj''_x$, $-mj''_y$, $-mj''_z$ s'appelle la *réaction d'entraînement;* ces composantes sont données par les équations (4) du n° **40**. Celle dont les composantes sont $-2m\,(qv'_z - rv'_y)$, etc., est la *force centrifuge composée :* on sait que sa direction est perpendiculaire à celle de la vitesse relative v' (**40**). Les équations (1) renferment le théorème suivant : *Le mouvement relatif d'un point matériel libre, par rapport à un système de comparaison mobile, peut être traité comme un mouvement absolu et donne lieu aux mêmes propriétés, pourvu que l'on joigne à la force motrice* P, *dans les formules et dans les énoncés, deux forces fictives, savoir, la réaction d'entraînement et la force centrifuge composée.*

Si le point M n'est pas libre, mais assujetti à se mouvoir sur une surface ou sur une courbe (sans frottement), on sait que ce cas se ramène au précédent. On ajoutera aux composantes X, Y, Z de la force motrice suivant les axes mobiles, les composantes respectives de la réaction normale de la surface ou de la courbe, ce qui introduira de nouvelles inconnues; mais les équations de la surface ou de la courbe, que l'on suppose exprimées en coordonnées rapportées à OX, OY, OZ, four-

niront de nouvelles relations, en nombre suffisant, entre les fonctions cherchées x, y, z.

232. Appliquons ce qui précède, en général, au mouvement apparent d'un point matériel à la surface de la terre. Celle-ci possède un mouvement de translation dans l'espace, mais on peut en faire abstraction. En effet, ce mouvement est dû à l'action du soleil et des planètes, action qui est très sensiblement la même en grandeur et en direction sur tous les points du globe terrestre : la réaction d'entraînement, que l'on devrait appliquer au point M, sera donc détruite par l'action même que ces astres exercent sur ce point. Il suffit ainsi de considérer la terre comme tournant autour de son axe *fixe* NS (fig. **111**), de l'ouest à l'est, avec une vitesse angulaire constante ω qui lui fait décrire un tour entier en un jour sidéral, ou 86164 secondes. On a

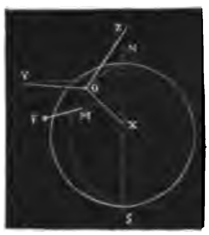


Fig. 111.

$$\omega = \frac{2\pi}{86164} = 0{,}000073\,;$$

ω est donc une très petite quantité, et ses composantes p, q, r suivant OX, OY, OZ sont également très petites. Il en résulte que, *si l'on ne suppose pas la vitesse relative v' très grande*, les forces centrifuges composées pourront être négligées dans les équations (1) et l'on n'aura à joindre à la force motrice P que la réaction d'entraînement — mj''.

Or, d'après ce qu'on sait (**28**, 2°) de l'accélération d'un point qui décrit un cercle d'un mouvement uniforme, si ρ désigne la distance du point mobile à l'axe terrestre, cette réaction d'entraînement se réduit ici à la force centrifuge $m\omega^2\rho$ due au mouvement de rotation autour de l'axe terrestre; elle est dirigée suivant le prolongement MF du rayon ρ. Sa valeur est aussi toujours assez faible, car à l'équateur, où elle est maximum et où $\rho = 6378200$, on a seulement

$$\omega^2\rho = 0{,}034.$$

Si donc nous voulons déterminer d'abord le mouvement apparent d'un point libre, soumis uniquement à l'attraction de la masse terrestre, nous devrons joindre à cette attraction la force centrifuge correspondant à la position actuelle du point mobile dans la rotation autour de l'axe NS. Or, c'est précisément cette résultante de l'attraction et de la force centrifuge que nous appelons la *pesanteur* ; c'est la force égale et contraire

à celle qu'il faudrait appliquer au point M, supposé en repos apparent, pour qu'il restât en équilibre (fil à plomb). Ainsi, la direction de la verticale n'est pas celle de l'attraction que la terre exerce sur le point M, mais de l'attraction composée avec la force centrifuge; et c'est pour cette raison qu'elle est normale à la surface des eaux tranquilles. Il suit de là que, dans les problèmes où nous avons étudié le mouvement des corps pesants à la surface de la terre, nous avons implicitement tenu compte de la rotation terrestre en substituant la pesanteur à l'attraction du globe : nos résultats sont donc justifiés.

Supposons maintenant qu'il s'agisse d'un point soumis à l'action de diverses forces. Comme l'attraction de la terre, qui s'exerce sur tous les corps à sa surface, sera toujours l'une de ces forces, on fera le même raisonnement que ci-dessus, et l'on en conclura cette règle générale : *Dans l'étude du mouvement relatif d'un point matériel à la surface de la terre, sous l'influence de forces et de liaisons quelconques, on peut avec une approximation suffisante* (sauf le cas de grandes vitesses) *raisonner comme si la terre était en repos et appliquer les équations du mouvement absolu, pourvu que l'on remplace l'attraction terrestre par la pesanteur.*

224. Lorsque la vitesse relative est très grande, ou lorsque la force centrifuge composée agit dans le même sens pendant un temps assez long, ses effets peuvent devenir sensibles, et il est nécessaire d'établir les équations du mouvement relatif d'un point à la surface de la terre en en tenant compte.

Soit O (fig. 112) l'origine, fixe par rapport au globe et prise dans l'hémisphère boréal; OZ dirigé suivant la verticale du point O, dans le sens de la pesanteur; OX horizontal dans le plan méridien, vers le sud; OY horizontal, perpendiculaire au plan méridien vers l'est; soit NOS la parallèle menée par O à l'axe de rotation de la terre, et comme la rotation a lieu de l'ouest à l'est, OS sera, suivant nos conventions, la direction propre de l'axe de rotation. Soit enfin λ la *latitude* du point O, ou le complément de l'angle ZOS que fait l'axe terrestre avec la verticale de ce point. Nous avons donc



Fig. 112.

$$p = \omega \cos \lambda, \quad q = o, \quad r = \omega \sin \lambda.$$

Le point mobile étant supposé ne jamais s'écarter beaucoup de l'origine O, il sera permis de regarder la pesanteur comme constante d'intensité et parallèle à OZ dans toute l'étendue de la trajectoire. On fera donc, dans les équations (1),

$$X - mj''_x = 0, \quad Y - mj''_y = 0, \quad Z - mj''_z = mg,$$

et l'on aura, en supprimant le facteur m,

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\omega \sin\lambda \dfrac{dy}{dt} = 0, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\omega\left(\sin\lambda \dfrac{dx}{dt} - \cos\lambda \dfrac{dz}{dt}\right) = 0, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} + 2\omega \cos\lambda \dfrac{dy}{dt} = g. \end{cases}$$

L'origine O étant la position initiale du mobile, x, y, z sont nuls pour $t = 0$; soient a, b, c les composantes de la vitesse relative initiale. On a, par une première intégration,

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - 2\omega \sin\lambda \cdot y = a, \\ \dfrac{dy}{dt} + 2\omega(x \sin\lambda - z\cos\lambda) = b, \\ \dfrac{dz}{dt} + 2\omega \cos\lambda \cdot y = gt + c. \end{cases}$$

Eliminant dy entre la première et la troisième équation (2), intégrant et posant $a \cos\lambda + c \sin\lambda = c_1$, on a ensuite

$$\frac{dx}{dt}\cos\lambda + \frac{dz}{dt}\sin\lambda = gt\sin\lambda + c_1,$$

et en intégrant de nouveau

$$(4) \qquad x\cos\lambda + z\sin\lambda = \frac{gt^2}{2}\sin\lambda + c_1 t.$$

Si, dans la deuxième équation (2), on met pour dx et dz leurs valeurs tirées des équations (3), il vient, après des réductions faciles,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\omega^2 y = 2\omega(gt\cos\lambda - a_1),$$

a_1 désignant la quantité $a \sin\lambda - c\cos\lambda$.

L'intégrale de cette équation s'obtient immédiatement (Cours d'Analyse, 422), et l'on a

$$y = A\cos 2\omega t + B\sin 2\omega t + \frac{g\cos\lambda}{2\omega}t - \frac{a_1}{2\omega};$$

les constantes A, B, déterminées par les valeurs initiales $y = 0$, $v'_y = b$, sont respectivement

$$A = \frac{a_1}{2\omega}, \quad B = \frac{1}{2\omega}\left(b - \frac{g\cos\lambda}{2\omega}\right).$$

Pour abréger, nous les représenterons par $G\sin\alpha$, $G\cos\alpha$, G et α étant faciles à évaluer, et nous aurons

$$(5) \qquad y = \frac{g\cos\lambda}{2\omega}t - G\sin\alpha + G\sin(2\omega t + \alpha),$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g\cos\lambda}{2\omega} + 2\omega G\cos(2\omega t + \alpha);$$

cette dernière valeur, substituée dans la deuxième des équations (3), donne

$$x\sin\lambda - z\cos\lambda = \frac{b}{2\omega} - \frac{g\cos\lambda}{4\omega^2} - G\cos(2\omega t + \alpha),$$

ou

$$(6) \qquad x\sin\lambda - z\cos\lambda = G\cos\alpha - G\cos(2\omega t + \alpha).$$

225. Les équations (4), (5), (6) donnent la solution du problème; elles conduisent à des conséquences fort curieuses que nous n'indiquerons pas ici, nous bornant à examiner le cas où, la vitesse initiale étant nulle, on néglige en outre dans les résultats ci-dessus les termes de l'ordre du carré de la vitesse angulaire ω. On fait donc

$$a = 0, b = 0, c = 0, \text{ d'où } a_1 = 0, c_1 = 0, G\sin\alpha = 0, G\cos\alpha = -\frac{g\cos\lambda}{4\omega^2},$$

d'où enfin

$$G = \frac{g\cos\lambda}{4\omega^2}, \quad \alpha = \pi.$$

Substituant dans les équations (4), (5), (6), développant $1 - \cos 2\omega t$, $\sin 2\omega t$ suivant les puissances ascendantes de $2\omega t$, et négligeant après la substitution les termes qui renferment ω^2 en facteur, on obtient les résultats suivants :

$$x\cos\lambda + z\sin\lambda = \frac{gt^2}{2}\sin\lambda,\ y = \frac{g\omega\cos\lambda}{3}t^3,\ x\sin\lambda - z\cos\lambda = -\frac{gt^2}{2}\cos\lambda,$$

d'où enfin

$$x = 0, \quad y = \frac{g\omega\cos\lambda}{3}t^3, \quad z = \frac{gt^2}{2}.$$

Ces équations montrent que *si l'on abandonne un point matériel, sans vitesse initiale, à l'action de la pesanteur, le mobile restera dans un plan normal à la ligne méridienne, en déviant de la verticale vers l'est d'une petite quantité; sa projection sur la verticale aura le même mouvement que si l'on ne tenait pas compte de la rotation de la terre.*

La trajectoire du mobile dans le plan vertical YZ a pour équation

$$y = \frac{2^{\frac{3}{2}}\omega\cos\lambda}{3g^{\frac{1}{2}}}z^{\frac{3}{2}};$$

elle touche la verticale au point de départ. Cette expression de y permet de calculer la déviation correspondant à une hauteur de chute donnée. Dans les expériences faites par M. Reich à l'un des puits de mine de Freiberg, on avait $\lambda = 51°$, $z = 158^m50$, d'où l'on tire $y = 0^m0276$. L'expérience a donné comme moyenne $y = 0^m028$.

Si l'on voulait conserver les termes de l'ordre de ω^2, les équations (4), (5), (6) ne donneraient pas des résultats plus exacts, parce qu'il faudrait aussi tenir compte des variations que la pesanteur éprouve en direction et en intensité, et d'autres quantités comparables à ω^2.

230. *Déviation du pendule libre.* — Comme deuxième exemple, proposons-nous d'étudier le mouvement apparent du pendule à un seul fil, ou, ce qui revient au même, le mouvement d'un point pesant M sur une surface sphérique du rayon l, invariablement liée à la terre. Soit N la tension du fil ou la réaction normale de la surface sphérique, rapportée à l'unité de masse du mobile.

Le point mobile n'étant soumis qu'à l'action de la pesanteur et de la tension N, il nous suffira, d'après la remarque faite à la fin du n° **228**, d'ajouter aux composantes de la pesanteur, dans les équations (2), les composantes de la réaction du fil. L'origine O étant au point de suspension du fil, les directions des axes OX, OY, OZ choisies comme précé-

demment, les composantes de la réaction du fil sont

$$-\frac{Nx}{l}, \quad -\frac{Ny}{l}, \quad -\frac{Nz}{l}.$$

Portant ces valeurs dans les équations (2) et posant pour abréger

$$k = \omega \sin \lambda, \quad k' = \omega \cos \lambda,$$

on trouvera

$$(7) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} - 2k\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{Nx}{l} = 0, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + 2k\dfrac{dx}{dt} - 2k'\dfrac{dz}{dt} + \dfrac{Ny}{l} = 0, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} + 2k'\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{Nz}{l} = g. \end{cases}$$

Ces équations, jointes à la relation $x^2 + y^2 + z^2 = l^2$, déterminent x, y, z, N en fonction du temps et font connaître le mouvement apparent du pendule. Nous ne bornerons ici au cas où, supposant les oscillations très petites ou le pendule s'écartant toujours très peu de la verticale, on regarde les rapports $x : l$, $y : l$ comme des quantités du premier ordre dont on néglige les carrés, ainsi que les produits par k, k' qui sont de l'ordre de ω. Nous aurons, dans cet ordre d'approximation,

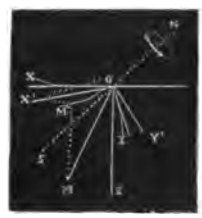


Fig. 113.

$$\frac{z}{l} = \left(1 - \frac{x^2}{l^2} - \frac{y^2}{l^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\frac{x^2 + y^2}{l^2} = 1, \quad z = l,$$

et par conséquent $dz = 0$, $d^2z = 0$. La troisième équation (7) donne alors

$$N = g - 2k'\frac{dy}{dt},$$

d'où

$$\frac{Nx}{l} = \frac{gx}{l} - 2k'\frac{x}{l}\frac{dy}{dt} = \frac{gx}{l}, \quad \frac{Ny}{l} = \frac{gy}{l}.$$

Substituons dans les relations (7); il viendra

$$(8) \quad \frac{d^2x}{dt^2} - 2k\frac{dy}{dt} + \frac{gx}{l} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + 2k\frac{dx}{dt} + \frac{gy}{l} = 0.$$

Ces équations suffisent pour déterminer le mouvement de la projection M' du point M sur le plan XY (fig. 113). Pour les intégrer, nous poserons

$g : l = k^2$, nous multiplierons la seconde équation par $i = \sqrt{-1}$, et ajoutant nous aurons

$$\frac{d^2(x+yi)}{dt^2} + 2ki\frac{d(x+yi)}{dt} + h^2(x+yi) = 0.$$

On vérifie cette équation par une expression de la forme

$$x + yi = e^{irt},$$

si r satisfait à l'équation

$$r^2 + 2kr - h^2 = 0, \quad \text{d'où} \quad r = -k \pm \sqrt{h^2+k^2} = -k \pm h,$$

k^2 étant de l'ordre de ω^2. On a donc

$$x + yi = C_1e^{-(k+h)it} + C_2e^{-(k-h)it},$$

les constantes C_1, C_2 étant déterminées par les données initiales. Supposons que la vitesse initiale soit nulle ; de plus, posons

$$x_0 + y_0i = \rho_0 e^{\psi_0 i},$$

ρ_0 et ψ_0 étant des constantes connues. On trouve sans peine

$$C_1 + C_2 = \rho_0 e^{\psi_0 i}, \quad C_1 - C_2 = -\frac{k}{h}\rho_0 e^{\psi_0 i},$$

d'où enfin

$$x + yi = \frac{\rho_0 e^{(\psi_0 - kt)i}}{2h}\left[(h-k)e^{-iht} + (h+k)e^{iht}\right],$$

ou

$$x + yi = \frac{\rho_0}{h}e^{(\psi_0 - kt)i}(h\cos ht + ki\sin ht).$$

D'après cela, si nous posons encore

$$\alpha = \psi_0 - kt, \quad x' = \frac{\rho_0}{h}h\cos ht, \quad y' = \frac{\rho_0}{h}k\sin ht,$$

il viendra

$$x + yi = e^{\alpha i}(x' + y'i),$$

d'où

$$(9) \qquad x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \quad y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.$$

Ces équations (9) montrent que x', y' sont les coordonnées du point M' par rapport à un système d'axes rectangulaires X'OY' faisant avec le système primitif XOY un angle α dans le sens de OX vers OY ; et à cause de $\alpha = \psi_0 - kt$, on voit 1° que ce système X'OY' tourne autour

de la verticale OZ avec une vitesse angulaire constante $-k = -\omega \sin \lambda$, donc, dans le sens de OY vers OX, c'est à dire *en allant de l'est vers le sud;* 2° que pour $t = 0$, $\alpha = \psi_0$, donc la position initiale de OX′ coïncide avec la projection du pendule sur le plan XY à l'instant $t = 0$.

Les valeur de x', y' en fonction de t déterminent le mouvement de la projection M′ par rapport à ce deuxième système de comparaison X′OY′. Ce mouvement est périodique, la durée de la période étant

$$T = \frac{2\pi}{h} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}};$$

elle est donc précisément la même que celle de l'oscillation complète du pendule simple de longueur l dans le plan vertical (**157**). L'équation de la trajectoire relative du point M′ par rapport à X′OY′ s'obtient par l'élimination de t entre les valeurs de x', y'; on trouve

$$\frac{x'^2}{h^2} + \frac{y'^2}{k^2} = \frac{\rho_0^2}{h^2}.$$

C'est une ellipse dont les demi-axes, dirigés suivant OX′, OY′, sont respectivement égaux à ρ_0, $\rho_0 k : h$. Le second axe est très petit par rapport au premier, à cause de la petitesse du rapport $k : h$. On conclut de là que *dans le mouvement apparent du pendule libre à la surface de la terre, la projection horizontale du point pesant décrit une ellipse mobile très allongée, dont le grand axe* OX′ *tourne autour de la verticale du point de suspension, en allant de l'est vers le sud, avec une vitesse angulaire constante, égale à celle de la rotation terrestre multipliée par le sinus de la latitude du lieu d'observation.*

L'ellipse que décrit le point M′ étant très allongée dans le sens de l'axe OX′, ce point ne semble guère s'écarter de l'axe, et le pendule paraît décrire un plan mobile, qui tourne autour de la verticale avec la vitesse angulaire $\omega \sin \lambda$. C'est ce phénomène de la déviation du plan d'oscillation du pendule libre que L. Foucault a mis en évidence au Panthéon de Paris. On avait alors

$$\lambda = 48°58'; \quad l = 64^{m}.$$

La durée d'une rotation complète du plan d'oscillation, calculée d'après ces données, était de $41^{h}47^{m}$, ce que l'expérience a confirmé (1).

(1) Parmi les nombreux travaux sur le pendule de Foucault, nous citerons la thèse de M. le Cte de Sparre.

Exercices.

1. Mouvement apparent à la surface de la terre d'un point pesant assujetti à se mouvoir sur un plan horizontal. Sa trajectoire.

R. L'origine étant au point de départ, les axes mobiles comme au n° **224**; a, b les composantes de la vitesse initiale. Les équations donnent

$$\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}=a^2+b^2, \qquad (x^2+y^2)\,\omega\sin\lambda+ay-bx=0.$$

La vitesse est constante; la trajectoire est un cercle dont le rayon est $\sqrt{a^2+b^2}:2\omega\sin\lambda$. A la latitude de Paris, la vitesse initiale étant 1, le rayon du cercle est 9132^m.

2. Déduire, des équations du n° **224**, les propriétés suivantes du mouvement d'un point libre à la surface de la terre : 1° La vitesse initiale étant verticale de bas en haut, la hauteur d'ascension h est la même que si la terre était immobile; la déviation de la verticale est vers l'ouest, et quadruple de ce qu'elle serait pour une hauteur de chûte h sans vitesse initiale; 2° La vitesse initiale v_0 étant perpendiculaire au plan du méridien, et faisant un angle α avec l'horizontale vers l'est, le mobile dévie vers le nord si α est aigu, vers le sud si α est obtus.

3. Un cercle tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour de son diamètre vertical qui est fixe. Trouver le mouvement d'un point matériel pesant M assujetti à rester sur ce cercle; déterminer la position d'équilibre relatif du point.

R. Soient a le rayon du cercle, θ l'angle compris entre le diamètre vertical et le rayon mené du centre du cercle au point mobile M. En projetant, sur la tangente au cercle en M, la force motrice et les accélérations relative, d'entraînement, etc., on obtient immédiatement l'équation

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=\omega\sin\theta\cos\theta-\frac{g}{a}\sin\theta.$$

On en déduit, pour la position d'équilibre relatif,

$$\cos\theta_1=\frac{g}{a\omega^2}, \quad \frac{g}{a\omega^2}<1.$$

Une première intégration de l'équation ci-dessus donne la relation

$$\frac{d\theta^2}{dt^2}=\frac{2g}{a}\cos\theta+\omega^2\sin^2\theta+C,$$

qu'on tire aussi du théorème de la force vive dans le mouvement relatif. Désignant par θ_0 la valeur de θ pour laquelle la vitesse du point devient nulle, on a

$$\frac{d\theta^2}{dt^2}=\omega^2(\cos\theta-\cos\theta_0)\left[\frac{2g}{a\omega^2}-(\cos\theta+\cos\theta_0)\right].$$

Si l'on suppose $\theta_0>\theta_1$, on a toujours $\theta<\theta_0$; le mobile descend sur le cercle, atteint sa vitesse angulaire maximum $\omega(\cos\theta_1-\cos\theta_0)$ pour $\theta=\theta_1$, s'arrête lorsque θ atteint la valeur θ' telle que $\cos\theta'=2\cos\theta_1-\cos\theta_0$; puis repart en sens contraire, et oscille ainsi de part et d'autre de la position $\theta=\theta_1$.

§ 2. DU MOUVEMENT RELATIF D'UN SYSTÈME MATÉRIEL.

227. Le problème du mouvement relatif d'un système matériel rapporté à un système de comparaison mobile se ramène aux formules du mouvement absolu par le théorème énoncé à la fin du n° **222**. Ainsi, l'on voit sans peine que le théorème du mouvement du centre de gravité, le théorème des moments et les équations (3), (5), (7) du chapitre XIII, § 1, qui expriment ces propriétés générales du mouvement, subsistent complétement si l'on introduit dans les énoncés, au lieu des mouvements absolus, les mouvements rapportés au système des axes mobiles, pourvu que l'on joigne en chaque point, aux forces extérieures qui le sollicitent, sa réaction d'entraînement et sa force centrifuge composée.

Le même raisonnement est applicable aux théorèmes des forces vives et de l'énergie, avec ces remarques importantes : 1° Le travail des forces intérieures, défini par la variation de la fonction Π (**179**) qui dépend seulement des distances entre les points, a la même expression et la même valeur dans le mouvement absolu et dans le mouvement relatif; 2° La force centrifuge composée d'un point étant constamment normale à la direction de la vitesse relative de ce point, son travail pendant un temps quelconque, dans le mouvement relatif, est égal à zéro. On ne tiendra donc pas compte de cette force dans l'équation du travail.

Sans développer comme conséquences de ces principes les formules analytiques du mouvement relatif, nous allons simplement en présenter deux applications remarquables.

228. *Force vive d'un système animé de mouvements vibratoires.* — On a souvent à appliquer le théorème des forces vives à des corps solides dont tous les points sont, ou peuvent être animés de mouvements vibratoires extrêmement petits autour de certaines positions moyennes, indépendamment du mouvement d'ensemble dont le corps est animé sous l'action des forces extérieures, comprenant les réactions des obstacles fixes qui gênent le mouvement du corps. Ces vibrations, le plus souvent insaisissables à nos yeux, doivent cependant représenter une force vive très considérable, et si l'on applique le théorème des forces vives au système sans en tenir compte, on néglige une quantité dont il est nécessaire d'évaluer l'importance.

Pour cela, rapportons les petits mouvements des points matériels du corps à un système de comparaison invariable, qui ne sera autre chose que le *solide* formé des positions *moyennes* de ces points. Soient, à un instant quelconque, v la vitesse totale d'un point m, v' sa vitesse relative, due à la vibration autour de la position moyenne, v'' sa vitesse d'entraînement, due au mouvement du solide moyen. Comme le point m est supposé s'écarter toujours excessivement peu de sa position moyenne, on peut sans erreur sensible regarder v'' comme égal à la vitesse de la position moyenne du point m. La vitesse v étant résultante de v', v'', on a

$$v^2 = v'^2 + v''^2 + 2v'v'' \cos \overline{v'v''},$$

d'où, en posant

$$T = \frac{1}{2} \Sigma m v^2, \quad T' = \frac{1}{2} \Sigma m v'^2, \quad T'' = \frac{1}{2} \Sigma m v''^2,$$

(1) $$T = T' + T'' + \Sigma m v'v'' \cos \overline{v'v''}.$$

D'autre part, le théorème des forces vives appliqué au mouvement absolu nous donne

$$dT = \Sigma F_e v \cos \overline{F_e v}\, dt - d\Pi,$$

F_e, Π ayant les mêmes significations qu'au chapitre XIII, § 2. Ce même théorème, appliqué au mouvement relatif, nous donne, eu égard aux remarques ci-dessus (**237**),

$$dT' = \Sigma F_e v' \cos \overline{F_e v'}\, dt - d\Pi - \Sigma \varphi v' \cos \overline{\varphi v'}\, dt,$$

φ désignant la force d'entraînement du point m. Soustrayant membre à membre, ayant égard à l'équation (1) différentiée, et observant que l'on a

$$v \cos \overline{F_e v} - v' \cos \overline{F_e v'} = v'' \cos \overline{F_e v''},$$

puisque v est la résultante de v' et de v'', on trouve

$$dT'' + d.\Sigma m v'v'' \cos \overline{v'v''} = \Sigma F_e v'' \cos \overline{F_e v''}\, dt + \Sigma \varphi v' \cos \overline{\varphi v'}\, dt.$$

Or, en projection sur trois axes *fixes* OX, OY, OZ, on a

$$\varphi_x = m \frac{dv''_x}{dt}, \quad \varphi_y = m \frac{dv''_y}{dt}, \quad \varphi_z = m \frac{dv''_z}{dt},$$

d'où

$$\varphi v' \cos \overline{\varphi v'}\, dt = (\varphi_x v'_x + \cdots)\, dt = m \left(v'_x \frac{dv''_x}{dt} + \cdots \right) dt$$

$$= m d(v'_x v''_x + \cdots) - m (v''_x dv'_x + \cdots) = d.mv'v'' \cos \overline{v'v''} - m(v''_x dv'_x + \cdots).$$

Substituant dans l'équation ci-dessus, on aura

$$dT'' = \Sigma F_e v'' \cos \overline{F_e v''}\, dt - \Sigma m\,(v''_x\, dv'_x + v''_y\, dv'_y + v''_z\, dv'_z).$$

D'où enfin, intégrant et désignant par $\mathcal{T}''$ le travail d'une force dans le mouvement d'entraînement, par H une constante, on a

$$(2) \qquad \frac{1}{2}\Sigma m v''^2 = \Sigma \mathcal{T}'' F_e - \Sigma m \int (v''_x\, dv'_x + v''_y\, dv'_y + v''_z\, dv'_z) + H.$$

Lorsqu'on applique l'équation des forces vives au corps solide sans se préoccuper des petites vibrations de ses points matériels, on ne fait, en somme, qu'écrire l'équation

$$(3) \qquad \frac{1}{2}\Sigma m v''^2 = \Sigma \mathcal{T}'' F_e + H.$$

L'erreur commise dans cette substitution est donc mesurée par le terme

$$-\Sigma m \int (v''_x\, dv'_x + v''_y\, dv'_y + v''_z\, dv'_z).$$

Comme la vitesse v' varie généralement beaucoup plus rapidement que v'', et se rapporte à un mouvement *périodique* tel que, dans un très court intervalle de temps pendant lequel v'' reste quasi constant de grandeur et de direction, la vitesse v' passe par des valeurs deux-à-deux égales, parallèles et de sens contraire, on a sensiblement pour chacune de ces périodes

$$\int (v''_x\, dv'_x + v''_y\, dv'_y + v''_z\, dv'_z) = 0,$$

et l'on voit qu'alors l'équation (2) peut, sans inconvénient, être remplacée par l'équation (3).

229. *Mouvement relatif du gyroscope à la surface de la terre.* — Étudions maintenant le mouvement relatif, à la surface de la terre, d'un solide de révolution fixé par son centre de gravité et animé d'une vitesse de rotation très grande autour de son axe de figure. Soit OXYZ (fig. 114) un système d'axes fixes par rapport à la terre, l'origine O étant au point fixe du tore; $O\zeta$ l'axe de figure, θ l'angle qui fait $O\zeta$ avec l'axe fixe OZ; $O\xi$, $O\eta$ deux autres axes perpendiculaires à $O\zeta$, et liés au solide;

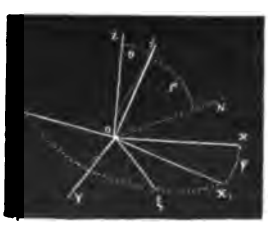


Fig. 114.

p, q, r les composantes de la rotation relative suivant les axes mobiles $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$; p_1, q_1, r_1 les composantes, suivant les mêmes axes, de la

rotation du système de comparaison OXYZ; ω la vitesse angulaire de la rotation terrestre; μ l'angle ζON de l'axe du tore avec la parallèle ON à l'axe boréal menée par le point O. Enfin, C, A sont les moments d'inertie du solide par rapport à Oζ et à une perpendiculaire à Oζ passant par le point O.

Le mouvement *absolu* du tore autour de son centre de gravité est dû à l'attraction terrestre et à la réaction du point d'appui O (227). Or, les forces centrifuges dues à la rotation de la terre étant sensiblement égales et parallèles pour tous les points du corps, donnent une résultante passant par son centre de gravité O; et comme la pesanteur, résultante de l'attraction et de la force centrifuge, se réduit aussi à une force passant par le point O, il est clair que la résultante des attractions terrestres passe par le centre de gravité O. On voit par là que, dans le mouvement absolu du tore, la somme des moments des forces extérieures par rapport à l'axe de figure Oζ est nulle à chaque instant, et la troisième équation d'Euler donne, la vitesse angulaire de la rotation absolue autour de Oζ étant $r + r_1$,

$$C\frac{d(r+r_1)}{dt} = 0, \quad r + r_1 = \text{const.},$$

ou, comme $r_1 = -\omega \cos \mu$,

$$r = \omega \cos \mu + \text{const.}$$

Soient n, μ_0 les valeurs initiales de r et de μ; il vient

$$(4) \qquad r = n + \omega(\cos \mu - \cos \mu_0).$$

Appliquons le théorème des forces vives dans le mouvement relatif. Les forces absolues et les réactions d'entraînement donnent une résultante, qui est le poids du tore, passant par le point fixe O; son travail relatif est nul. Le travail des forces centrifuges composées est toujours nul, comme on sait; donc la force vive totale du solide dans son mouvement relatif est constante. Donc

$$A(p^2 + q^2) + Cr^2 = A(p_0^2 + q_0^2) + Cn^2.$$

Remplaçons p, q par leurs valeurs en fonction des angles θ, ψ (201); r par sa valeur (4), et négligeons les termes en ω^2. Nous aurons

$$(5) \qquad A(\theta'^2 + \psi'^2 \sin^2 \theta) = 2Cn\omega(\cos \mu_0 - \cos \mu) + A(p_0^2 + q_0^2).$$

Enfin, exprimons que la somme des moments des forces extérieures

par rapport à ON, qui est une direction invariable dans l'espace, étant constamment nulle, la projection de l'axe du couple résultant des quantités de mouvement *absolues* sur ON est invariable.

Les projections de cet axe sur $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ étant respectivement

$$A(p+p_1),\quad A(q+q_1),\quad C(r+r_1),$$

on a

$$A(p+p_1)\cos\overline{N\xi}+A(q+q_1)\cos\overline{N\eta}+C(r+r_1)\cos\overline{N\zeta}=\text{const.}$$

Comme nous pouvons choisir à volonté les axes $O\xi$, $O\eta$ dans le plan normal à $O\zeta$, il est permis de considérer, à un instant donné, $O\xi$ comme coïncidant avec la projection de ON sur ce plan de l'équateur du tore. On aura ainsi

$$\cos\overline{N\xi}=\sin\mu,\quad \cos\overline{N\eta}=0,\quad \cos\overline{N\zeta}=\cos\mu,$$

et en substituant ces valeurs, observant que l'on a aussi

$$p_1=-\omega\cos\overline{N\xi}=-\omega\sin\mu,\quad q_1=0,\quad r_1=-\omega\cos\mu,$$

l'équation des moments relatifs à ON deviendra

$$A(p-\omega\sin\mu)\sin\mu+C(r-\omega\cos\mu)\cos\mu=\text{const.},$$

ou, à cause de l'équation (4),

$$A(p-\omega\sin\mu)\sin\mu+C(n-\omega\cos\mu_0)\cos\mu=\text{const.}$$

Déterminons la constante en faisant $t=0$. Il vient

$$A(p\sin\mu-p_0\sin\mu_0)+A\omega(\sin^2\mu_0-\sin^2\mu)+C(n-\omega\cos\mu_0)(\cos\mu-\cos\mu_0)=0,$$

d'où enfin

$$(6)\qquad A(p\sin\mu-p_0\sin\mu_0)=(\cos\mu_0-\cos\mu)[A\omega(\cos\mu_0+\cos\mu)+C(n-\omega\cos\mu_0)].$$

Les équations (4), (5), (6) renferment la solution du problème.

240. Le *gyroscope* de Foucault consiste en un tore en bronze dont l'axe est monté sur une double suspension qui assure la liberté de tous les mouvements autour du centre de gravité, et auquel un mécanisme de roues dentées permet d'imprimer une rotation excessivement rapide autour de son axe de figure. La première expérience de Foucault consiste à donner à l'axe une direction fixe, à imprimer la rotation, puis à laisser l'axe entièrement libre. On a, dans ce cas, $p_0=0$, $q_0=0$, et n a une valeur très grande. On peut donc, dans l'équation (6), négliger les termes renfermant le facteur ω, qui est très petit, vis-à-vis des

termes en n. Les équations (5) et (6) se réduisent, dans ces conditions, à

$$(7)\quad \left\{ \begin{array}{l} A(\theta'^2 + \psi'^2 \sin^2\theta) = 2Cn\omega(\cos\mu_0 - \cos\mu), \\ Ap\sin\mu = Cn(\cos\mu_0 - \cos\mu). \end{array} \right.$$

Ensuite, pouvant placer comme nous voulons le système de comparaison OXYZ, nous prendrons l'axe OZ dirigé vers le pôle boréal, suivant ON ; nous aurons donc $\mu = \theta$. De plus, nous savons (**225**) que la composante p de la rotation instantanée du solide suivant OX_1 est égale à $\psi' \sin\theta$. Les équations (7) se réduisent donc à celles-ci, où $\alpha = \theta_0$,

$$(8)\quad \left\{ \begin{array}{l} A(\theta'^2 + \psi'^2 \sin^2\theta) = 2Cn\omega(\cos\alpha - \cos\theta), \\ A(\sin^2\theta \cdot \psi' = Cn(\cos\alpha - \cos\theta), \end{array} \right.$$

qui déterminent les angles θ et ψ en fonction du temps.

Elles suffisent pour représenter le mouvement de l'axe du tore, car on reconnaît facilement leur identité avec les équations (13) du n° **220**, qui se rapportent au mouvement d'un solide pesant autour d'un point fixe, pourvu que l'on pose la condition

$$Mgl = Cn\omega$$

pour déterminer la masse de ce solide et la distance de son centre de gravité au point fixe. Il en résulte que nous pouvons appliquer au mouvement de l'axe du gyroscope autour de l'axe boréal ON, les lois que nous avons trouvées pour le mouvement de l'axe du corps pesant autour de la verticale, savoir : 1° L'axe $O\zeta$ du gyroscope oscille dans le plan mobile $NO\zeta$, l'angle $\theta = NO\zeta$ variant entre les limites très rapprochées

$$\alpha, \qquad \alpha + \frac{2A\omega \sin\alpha}{Cn},$$

en sorte que l'oscillation est invisible et que l'axe $O\zeta$ paraît décrire un cône de révolution autour de l'axe du monde. La durée de cette oscillation est

$$\frac{2\pi A}{Cn};$$

elle est extrêmement petite et indépendante de ω. 2° Le plan $NO\zeta$ tourne autour de ON, d'un mouvement de *précession*, avec une vitesse angulaire ψ' qui est (**222**)

$$\psi' = \frac{Mgl}{Cn}(1 - \cos 2Et),$$

ou, remplaçant $2E$ par sa valeur et Mgl par $Cn\omega$,

$$\psi' = \omega\left(1 - \cos\frac{Cn}{A}t\right).$$

Si l'on néglige le terme périodique, ou, ce qui revient au même, si l'on considère l'axe moyen du tore au lieu de l'axe vrai, on a

$$\psi' = \omega;$$

la vitesse de précession de l'axe est donc égal à la vitesse de rotation de la terre, et comme ψ' est ici *positif* par rapport à ON, le mouvement de précession se produit de gauche à droite, *ou en sens contraire du mouvement de la terre.* Si donc on suppose que l'axe du tore ait été fixé d'abord dans la direction d'une étoile, il continuera à suivre cette étoile dans son mouvement apparent.

241. Le gyroscope de Foucault se prête à une autre expérience remarquable : en fixant l'un des anneaux de suspension, on peut *obliger l'axe du tore à se mouvoir dans un plan déterminé,* orienté de façon quelconque par rapport à l'axe ON. Les équations du n° **229** permettent d'étudier le mouvement de l'axe $O\zeta$ dans ces conditions.

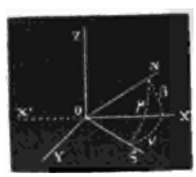


Fig. 115.

Prenons le plan dont il s'agit, qui est fixe par rapport à la terre, pour plan des XY (fig. 115). L'axe OZ lui étant normal, et l'axe $O\zeta$ du tore étant mobile dans le plan XY, on a $\theta = 90°$. Nous prenons OX suivant la projection de ON sur le plan fixe XY; β étant l'angle NOX compris entre l'axe terrestre et le plan fixe, ν l'angle $XO\zeta$ de l'axe du tore avec OX, nous avons évidemment

$$\cos\mu = \cos\beta\cos\nu.$$

On doit joindre ici aux forces extérieures qui agissent sur le tore la réaction normale du plan XY, qu'on supposera appliquée en un point quelconque de l'axe $O\zeta$. Le moment de cette réaction par rapport à $O\zeta$ est nul à chaque instant; le travail de cette force dans le mouvement relatif de l'axe est nul également, puisqu'elle est normale au plan décrit par $O\zeta$; les équations (4) et (5) subsistent sans changement, et l'on a, p_0 et q_0 étant toujours supposés nuls,

$$r = n + \omega(\cos\mu - \cos\mu_0), \quad A(\theta'^2 + \psi'^2\sin^2\theta) = 2Cn\omega(\cos\mu_0 - \cos\mu).$$

Mais, à cause de $\theta = 90°$, $\theta' = 0$, de la valeur de $\cos\mu$ et de la

relation évidente $\psi = 90° + \nu$, la seconde de ces équations se réduit à

$$A\nu'^2 = 2Cn\omega \cos\beta(\cos\nu_0 - \cos\nu),$$

ou

$$\frac{d\nu^2}{dt^2} = \frac{2Cn\omega\cos\beta}{A}(\cos\nu_0 - \cos\nu).$$

Supposons, pour plus de clarté, $n > 0$, la rotation initiale ayant lieu de gauche à droite autour de $O\zeta$. Si l'on remplace ν par $\pi - \nu$, et si l'on pose

$$\frac{g}{l} = \frac{Cn\omega\cos\beta}{A}, \quad \text{ou} \quad l = \frac{Ag}{Cn\omega\cos\beta},$$

l'équation précédente devient identique avec celle du mouvement d'un pendule simple de longueur l (**156**), la pesanteur étant dirigée suivant le prolongement OX' de OX, ou suivant la projection sur XY de la partie australe de l'axe terrestre. On conclut de là que

L'axe $O\zeta$ du tore exécutera des oscillations dans le plan fixe XY *de part et d'autre de la projection sur* XY *de la partie australe de l'axe du monde, qui est sa position d'équilibre. La durée d'une oscillation complète de l'axe $O\zeta$ sera*

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{A}{Cn\omega\cos\beta}}.$$

Si le sens de la rotation initiale était changé, n serait négatif, OX serait la position d'équilibre et l'axe $O\zeta$ oscillerait de part et d'autre de OX.

Quand le plan XY est horizontal, on a $\beta = \lambda$, λ étant la latitude du lieu O; le mouvement de l'axe du tore est celui d'une aiguille magnétique de déclinaison écartée de sa position d'équilibre. — Quand le plan XY est celui du méridien, on a $\beta = 0$, la position d'équilibre de $O\zeta$ coïncide avec l'axe du monde. On voit comment, en l'absence de tout instrument astronomique, le gyroscope suffit pour déterminer la direction de la méridienne et la latitude pour un lieu donné.

Toutes ces conséquences du calcul ont été vérifiées dans les expériences de L. Foucault.

Exercice.

Un anneau circulaire infiniment mince et homogène, de masse m, peut tourner librement autour d'un diamètre horizontal AA' (fig. 116), qui est fixé en son milieu à un axe vertical BB' autour duquel le système tourne avec une vitesse angulaire constante ω. Par suite de ce mouvement, l'anneau tend à se placer dans le plan horizontal, mais une masse M, fixée à l'extrémité C d'un diamètre perpendiculaire à AA', s'y oppose. Déterminer 1° la vitesse angulaire de l'anneau autour de l'horizontale AA'; 2° l'inclinaison pour laquelle l'équilibre relatif aurait lieu; 3° discuter le mouvement de l'anneau, soit quand la masse M est nulle, soit lorsqu'elle a une valeur donnée.



Fig. 116.

R. Appelons a le rayon de l'anneau, θ l'angle que fait avec la verticale OB le prolongement du rayon OC; rapportons le mouvement de l'anneau à un système de comparaison OXYZ, OZ coïncidant avec OB, OX avec la charnière OA, OY perpendiculaire aux deux autres. Appliquant le théorème des forces vives au mouvement relatif du solide composé de l'anneau et de la masse M, on trouve d'abord pour la force vive relative

$$\left(M+\frac{m}{2}\right)a^2\frac{d\theta^2}{dt^2}.$$

Les forces extérieures se réduisent au poids Mg, dont le travail élémentaire relatif est $Mga\ d.\cos\theta$. Le travail des forces centrifuges de tous les points dues à la rotation du système autour de BB' s'obtient en observant que, pour un point μ de l'anneau, à la distance r de l'axe, la force centrifuge est $\mu\omega^2 r$; l'arc élémentaire qu'il décrit dans le mouvement relatif est $a \sin\zeta\, d\theta$ (ζ étant l'angle que fait le rayon $O\mu$ avec OX); le cosinus de l'angle compris est

$$\frac{a\sin\zeta\sin\theta\cos\theta}{r}.$$

On obtient ainsi, pour la somme des travaux élémentaires des forces centrifuges,

$$\left(M+\frac{m}{2}\right)a^2\omega^2\sin\theta\cos\theta\, d\theta.$$

L'équation des forces vives relatives donne

$$\left(M+\frac{m}{2}\right)a^2\frac{d\theta^2}{dt^2}=2Mga\cos\theta+\left(M+\frac{m}{2}\right)a^2\omega^2\sin^2\theta+\text{const.},$$

ou, en divisant par $\left(M+\frac{m}{2}\right)a^2$ et posant $l=\frac{(2M+m)a}{2M}$,

$$\frac{d\theta^2}{dt^2}=\frac{2g}{l}\cos\theta+\omega^2\sin^2\theta+C. \tag{1}$$

Pour l'équilibre relatif, il faut que $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ soit nul; on trouve 1° $\theta = 0$, OC est vertical; 2° $\cos\theta = \frac{g}{l\omega^2}$. Si cette quantité est < 1, l'angle θ_1, déterminé par cette équation correspondra à une position d'équilibre relatif.

La masse M étant enlevée, $l = \infty$, et l'équation (1) devient, θ_0 désignant la valeur de θ pour laquelle $\frac{d\theta}{dt}$ est nul,

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = \omega^2 (\sin^2\theta - \sin^2\theta_0),$$

d'où

$$t = \frac{1}{\omega}\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\theta - \sin^2\theta_0}}.$$

Mouvement pendulaire à discuter.

Dans le cas général de M quelconque, l'équation (1) est la même que celle de l'exercice 3 du § précédent; nous y renvoyons pour la discussion.

CHAPITRE XVII.

ÉQUATION GÉNÉRALE DE LA DYNAMIQUE.

242. Les théorèmes généraux sur lesquels nous avons fondé l'étude du mouvement des solides s'appliquent à des systèmes matériels quelconques, mais ne suffisent plus, en général, pour obtenir toutes les équations différentielles nécessaires à la détermination de leur mouvement. Nous allons exposer un principe général qui, combiné avec l'équation des vitesses virtuelles, conduit dans tous les cas à des équations en nombre suffisant.

Considérons, à un instant donné, un système quelconque des points matériels, sollicités par des forces extérieures ou intérieures données et se mouvant sous l'influence de ces forces et des liaisons ou conditions quelconques auxquelles le système est assujetti. Soit M un point du système, Q la force *conservée* de ce point (**152**), P la résultante des forces qui lui sont directement appliquées. Il est clair que nous ne changeons absolument rien, ni au mouvement du système, ni aux réactions que ses points exercent les uns sur les autres, si nous appliquons au point M la force Q en même temps qu'une force égale et directement

opposée Q', puisque ces forces se font immédiatement équilibre sur le point M, et si nous répétons la même opération sur chacun des points qui composent le système. Nous pouvons donc raisonner comme si ces forces égales et opposées Q et Q' existaient réellement en chaque point, qui se meut alors sous l'action des forces P, Q, Q' et des réactions produites par des liaisons. Mais, d'après la définition même de la force conservée, chaque point M ayant le mouvement d'un point libre sollicité par la seule force Q, il y a équilibre, autour de ce point, entre les forces P, Q' et les réactions des liaisons; la même chose a lieu pour tous les points du système, donc l'ensemble du système est en équilibre, en vertu des liaisons telles qu'elles existent à ce moment là, entre les forces P et Q' agissant en chacun de ses points, et comme cet équilibre est indépendant de l'état de repos ou de mouvement du système, on peut énoncer ce principe :

Dans un système quelconque de points matériels en mouvement, à chaque instant, il y a équilibre en vertu des liaisons telles qu'elles existent à cet instant, entre les forces motrices appliquées au système, et les forces conservées de tous les points qui le composent, prises en sens contraire.

C'est en cela que consiste le *principe de d'Alembert,* dont l'utilité résulte de ce qu'il ramène immédiatement la théorie du mouvement des systèmes à celle de leur équilibre, et fournit une équation générale pour les problèmes de dynamique.

242. Supposons, en effet, que le système considéré soit un de ceux auxquels le principe des vitesses virtuelles est applicable. En vertu de ce principe, les forces Q et Q' ayant évidemment des travaux virtuels égaux et de signes contraires, il faut qu'à chaque instant la somme des travaux virtuels des forces appliquées, moins la somme des travaux virtuels des forces conservées, soit nulle pour tout déplacement compatible avec les liaisons telles qu'elles existent à cet instant. De là l'équation

$$(1) \qquad \Sigma P\delta s \cos \overline{P, \delta s} - \Sigma Q\delta s \cos \overline{Q, \delta s} = 0,$$

le signe Σ s'étendant à tous les points matériels du système. Ou encore, si m désigne la masse, x, y, z les coordonnées rectangles du point M; X, Y, Z les composantes de la force P qui agit sur lui, celles de la force détruite par les liaisons sont

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y - m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad Z - m\frac{d^2z}{dt^2},$$

et l'équation qui résulte du principe des vitesses virtuelles sera (68)

$$(2)\ \Sigma\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] = 0.$$

Telle est l'équation générale de la dynamique. Pour voir comment elle conduit aux équations différentielles du mouvement, admettons que les liaisons existant entre les n points du système soient exprimées par des équations

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \ldots.$$

qui renferment, en général, les $3n$ coordonnées $x, y, z, x_1, y_1, z_1, \ldots$ de ces points, et le temps t. Ces équations en nombre k devant être vérifiées pour chacun des déplacements virtuels auxquels s'applique l'équation (2), les variations $\delta x, \delta y, \delta z, \delta x_1, \ldots$ devront satisfaire aux relations suivantes :

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}\delta x + \dfrac{\partial L}{\partial y}\delta y + \dfrac{\partial L}{\partial z}\delta z + \dfrac{\partial L}{\partial x_1}\delta x_1 + \cdots = 0, \\ \dfrac{\partial M}{\partial x}\delta x + \dfrac{\partial M}{\partial y}\delta y + \dfrac{\partial M}{\partial z}\delta z + \dfrac{\partial M}{\partial x_1}\delta x_1 + \cdots = 0, \\ \dfrac{\partial N}{\partial x}\delta x + \dfrac{\partial N}{\partial y}\delta y + \dfrac{\partial N}{\partial z}\delta z + \dfrac{\partial N}{\partial x_1}\delta x_1 + \cdots = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Dans ces différentiations par δ, on observera que t doit être traité comme une constante, puisque le déplacement virtuel se rapporte aux liaisons telles qu'elles existent à l'instant t que l'on considère.

Si, des k équations (3), on tire les valeurs de k variations $\delta x, \delta y, \ldots$ en fonction des autres, et qu'on les substitue dans l'équation (2), on devra égaler à zéro les coefficients de ces $3n - k$ variations restantes, puisqu'elles ne sont plus assujetties à aucune condition et sont arbitraires. On formera ainsi $3n - k$ équations différentielles du second ordre, qui, jointes aux k relations données $L = 0$, $M = 0, \ldots$, suffisent pour la détermination des $3n$ variables inconnues $x, y, z, x_1, \ldots$ en fonction de t. Les constantes arbitraires introduites par l'intégration se détermineront toujours par l'état initial du système.

Il est bon d'observer que les équations $L = 0$, $M = 0, \ldots$ permettant d'éliminer k variables et leurs dérivées secondes par rapport au temps, le système à intégrer se réduit à $3n - k$ équations du second ordre

entre $3n - k$ fonctions, et que le nombre des constantes arbitraires sera, en réalité, $6n - 2k$. D'autre part, si l'on tient compte des relations que ces équations $L = 0$, $M = 0, \ldots$ établissent entre les coordonnées et les composantes des vitesses initiales des points du système, on voit que le nombre de ces quantités que l'on peut se donner arbitrairement se réduit précisément à $6n - 2k$.

244. Comme application de la méthode au mouvement d'un simple point, cherchons *le mouvement d'un point* M *de masse* m, *assujetti à glisser sans frottement sur une courbe qui varie à chaque instant de position et même de forme.*

Soient $F(x, y, z, t) = 0$, $F_1(x, y, z, t) = 0$ les équations de la courbe variable; X, Y, Z les composantes de la force motrice P appliquée au point M; le système (2) et (3) donne ici

$$\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\delta z = 0,$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F_1}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F_1}{\partial z}\delta z = 0,$$

et l'élimination facile de $\delta x, \delta y, \delta z$ entre ces trois équations fournira entre x, y, z et t une équation du deuxième ordre qui, jointe aux deux équations de la courbe variable, déterminera ces fonctions x, y, z.

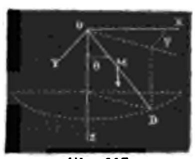


Fig. 117.

Considérons, par exemple, un point pesant M qui glisse sans frottement sur une droite rigide OD (fig. 117), tournant autour de la verticale OZ avec une vitesse angulaire constante ω.

Appelons θ l'angle constant ZOD; ψ l'angle compris entre le plan mobile ZOD et sa position initiale ZOX; r la distance OM. Les équations de la ligne mobile OD peuvent se mettre, à cause de $\psi = \omega t$, sous la forme

$$(\alpha) \quad x = r\sin\theta\cos\omega t, \quad y = r\sin\theta\sin\omega t, \quad z = r\cos\theta.$$

La force motrice a pour composantes $X = 0$, $Y = 0$, $Z = mg$, et l'équation (2) devient

$$\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z - g\delta z = 0.$$

Mais on a

$$\delta x = \sin\theta \cos\omega t\, \delta r, \quad \delta y = \sin\theta \sin\omega t\, \delta r, \quad \delta z = \cos\theta\, \delta r,$$

et, en observant que θ est constant,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \left(\frac{d^2r}{dt^2}\cos\omega t - 2\omega\frac{dr}{dt}\sin\omega t - \omega^2 r\cos\omega t\right)\sin\theta,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \left(\frac{d^2r}{dt^2}\sin\omega t + 2\omega\frac{dr}{dt}\cos\omega t - \omega^2 r\sin\omega t\right)\sin\theta,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\cos\theta;$$

d'où, éliminant les dérivées et les variations de x, y, z,

$$(\beta) \qquad \frac{d^2r}{dt^2} - \omega^2 r \sin^2\theta = g\cos\theta.$$

Cette équation linéaire du second ordre, à coefficients constants, s'intègre immédiatement par les méthodes connues, et donne

$$r = Ae^{\omega t\sin\theta} + Be^{-\omega t\sin\theta} - \frac{g\cos\theta}{\omega^2\sin^2\theta}.$$

Si l'on suppose $r_0 = 0$; si v_0 désigne la vitesse initiale du point sur la droite mobile, les constantes A et B ont pour valeurs

$$A = \frac{g\cos\theta + \omega v_0\sin\theta}{2\omega^2\sin^2\theta}, \quad B = \frac{g\cos\theta - \omega v_0\sin\theta}{2\omega^2\sin^2\theta}.$$

Connaissant r en fontion du temps, on connaît x, y, z et le problème est entièrement résolu.

245. Considérons encore un système de deux points M, M′, pesants, liés par un fil flexible et inextensible, mobiles respectivement sur les côtés latéraux AB, AC (fig. 118) d'un triangle vertical ABC. On néglige tous les frottements.



Fig. 118.

Soient m, m' les masses respectives; x, x' les distances des deux points au sommet A; l la longueur du fil; α, α' les inclinaisons des côtés BA, CA sur l'horizontale BC.

Faisons glisser infiniment peu le système mobile sur le triangle fixe; les travaux virtuels des forces P seront respectivement

$$mg\delta x \sin\alpha, \quad m'g\delta x' \sin\alpha';$$

les travaux virtuels des forces conservées Q seront

$$m\frac{d^2x}{dt^2}\delta x, \quad m'\frac{d^2x'}{dt^2}\delta x',$$

et le principe de d'Alembert fournira l'égalité

$$m\left(g\sin\alpha - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + m'\left(g\sin\alpha' - \frac{d^2x'}{dt^2}\right)\delta x' = 0.$$

Mais la longueur du fil est constante; donc

$$x + x' = l, \quad \delta x + \delta x' = 0, \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2x'}{dt^2} = 0,$$

ce qui permet d'éliminer $\delta x'$ et d^2x' de l'équation ci-dessus, et donne

$$(m + m')\frac{d^2x}{dt^2} - g\,(m\sin\alpha - m'\sin\alpha') = 0.$$

Intégrant cette équation, désignant par x_0, v_0 les valeurs initiales de x et de v pour le point M, on a

$$x = \frac{g\,(m\sin\alpha - m'\sin\alpha')}{m + m'}\frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0.$$

La valeur de x donne celle de $x' = l - x$.

246. Appliquons encore le principe de d'Alembert au mouvement d'un fil flexible et inextensible, dont tous les points sont soumis à l'action de forces données. Les équations de l'équilibre du fil, obtenues aux nos **115-116**, devront être vérifiées, d'après ce principe, si l'on y ajoute aux composantes X, Y, Z de la force motrice, rapportées à l'unité de longueur du fil (**115**), les composantes changées de signe de la force conservée, rapportées aussi à l'unité de longueur. On observera qu'ici les coordonnées x, y, z d'un point M du fil sont fonctions de deux variables *indépendantes*, le temps t et l'arc s qui définit la position du point M sur le fil. Donc, les composantes ci-dessus auront pour expressions

$$\rho\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \quad \rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad \rho\frac{\partial^2 z}{\partial t^2},$$

ρ étant la densité *linéaire* du fil au point (x, y, z).

Donc, en vertu des formules (2) du no **116**, les équations du mou-

vement d'un fil flexible sont

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial s}\left(T\dfrac{\partial x}{\partial s}\right)+X-\rho\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}=0, \\ \dfrac{\partial}{\partial s}\left(T\dfrac{\partial y}{\partial s}\right)+Y-\rho\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0, \\ \dfrac{\partial}{\partial s}\left(T\dfrac{\partial z}{\partial s}\right)+Z-\rho\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}=0. \end{cases}$$

On doit remarquer que ces égalités doivent être vérifiées en chacun des points du fil, mais qu'il faudra connaître en outre les conditions auxquelles sont assujetties les extrémités du fil, pour que le mouvement soit entièrement déterminé.

247. Revenons au problème général. Parmi les méthodes que l'on peut employer pour éliminer, entre les équations (2) et (3), les variations $\delta x, \delta y, \delta z, \delta x_1 \ldots$. des coordonnées, la méthode *des multiplicateurs* (COURS D'AN., n° **172**) présente des avantages particuliers. Multiplions les k équations (3) respectivement par des facteurs à déterminer $\lambda, \mu, \nu, \ldots$, ajoutons-les membre à membre avec l'équation (2), et groupons dans l'équation résultante les termes en δx, les termes en δy, etc... Parmi les $3n$ variations $\delta x, \delta y, \ldots$, il y en a k qui sont, en vertu des équations (3), dépendantes des autres, lesquelles restent indéterminées. Concevons que l'on dispose des k quantités $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ de façon à faire évanouir, dans l'équation résultante, les coefficients des k variations $\delta x, \delta y, \ldots$ que l'on regarde comme dépendantes; les coefficients des autres qui restent arbitraires, devront s'évanouir séparément. On est donc conduit à égaler à zéro les coefficients de toutes les variations $\delta x, \delta y, \ldots$ ce qui donne le système de $3n$ équations

$$(5)\quad \begin{cases} X-m\dfrac{d^2 x}{dt^2}+\lambda\dfrac{\partial L}{\partial x}+\mu\dfrac{\partial M}{\partial x}+\cdots=0, \\ Y-m\dfrac{d^2 y}{dt^2}+\lambda\dfrac{\partial L}{\partial y}+\mu\dfrac{\partial M}{\partial y}+\cdots=0, \\ Z-m\dfrac{d^2 z}{dt^2}+\lambda\dfrac{\partial L}{\partial z}+\mu\dfrac{\partial M}{\partial z}+\cdots=0, \\ X_1-m_1\dfrac{d^2 x_1}{dt^2}+\lambda\dfrac{\partial L}{\partial x_1}+\mu\dfrac{\partial M}{\partial x_1}+\cdots=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Ces $3n$ équations, jointes aux k équations $L = 0$, $M = 0, \ldots$ déterminent en fonction du temps les coordonnées de tous les points du système et les k multiplicateurs $\lambda, \mu, \nu \ldots$.

L'avantage de ce procédé consiste en ce qu'il fournit, dès que les quantités $x, y, z, \ldots$; $\lambda, \mu, \ldots$ sont connues en fonction de t, les efforts que les liaisons produisent sur chacun des points du système. En effet, si l'on prend par exemple la première des équations (5), elle montre immédiatement que la force totale qui sollicite le point m parallèlement à OX est

$$X + \lambda \frac{\partial L}{\partial x} + \mu \frac{\partial M}{\partial x} + \ldots,$$

et comme X est la projection sur cet axe de la force P, les autres termes représentent la somme des composantes suivant OX des réactions que les liaisons exercent sur le point M.

On tire aussi, du système (5), les expressions des forces qui pourraient remplacer l'une des liaisons données sans que rien fût changé au mouvement du système matériel. Il est clair, par exemple, que si l'on supprimait la liaison exprimée par l'équation $L = 0$, rien ne serait modifié dans le mouvement, pourvu que l'on appliquât au point M une force ayant pour composantes

$$\lambda \frac{\partial L}{\partial x}, \quad \lambda \frac{\partial L}{\partial y}, \quad \lambda \frac{\partial L}{\partial z};$$

au point M une force ayant pour composantes

$$\lambda \frac{\partial L}{\partial x_1}, \quad \lambda \frac{\partial L}{\partial y_1}, \quad \lambda \frac{\partial L}{\partial z_1}, \quad \text{etc...}$$

On conclut de là que la force à introduire sur un point quelconque (x, y, z) dans le cas de la suppression d'une liaison L, est normale à la surface représentée par l'équation $L = 0$, dans laquelle on considérerait comme seules variables les coordonnées (x, y, z) de ce point, tous les autres points du système étant supposés fixes.

248. Ce que nous venons de dire aux nos **242** et **247** de la marche à suivre, pour tirer de l'équation générale de la dynamique combinée avec les équations des liaisons $L = 0$, $M = 0, \ldots$ les équations différentielles (5) du mouvement d'un système, est entièrement applicable au problème de l'équilibre. On combinerait de la même manière l'équation

des vitesses virtuelles (68) avec les équations exprimant les conditions auxquelles le système est assujetti, pour éliminer les variations δx, δy,... et l'on obtendrait les équations d'équilibre du système sous une forme qui ne différerait des relations (5) que par l'absence des accélérations $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$,... lesquelles sont évidemment nulles lorsque le système est en équilibre. On voit même clairement que le premier problème, celui de l'équilibre, n'est plus ici qu'un cas particulier du second, résolu par la formule générale de la dynamique.

242. Les équations générales du mouvement d'un système, sous la forme (5), ont l'inconvénient de renfermer $3n$ variables liées entr'elles par k équations. Lagrange a donné aux équations de la dynamique une forme très commode, en ce qu'elle permet de n'introduire dans le calcul que le nombre strict de variables indépendantes, nécessaire pour définir la position du système. Supposons que les $3n$ coordonnées $x, y, z, x_1, \ldots$ puissent s'exprimer en fonction du temps et de $3n - k = r$ variables $q_1, q_2, \ldots q_r$ entre lesquelles il n'y aura plus aucune relation donnée *a priori*, en sorte que les équations de condition $L = 0$, $M = 0$, $N = 0, \ldots$ deviendront identiques lorsqu'on y remplacera $x, y, z, x_1, \ldots$ par leurs valeurs en fonction de $t, q_1, q_2, \ldots$ Ainsi, pour exprimer qu'un point (x, y, z) ne peut quitter la surface de l'ellipsoïde

$$(\gamma) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

on peut introduire deux variables auxiliaires q_1 et q_2 et poser

$$x = a \sin q_1 \cos q_2, \quad y = b \sin q_1 \sin q_2, \quad z = c \cos q_1,$$

la condition (γ) sera vérifiée d'elle-même.

Cherchons à former les équations du mouvement entre ces nouvelles variables $q_1, q_2, \ldots$ Pour cela, désignons, en général, par x, y, z les coordonnées d'un point du système, par q l'une quelconque des variables $q_1, q_2, \ldots$, et indiquons par l'accent $'$ les dérivées totales par rapport au temps. Si nous multiplions les équations (5) respectivement par

$$\frac{\partial x}{\partial q}, \quad \frac{\partial y}{\partial q}, \quad \frac{\partial z}{\partial q}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial q}, \quad \ldots$$

et si nous les ajoutons, nous aurons, Σ désignant une somme qui s'étend

à tous les points du système,

$$(6)\quad \Sigma m\left(\frac{\partial x}{\partial q}\frac{dx'}{dt}+\frac{\partial y}{\partial q}\frac{dy'}{dt}+\frac{\partial z}{\partial q}\frac{dz'}{dt}\right)=\Sigma\left(X\frac{\partial x}{\partial q}+Y\frac{\partial y}{\partial q}+Z\frac{\partial z}{\partial q}\right),$$

car le coefficient de λ, savoir

$$\Sigma\left(\frac{\partial L}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q}+\frac{\partial L}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q}+\frac{\partial L}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q}\right)$$

se réduit identiquement à zéro, puisque, l'équation $L=o$ étant vérifiée identiquement lorsqu'on y remplace $x, y, z, \ldots$ par leurs valeurs en $q_1, q_2, \ldots$, il en sera de même de ses dérivées partielles par rapport à l'une quelconque des quantités q. La même chose aura lieu pour les coefficients de $\mu, \nu, \ldots$ Les forces motrices X, Y, Z sont données généralement en fonction des coordonnées des points et du temps; le second membre de l'équation (6) se réduira donc, après la substitution, à une fonction connue des variables $t, q_1, q_2 \ldots q_r$. Quant au premier membre, il peut s'écrire

$$\frac{d}{dt}\Sigma m\left(x'\frac{\partial x}{\partial q}+y'\frac{\partial y}{\partial q}+z'\frac{\partial z}{\partial q}\right)-\Sigma m\left[x'\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial q}+y'\frac{d}{dt}\frac{\partial y}{\partial q}+z'\frac{d}{dt}\frac{\partial z}{\partial q}\right].$$

Mais, d'une part, x étant exprimé en $t, q_1, q_2, \ldots$, on a pour exprimer x' en fonction de $t, q_1, \ldots q_r, q'_1, \ldots q'_r$, l'égalité

$$(\delta)\qquad x'=\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial q_1}q'_1+\frac{\partial x}{\partial q_2}q'_2+\cdots+\frac{\partial x}{\partial q_r}q'_r,$$

et l'on en déduit, pour l'une quelconque des variables q, la relation

$$(\varepsilon)\qquad \frac{\partial x'}{\partial q'}=\frac{\partial x}{\partial q},\quad \frac{\partial y'}{\partial q'}=\frac{\partial y}{\partial q},\quad \frac{\partial z'}{\partial q'}=\frac{\partial z}{\partial q},$$

les deux dernières se démontrant comme la première.

D'autre part, on a, par interversion de l'ordre des différentiations,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)=\frac{\partial^2 x}{\partial q\partial t}+\frac{\partial^2 x}{\partial q\partial q_1}q'_1+\cdots+\frac{\partial^2 x}{\partial q\partial q_r}q'_r=\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial q_1}q'_1+\cdots+\frac{\partial x}{\partial q_r}q'_r\right),$$

d'où l'on voit que

$$(\zeta)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)=\frac{\partial x'}{\partial q},\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)=\frac{\partial y'}{\partial q},\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)=\frac{\partial z'}{\partial q},$$

et au moyen des relations (ε) et (ζ), le premier membre de l'équation (6) se ramène à la forme

$$\frac{d}{dt}\Sigma m\left(x'\frac{\partial x'}{\partial q'}+y'\frac{\partial y'}{\partial q'}+z'\frac{\partial z'}{\partial q'}\right)-\Sigma m\left(x'\frac{\partial x'}{\partial q}+y'\frac{\partial y'}{\partial q}+z'\frac{\partial z'}{\partial q}\right).$$

Représentons par T la demi-somme des forces vives de tous les points du système :

$$T=\tfrac{1}{2}\,\Sigma m v^2=\tfrac{1}{2}\,\Sigma m(x'^2+y'^2+z'^2),$$

l'équation (6) prendra la forme simple

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'}-\frac{\partial T}{\partial q}=Q. \tag{7}$$

Il faut bien observer la signification des dérivées partielles qui figurent dans cette égalité. On suppose que T ait été exprimé en fonction des variables $q_1,\ldots q_r,\ q'_1,\ldots q'_r$ et de t, s'il y a lieu, par les équations (δ). Les dérivées partielles $\partial T : \partial q$, $\partial T : \partial q'$ se rapportent à ce point de vue. La dérivée $d : dt$ est une dérivée totale par rapport au temps.

En mettant successivement dans l'équation (7) $q_1, q_2,\ldots q_r$ au lieu de q, on aura r équations différentielles entre ces variables et le temps t. Ce sont les équations de Lagrange dans lesquelles les variables sont réduites au plus petit nombre. Elles sont surtout commodes lorsqu'il existe un potentiel U pour les forces motrices X, Y, Z,..., potentiel qui peut même renfermer t explicitement. On a alors, en effet,

$$X=\frac{\partial U}{\partial x},\quad Y=\frac{\partial U}{\partial y},\ldots,$$

d'où

$$Q=\Sigma\left(X\frac{\partial x}{\partial q}+Y\frac{\partial y}{\partial q}+Z\frac{\partial z}{\partial q}\right)=\Sigma\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q}+\cdots\right)=\frac{\partial U}{\partial q},$$

et l'équation (7) prend la forme

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'}-\frac{\partial T}{\partial q}=\frac{\partial U}{\partial q}; \tag{8}$$

en faisant successivement $q=q_1$, $q=q_2,\ldots$ on aura les r équations différentielles du problème.

250. Pour montrer une application de la méthode, reprenons le problème du numéro **244**. Les équations

$$x=r\sin\theta\cos\omega t,\quad y=r\sin\theta\sin\omega t,\quad z=r\cos\theta,$$

donnent les coordonnées x, y, z en fonction d'une seule coordonnée r et du temps t. Nous avons

$$q = r, \quad q' = r', \quad U = mgz = mgr \cos\theta,$$

$$x' = \sin\theta(r'\cos\omega t - \omega r \sin\omega t), \quad y' = \sin\theta(r'\sin\omega t + \omega r\cos\omega t), \quad z' = r'\cos\theta,$$

et en transformant T en fonction de r, r',

$$T = \tfrac{1}{2} m (x'^2 + y'^2 + z'^2) = \tfrac{1}{2} m (r'^2 + \omega^2 r^2 \sin^2\theta),$$

résultat qui s'obtient d'ailleurs directement par la composition des vitesses. De là

$$\frac{\partial T}{\partial r'} = mr', \quad \frac{\partial T}{\partial r} = m\omega^2 r \sin^2\theta;$$

substituant dans l'équation (8) et divisant par m, on a

$$\frac{dr'}{dt} - \omega^2 r \sin^2\theta = g\cos\theta,$$

ce qui ramène à l'équation différentielle déjà trouvée.

Comme second exemple, reprenons le problème du numéro **216**. La position du corps étant définie par les variables ψ, θ, φ, on trouvera facilement, au moyen de l'expression de la force vive d'un solide tournant (**192**), des valeurs de p, q, r en $\psi, \theta, \ldots \psi', \ldots$

$$T = \tfrac{1}{2}[A(\theta'^2 + \psi'^2 \sin^2\theta) + C(\varphi' + \psi'\cos\theta)^2],$$

et la fonction des forces sera évidemment

$$U = Mgl\cos\theta.$$

Appliquant l'équation (8) à chacune des variables φ, ψ, θ, on aura, U et T ne renfermant ni ψ, ni φ,

$$C\frac{d}{dt}(\varphi' + \psi'\cos\theta) = 0,$$

$$\frac{d}{dt}[A\psi'\sin^2\theta + C(\varphi' + \psi'\cos\theta)\cos\theta] = 0,$$

$$A\frac{d\theta'}{dt} - A\psi'^2\sin\theta\cos\theta + C(\varphi' + \psi'\cos\theta)\psi'\sin\theta = -Mgl\sin\theta,$$

d'où l'on déduit, en intégrant les deux premières équations et désignant par n, k des constantes,

$$\varphi' + \psi'\cos\theta = n, \quad A\psi'\sin^2\theta + Cn\cos\theta = k,$$

$$A\frac{d\theta'}{dt} - A\psi'^2\sin\theta\cos\theta + Cn\psi'\sin\theta = -Mgl\sin\theta.$$

L'élimination de ψ' entre ces deux dernières conduit facilement à l'équation (14) du n° 221.

Les équations de Lagrange s'appliquent aussi, avec de grands avantages, aux questions de mouvement relatif, mais nous renverrons, sur ce point, à notre *Mémoire sur l'application de la méthode de Lagrange à divers problèmes du mouvement relatif* (2ᵉ édition; Paris, Gauthier-Villars, 1889).

Exercices.

1. Déduire des équations (2) les théorèmes du mouvement du centre de gravité et des moments, dans le cas d'un solide libre.

2. Un point matériel M glisse sans frottement sur une droite qui tourne autour d'un de ses points O, dans un plan horizontal, avec une vitesse angulaire telle que la tangente de l'angle décrit varie proportionnellement au temps. Déterminer le mouvement du point.

R. Soient x, y les coordonnées horizontales du point, la position initiale OX de la droite étant prise pour axe des x; a une constante donnée.

Le principe de d'Alembert fournit l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y = 0,$$

l'équation de la droite mobile est $y = atx$. Éliminant δy et y, intégrant l'équation entre x et t, on a successivement

$$x = x_0 + \frac{v_0}{a}\operatorname{arc\,tg} at, \quad y = x_0 at + v_0 t \operatorname{arc\,tg} at,$$

v_0 étant la vitesse initiale suivant OX. La trajectoire du mobile a pour équation en coordonnées polaires

$$r = \frac{ax_0 + v_0\theta}{a\cos\theta}.$$

3. Une chaîne homogène, pesante, peut se mouvoir sans frottement sur un système BAC de deux plans inclinés adossés, dans le plan vertical normal à leur intersection. Trouver son mouvement.

R. Conservant les notations du numéro 245, on a

$$x + x' = l,$$

$$x = Ce^{at} + C_1e^{-at} + \frac{l\sin\alpha'}{\sin\alpha + \sin\alpha'}; \quad a^2 = \frac{g}{\rho}(\sin\alpha + \sin\alpha').$$

Les constantes C, C_1 se déterminent par l'état initial.

4. Un fil flexible, pesant et homogène, tourne autour d'un axe vertical AZ, auquel il est fixé par une de ses extrémités A, avec une vitesse angulaire constante ω. On admet que le fil garde une figure invariable : déterminer celle-ci.

R. Dans les équations (4), $X = 0$, $Y = 0$, $Z = \rho g$, et dans l'hypothèse admise,

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\omega^2 x, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0.$$

Les équations (4) se réduisent à

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) + \rho\omega^2 x ds = 0, \quad d\left(T\frac{dy}{ds}\right) + \rho\omega^2 y ds, \quad d\left(T\frac{dz}{ds}\right) + \rho g ds = 0.$$

Soient l la longueur AB du fil, A l'origine de l'arc s; on tire de ces égalités, T étant T_0 en A et nul en B,

$$T\frac{dx}{ds} = \rho\omega^2 \int_s^l x ds, \quad T\frac{dy}{ds} = \rho\omega^2 \int_s^l y ds, \quad T\frac{dz}{ds} = \rho g (l - s),$$

$$2T + \rho\omega^2 (x^2 + y^2) + 2\rho g z = 2T_0.$$

De là

$$dy \int_s^l x ds - dx \int_s^l y ds = 0, \quad y \int_s^l x ds - x \int_s^l y ds = 0,$$

en intégrant et observant que x, y sont nuls pour $s = 0$. On a donc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x};$$

la courbe affectée par le fil est plane et son plan passe par l'axe AZ. Prenons, dans ce plan mobile, l'axe AX horizontal. Les égalités

$$T\frac{dz}{ds} = \rho g (l - s), \quad T + \tfrac{1}{2}\rho\omega^2 x^2 + \rho g z = T_0,$$

donneront, par l'élimination de T,

$$(T_0 - g\rho z - \tfrac{1}{2}\rho\omega^2 x^2)\, dz = \rho g (l - s)\, ds,$$

équation différentielle de la courbe cherchée. On a aussi, x_1 étant l'abscisse du centre de gravité de la portion MB du fil,

$$T\frac{dx}{ds} = \rho\omega^2 (l - s) x_1, \quad \frac{dx}{dz} = \frac{\omega^2 x_1}{g},$$

ce qui constitue une propriété de la courbe. On en déduit des conséquences géométriques intéressantes.

5. *Applications de la méthode de Lagrange.* — Une circonférence homogène, de masse M, roule sans glisser sur une droite horizontale AX, dans un plan vertical; un point pesant, de masse m, se meut sans frottement sur cette circonférence. On suppose nulles les vitesses initiales du cercle et du point; déterminer le mouvement du système.

R. Soient a le rayon du cercle; φ, θ les angles que font avec le diamètre vertical, à l'époque t, un rayon déterminé du cercle mobile et le rayon mené du centre O au point m. On trouvera, par la composition des vitesses, $2Ma^2\varphi'^2$ pour la force vive du cercle; $ma^2(\theta'^2 + \varphi'^2 - 2\theta'\varphi' \cos\theta)$ pour celle du point m, donc

$$2T = 2Ma^2\varphi'^2 + ma^2(\theta'^2 + \varphi'^2 - 2\theta'\varphi'\cos\theta), \; U = mga\cos\theta,$$

et les équations de Lagrange seront

$$\frac{d}{dt}(\theta' - \varphi' \cos\theta) - \theta'\varphi' \sin\theta = -\frac{g}{a}\sin\theta,$$

$$(2M + m)\frac{d\varphi'}{dt} - m\frac{d.\theta'\cos\theta}{dt} = 0.$$

Intégrant cette dernière, ayant égard à la condition $\theta' = 0$, $\varphi' = 0$ pour $t = 0$, on a

$$\varphi' = \frac{m}{2M + m}\theta'\cos\theta, \quad \varphi = \frac{m}{2M + m}(\sin\theta - \sin\alpha),$$

α et 0 étant les valeurs initiales de θ et de φ.

Développant la première équation et réduisant, on a

$$\frac{d\theta'}{dt} - \cos\theta\frac{d\varphi'}{dt} = -\frac{g}{a}\sin\theta,$$

et en remplaçant $d\varphi' : dt$ par sa valeur, multipliant par θ' et intégrant,

$$\theta'^2 - \frac{m}{2M + m}\theta'^2\cos^2\theta = \frac{2g}{a}(\cos\theta - \cos\alpha),$$

d'où enfin,

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2(2M + m)g}{a}}\sqrt{\frac{\cos\theta - \cos\alpha}{2M + m\sin^2\theta}}.$$

La discussion montre que θ varie entre $-\alpha$ et $+\alpha$, et que φ varie entre zéro et $-2m\sin\alpha : (2M + m)$. Cas où $M = 0$.

6. Un parallélogramme articulé ABCD, formé de deux barres homogènes AB, DC, de longueur $2a$, de masse m, et de deux barres homogènes AD, BC de longueur $2b$, de masse n, est mobile dans un plan vertical autour du milieu O de AB. Déterminer le mouvement en négligeant les frottements.

R. Déterminons la position du système par les angles θ, φ que font les directions OA, AD avec la verticale inférieure OZ. On trouvera, par le théorème de Koenig et la composition des vitesses,

$$T = a^2\left(n + \frac{m}{3}\right)\theta'^2 + 2b^2\left(m + \frac{2n}{3}\right)\varphi'^2;$$

$$U = 2(m + n)gb\cos\varphi.$$

Les équations du mouvement sont

$$\frac{d\theta'}{dt} = 0, \quad \frac{2(3m + 2n)b}{3}\frac{d\varphi^2}{dt^2} = 2(m + n)g\cos\varphi + h.$$

Les côtés AB, CD tournent d'un mouvement uniforme; les côtés AD, BC oscillent par rapport à la verticale comme un pendule simple de longueur

$$\frac{(3m + 2n)2b}{3(m + n)}.$$

7. Deux points m et m_1, mobiles sans frottement sur deux cercles concentriques,

sont soumis à leur action réciproque qui est une fonction donnée de leur distance u. Déterminer leur mouvement.

R. O le centre commun, a et a_1 les rayons des deux cercles, $a_1 > a$; $mm_1 F'(u)$ la mesure de l'action réciproque; θ, θ_1 les angles respectifs des rayons vecteurs Om, Om_1 avec l'axe polaire OX; $\varphi = \theta_1 - \theta$; ω, ω_1 les vitesses angulaires des rayons Om, Om_1.

On a ici

$$q = \theta, \theta_1; \quad T = \tfrac{1}{2}(ma^2\theta'^2 + m_1 a_1^2 \theta_1'^2), \quad U = -mm_1 F(u),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta'} = ma^2\theta', \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = -mm_1 F'(u)\frac{\partial u}{\partial \theta},$$

et comme

$$u^2 = a^2 + a_1^2 - 2aa_1\cos(\theta_1 - \theta), \quad u\frac{\partial u}{\partial \theta} = -aa_1\sin(\theta_1 - \theta),$$

on aura par les formules de Lagrange

$$a\frac{d\theta'}{dt} = \frac{m_1 a_1 F'(u)}{u}\sin\varphi, \quad a_1\frac{d\theta_1'}{dt} = -\frac{ma\,F'(u)}{u}\sin\varphi.$$

On en déduit immédiatement

$$ma^2\frac{d\theta'}{dt} + m_1 a_1^2\frac{d\theta_1'}{dt} = 0, \quad ma^2\theta' + m_1 a_1^2\theta_1' = k,$$

k étant une constante; d'où

(1) $$ma^2\theta + m'a_1^2\theta_1 = kt + \alpha \ (\alpha = \text{const.}).$$

On tire des mêmes formules, en posant $G = ma^2 + m_1 a_1^2$,

$$\frac{d(\theta_1' - \theta')}{dt} = -\frac{G}{aa_1}\frac{F'(u)}{u}\sin\varphi, \quad \text{ou} \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{G}{aa_1}\frac{F'(u)}{u}\sin\varphi.$$

Multipliant par $2d\varphi : dt$ et observant que l'on a

$$u^2 = a^2 + a_1^2 - 2aa_1\cos\varphi, \quad u\,du = aa_1\sin\varphi\,d\varphi,$$

il vient, en intégrant, C étant une constante,

$$\frac{d\varphi^2}{dt^2} = C - \frac{2G}{a^2a_1^2}F(u).$$

Mettant pour u sa valeur en φ, on a t en fonction de φ par une quadrature; φ étant connu, on tirera de l'équation (1)

$$\theta = \frac{kt + \alpha}{G} - \frac{m_1 a_1^2\varphi}{G}, \quad \theta_1 = \frac{kt + \alpha}{G} + \frac{ma^2\varphi}{G}.$$

Cas particulier où l'action est proportionnelle à la simple distance u. On a

$$F'(u) = \mu u; \quad \frac{d\varphi^2}{dt^2} = \frac{2\mu G}{aa_1}(\cos\varphi - \cos\varphi_0),$$

équation du mouvement d'un pendule simple.

Le mouvement du rayon Om autour du centre commun se compose 1° d'un mouvement angulaire uniforme avec la vitesse $k : G$; 2° d'un mouvement périodique dont la loi est la même que celle du pendule.

§ 2. Théorème d'Hamilton. Équations canoniques du mouvement. Théorèmes de Jacobi et de Poisson.

251. Considérons l'intégrale

$$V = \int_{t_0}^{t} (T + U)\, dt,$$

t_0 étant une valeur particulière de t, T et U ayant la même signification que ci-dessus et étant exprimés au moyen des variables q_i, q'_i. Si nous supposons que les valeurs de $q_1, q_2, \ldots q_r$ soient données pour t_0 et t, et que l'on attribue aux variables q_i, q'_i des variations infiniment petites δq_i, $\delta q'_i$, on peut démontrer que l'on aura $\delta V = 0$ si les variables q vérifient les équations de Lagrange. En effet, l'équation (8) du § précédent,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_i} - \frac{\partial (T+U)}{\partial q_i} = 0,$$

entraîne évidemment, Σ indiquant une somme qui s'étend à $q_i = q_1$, $q_i = q_2, \ldots$, celle-ci

$$\text{(1)} \qquad \Sigma \int_{t_0}^{t} \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_i} - \frac{\partial (T+U)}{\partial q_i} \right] \delta q_i\, dt = 0,$$

mais l'intégration par partie donne

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_i} \cdot \delta q_i\, dt = \left[\frac{\partial T}{\partial q'_i}\delta q_i \right]_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial T}{\partial q'_i}\delta q'_i \cdot dt,$$

car, t n'étant soumis à aucune variation, on a

$$\frac{d\delta q_i}{dt} = \delta \frac{dq_i}{dt} = \delta q'_i.$$

Le terme entre crochets est nul, car, d'après l'hypothèse, $\delta q_1, \delta q_2, \ldots$ sont nuls aux deux limites t_0 et t, donc nous aurons

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_i}\delta q_i\, dt = -\int_{t_0}^{t} \frac{\partial T}{\partial q'_i}\delta q'_i\, dt,$$

et par suite, en substituant dans l'équation (1) et changeant les signes

$$\int_{t_0}^{t} \Sigma \left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\delta q'_i + \frac{\partial T}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial U}{\partial q_i}\delta q_i \right) dt = 0.$$

Mais U ne renferme que les variables $t, q_1, \dots q_r$ et pas les $q'_1, q'_2, \dots$ On peut donc écrire la quantité sous le signe d'intégration

$$\Sigma\left[\frac{\partial(\mathrm{T}+\mathrm{U})}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial(\mathrm{T}+\mathrm{U})}{\partial q'_i}\delta q'_i\right] = \Sigma\,\delta(\mathrm{T}+\mathrm{U}),$$

donc enfin, on a l'équation annoncée

$$\int_{t_0}^{t}\delta(\mathrm{T}+\mathrm{U})\,dt = 0 \quad \text{ou} \quad \delta\int_{t_0}^{t}(\mathrm{T}+\mathrm{U})\,dt = 0,$$

d'après les principes du calcul des variations. C'est le théorème d'Hamilton, que l'on étend sans peine au cas où il n'existe pas de fonction des forces U et d'où l'on déduirait, inversement, les équations de la dynamique sous la forme de Lagrange.

252. Lorsque la fonction U ne renferme pas le temps explicitement et dépend seulement des variables $q_1, q_2, \dots q_r$, on sait que l'intégrale des forces vives existe, c'est-à-dire que l'on a l'équation suivante, h étant constant,

$$\mathrm{T} = \mathrm{U} + h.$$

Il en résulte, la constante h étant déterminée par les valeurs de q_i, q'_i pour $t = t_0$, que $\delta h = 0$ et que l'on a $\delta\mathrm{U} = \delta\mathrm{T}$. L'équation d'Hamilton prend la forme

$$\delta\int_{t_0}^{t} 2\mathrm{T}dt = 0, \quad \text{ou} \quad \delta\int_{t_0}^{t}\Sigma m v^2 dt = 0,$$

ou enfin

$$\delta\int_{t_0}^{t}\Sigma m v ds = 0. \tag{2}$$

On sait, par les principes du calcul des variations, que cette équation exprime, en général, la condition nécessaire pour que l'intégrale soumise à la variation soit un maximum ou un minimum. On peut donc énoncer ce théorème, appelé *Principe de la moindre action : Dans le mouvement d'un système auquel s'applique l'intégrale des forces vives, si l'on considère deux positions* (A) *et* (B) *du système, telles qu'elles résultent de l'application des forces motrices, l'intégrale* $\int\Sigma m v ds$ *prise entre ces deux positions sera un maximum ou un minimum dans le mouvement réel, par rapport aux valeurs qu'elle prendrait si l'on déformait infiniment peu les trajectoires des différents points entre leurs*

extrémités, en ayant égard dans cette déformation 1° aux conditions imposées par les liaisons du système; 2° à ce que les vitesses des points sont liées à leurs positions par l'intégrale des forces vives.

On peut aller plus loin et montrer que, sauf dans des cas très particuliers, c'est le *minimum* qui a lieu; mais cette discussion présente des difficultés dans lesquelles nous n'entrerons pas.

252. On doit encore à Hamilton une transformation très importante des équations de la dynamique, que nous allons déduire des formules de Lagrange. Nous supposerons que la fonction des forces U puisse encore contenir le temps explicitement dans son expression, mais qu'il ne figure pas dans les équations des liaisons, en sorte que les coordonnées $x, y, z, \ldots$ s'expriment en fonction des seules variables $q_1, q_2, \ldots q_r$. Posons en général

$$\frac{\partial T}{\partial q'_i} = p_i,$$

et introduisons ces p_i comme variables au lieu des q'_i dans les équations du mouvement. Comme nous avons, d'après notre hypothèse,

$$T = \tfrac{1}{2}\sum m(x'^2_i + y'^2_i + z'^2_i),$$

$$x'_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} q'_2 + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial q_r} q'_r, \quad \text{etc.},$$

on voit sans peine que T deviendra, par la substitution, une fonction homogène du 2^{me} degré de $q'_1, q'_2, \cdot q'_r$. On aura donc, d'après le théorème des fonctions homogènes (Cours d'An., **144**),

$$\frac{\partial T}{\partial q'_1} q'_1 + \frac{\partial T}{\partial q'_2} q'_2 + \cdots + \frac{\partial T}{\partial q'_r} q'_r = 2T,$$

ce qu'on peut écrire comme suit :

$$T = \sum p_i q'_i - T,$$

et il en résulte par différentiation

$$dT = \sum p_i dq'_i + \sum q'_i dp_i - \sum \frac{\partial T}{\partial q_i} dq_i - \sum \frac{\partial T}{\partial q'_i} dq'_i;$$

mais, d'après la signification de p_i, le premier et le dernier terme se détruisent, il reste simplement

$$dT = \sum q'_i dp_i - \sum \frac{\partial T}{\partial q_i} dq_i.$$

Cette équation est indépendante des relations existant, en vertu des équations du mouvement, entre les variables q_i, p_i; on peut donc y regarder ces variables comme indépendantes et dp_i, dq_i comme des quantités arbitraires.

D'un autre côté, si l'on observe que p ou $\partial T : \partial q'$ est une fonction linéaire homogène de $q'_1, q'_2, \ldots q'_r$, et que, par suite, les q'_i s'exprimeront en fonctions linéaires homogènes des p'_i, on verra que, par leur substitution dans T, T deviendra une fonction seulement de $q_1, q_2, \ldots q_r$ et de $p_1, p_2, \ldots p_r$, homogène et du second degré par rapport à ces dernières quantités. Désignant par des parenthèses ( ) les dérivées partielles de T prises sous ce nouveau point de vue, on aura évidemment

$$dT = \Sigma\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) dq_i + \Sigma\left(\frac{\partial T}{\partial p_i}\right) dp_i,$$

abstraction faite de toute dépendance entre les variables p et q. En comparant cette valeur de dT avec la précédente et ayant égard à l'indétermination des dp, dq, on conclura que l'on a

$$(3) \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) = -\frac{\partial T}{\partial q_i}, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial p_i}\right) = q'_i,$$

relations dont le sens est bien défini par les explications qui précèdent.

Or, les équations de Lagrange, équations (8) du § précédent, peuvent s'écrire sous la forme

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = -\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right) + \frac{\partial U}{\partial q},$$

(car, U ne renfermant que les quantités q_i, n'éprouve aucun changement par la substitution des p_i aux q'_i). D'autre part, la seconde équation (3) donne

$$\frac{dq_i}{dt} = \left(\frac{\partial T}{\partial p_i}\right) = \frac{\partial (T - U)}{\partial p_i},$$

puisque U ne renferme pas les variables p. Si donc nous posons

$$H = T - U,$$

en sorte que H, après la substitution indiquée plus haut, deviendra une fonction F $(t, q_1, q_2, \ldots q_r, p_1, p_2, \ldots p_r)$, et si nous supprimons les parenthèses, aucune confusion n'étant plus possible sur la signification

des dérivées partielles, nous aurons les équations du mouvement du système sous la *forme* dite *canonique*,

$$(4)\qquad \frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i},\quad i=1, 2, \ldots r.$$

Ces formules font dépendre la détermination du mouvement de l'intégration d'un système de $2r$ équations différentielles du premier ordre entre $q_1, \ldots q_r, p_1, \ldots p_r$ et le temps t, d'une forme remarquable et jouissant de belles propriétés dont nous allons indiquer quelques unes. $H = F(t, q_1, \ldots q_r, p_1, \ldots p_r)$ est la *fonction caractéristique*.

254. L'intégration des équations (4) introduit $2r$ constantes arbitraires qui sont à déterminer par l'état initial. Si l'on conçoit que les intégrales du problème soient résolues par rapport à ces constantes arbitraires et mises, par exemple, sous la forme

$$(5)\qquad \varphi(t, q_1, q_2, \ldots q_r, p_1, p_2, \ldots p_r)=\alpha,$$

on déduira d'une telle relation, en dérivant totalement par rapport au temps,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\Sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt}+\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt}\right)=0,$$

ou, à cause des équations (4),

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\Sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)=0.$$

Pour abréger, nous emploierons la notation

$$(M, N)=\Sigma\left(\frac{\partial M}{\partial q_i}\frac{\partial N}{\partial p_i}-\frac{\partial M}{\partial p_i}\frac{\partial N}{\partial q_i}\right),\quad (i=1, 2, \ldots r),$$

M et N étant deux fonctions quelconques des variables q_i et p_i. Nous aurons alors

$$(6)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial t}+(\varphi, H)=0,$$

et ceci ne peut être qu'une *identité*, indépendante de toute relation entre les variables q_i, p_i et le temps. En effet, comme elle doit être vérifiée par les valeurs les plus générales des q_i, p_i satisfaisant aux équations (4) et qu'elle ne renferme aucune constante arbitraire, il s'ensuivrait que l'on peut obtenir entre les intégrales générales d'un système d'équations

différentielles une relation indépendante de toute constante arbitraire, ce qui est évidemment impossible. Donc

Toute fonction φ de $t, q_1, \ldots, q_r, p_1, \ldots, p_r$ qui, égalée à une constante arbitraire, fournit une intégrale du système canonique, vérifie l'équation aux dérivées partielles (6), *à* $2r+1$ *variables indépendantes.*

Réciproquement, si une fonction $\varphi(t, q_1, \ldots, q_r, p_1, \ldots, p_r)$ satisfait à l'équation (6), l'équation $\varphi = \alpha$ sera une des intégrales du système canonique, α étant une constante arbitraire. Il suffit en effet, pour que les valeurs des q_i, p_i qui satisfont aux équations (4) vérifient la relation $\varphi = \alpha$, qu'elles satisfassent à celle-ci :

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \Sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt}\right) = 0,$$

et cette dernière est une identité en vertu des équations (4) et (6).

Si la fonction H ne renferme pas t explicitement, mais seulement dans les fonctions q_i, p_i, en sorte que $\partial H : \partial t = 0$, l'équation (6) est évidemment vérifiée par $\varphi = H$, car (H, H) est identiquement nul. Donc $H = h$ est une intégrale du problème, h étant une constante arbitraire. On a donc l'intégrale

$$T = U + h,$$

qui n'est autre que l'intégrale des forces vives.

255. Supposons que l'on ait obtenu la moitié des intégrales du système canonique sous la forme

$$(7) \qquad \varphi_1(t, q_i, p_i) = \alpha_1, \quad \varphi_2 = \alpha_2, \ldots, \varphi_r = \alpha_r,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ étant des constantes arbitraires; de sorte qu'au moyen de ces intégrales, on puisse exprimer r fonctions inconnues, $p_1, p_2, \ldots, p_r$, en fonction de $t, q_1, \ldots q_r, \alpha_1, \ldots \alpha_r$. Nous indiquerons par un trait $(\overline{p_i})$ les expressions ainsi obtenues pour les fonctions p_i, et par leur substitution dans les expressions renfermant les p_i. Si les r intégrales (7) satisfont en outre à cette condition que l'on ait identiquement, j et k désignant deux quelconques des nombres $1, 2, \ldots r$,

$$(\varphi_j, \varphi_k) = 0,$$

on pourra énoncer ce beau théorème : *L'expression*

$$(8) \qquad \overline{p_1}\, dq_1 + \overline{p_2}\, dq_2 + \cdots + \overline{p_r}\, dq_r - \overline{H}\, dt,$$

sera la différentielle exacte d'une certaine fonction V *des* $r+1$ *variables*

$q_1, q_2, \dots q_r, t$, et il suffira, pour obtenir les r intégrales du système (4) *qui restent à trouver, de poser*

$$(9) \qquad \frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \dots \frac{\partial V}{\partial \alpha_r} = \beta_r,$$

$\beta_1, \beta_2, \dots \beta_r$ désignant r nouvelles constantes arbitraires.

En effet, on sait démontrer(1) que, pour qu'une expression de la forme $p_1\,dq_1 + p_2\,dq_2 + \dots + p_n\,dq_n$, où les p_i sont des fonctions des q_i, soit une différentielle exacte par rapport aux variables q_i, la condition nécessaire et suffisante est que l'on ait, i et k étant deux des nombres $1, 2, \dots n$, les $n(n-1):2$ identités

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_k} = \frac{\partial p_k}{\partial q_i}.$$

Si les fonctions $p_1, \dots p_n$ ne sont pas données explicitement, mais par la résolution d'un système d'équations

$$H_1(q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n) = a_1, \dots, H_n(q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n) = a_n,$$

la condition précédente équivaut à celle-ci, que les fonctions $H_1, H_2, \dots H_n$ satisfassent aux $n(n-1):2$ relations identiques (quels que soient les p_i, q_i),

$$(H_i, H_k) = 0 \quad (i, k = 1, 2, \dots n).$$

Cela rappelé, considérons les équations

$$(\alpha) \quad \varphi_1 = \alpha_1, \quad \varphi_2 = \alpha_2, \dots \varphi_r = \alpha_r, \quad -H + F(t, q_1, \dots, q_r, p_1, \dots, p_r) = 0$$

comme un système de $r+1$ équations entre les $2r+2$ variables

$$q_1, q_2, \dots, q_r, t; \quad p_1, p_2, \dots, p_r, \quad -H,$$

et appliquons la règle ci-dessus. Pour que l'on ait

$$\overline{p}_1\,dq_1 + \overline{p}_2\,dq_2 + \dots + \overline{p}_r\,dq_r - \overline{H}dt = dV,$$

dV étant une différentielle exacte par rapport à $q_1, q_2, \dots q_r, t$, il sera suffisant, d'après la règle ci-dessus, que l'on ait *indépendamment de toute relation entre t, p_i, q_i,*

$$\frac{\partial M}{\partial t}\frac{\partial N}{\partial(-H)} - \frac{\partial M}{\partial(-H)}\frac{\partial N}{\partial t} + (M, N) = 0,$$

M, N désignant les premiers membres de deux quelconques des équations (α).

---

(1) Voir la note première à la fin du volume.

Or, 1° si l'on prend $M = \varphi_j$, $N = \varphi_k$, comme ni φ_j, ni φ_k ne renferme la lettre H, les deux premiers termes de l'équation s'annulent identiquement et le troisième s'annule en vertu de la relation admise $(\varphi_j, \varphi_k) = 0$.

2° Si l'on prend $M = \varphi_j$, $N = -H + F(t, q_1, \ldots q_r)$, on aura évidemment

$$\frac{\partial M}{\partial(-H)} = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial t}, \quad \frac{\partial N}{\partial(-H)} = 1, \quad \frac{\partial N}{\partial q_i} = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \ldots$$

et la condition se ramènera à celle-ci :

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial t} + (\varphi_j, F) = 0,$$

qui est vérifiée, la fonction φ_j satisfaisant (**254**) à l'équation (6), dans laquelle H désigne précisément la fonction F. Ainsi la première partie de la proposition est démontrée.

Pour établir la seconde, remarquons d'abord que l'on a, en vertu de l'équation

$$\overline{p}_1\, dq_1 + \overline{p}_2\, dq_2 + \cdots + \overline{p}_r\, dq_r - \overline{H}\, dt = dV,$$

les relations

$$(10) \qquad \frac{\partial V}{\partial q_1} = \overline{p}_1, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = \overline{p}_2, \ldots; \quad \frac{\partial V}{\partial q_r} = \overline{p}_r, \quad \frac{\partial V}{\partial t} = -\overline{H}.$$

Calculons la dérivée totale, par rapport à t, de $\partial V : \partial \alpha_1$. Nous aurons

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{d\alpha_1 dq_r}\frac{dq_r}{dt}.$$

Mais en vertu des identités (10), cettte expression prendra la forme

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = -\frac{\partial \overline{H}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \overline{p}_1}{\partial \alpha_1}\frac{dq_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial \overline{p}_r}{\partial \alpha_1}\frac{dq_r}{dt},$$

et, en vertu du système (4), si $q_1, q_2, \ldots q_r$ satisfont aux équations canoniques,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial \overline{p}_1}{\partial \alpha_1} + \cdots + \frac{\partial H}{\partial p_r}\frac{\partial \overline{p}_r}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial \overline{H}}{\partial \alpha_1},$$

et l'on voit sans peine que la somme des r premiers termes du second membre n'est autre que la dérivée partielle de H par rapport à α_1 après la substitution des valeurs des p_i; le second membre est donc nul. Donc

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = 0, \quad \text{donc} \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \beta_1$$

est une intégrale du système (4). Il en sera de même des autres équations (9), et le théorème est ainsi démontré.

256. On remarquera que les r équations

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = p_2, \ldots \frac{\partial V}{\partial q_r} = p_r,$$

sont absolument équivalentes aux r équations (7), puisqu'elles deviennent identiques, en vertu des relations (10), lorsqu'on y remplace les $p_1, p_2, \ldots p_r$ par leurs valeurs tirées des équations (7). On peut donc dire que le système complet des intégrales du système canonique est donné par les $2r$ équations

$$(11) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, & \dfrac{\partial V}{\partial q_2} = p_2, \ldots \dfrac{\partial V}{\partial q_r} = p_r, \\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \beta_1, & \dfrac{\partial V}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \ldots \dfrac{\partial V}{\partial \alpha_r} = \beta_r. \end{cases}$$

Si donc la fonction V était connue d'une manière quelconque, elle fournirait immédiatement la solution du problème de l'intégration des équations (4).

Or, V satisfait à une équation aux dérivées partielles du premier ordre, à $r+1$ variables indépendantes $t, q_1, q_2, \ldots q_r$. En effet, la dernière des équations (10) peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \overline{H} = 0,$$

ou

$$\frac{\partial V}{\partial t} + F(t, q_1, q_2, \ldots q_r, \bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots \bar{p}_r) = 0.$$

Mais les équations (10) transforment cette égalité dans celle-ci :

$$(12) \qquad \frac{\partial V}{\partial t} + F\left(t, q_1, q_2, \ldots q_r, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \ldots \frac{\partial V}{\partial q_r}\right) = 0,$$

ainsi *la fonction* V *doit vérifier cette équation aux dérivées partielles*.

257. Réciproquement, on peut établir que toute intégrale *complète* de l'équation (12), c'est-à-dire toute fonction V des $r+1$ variables $t, q_1, q_2, \ldots q_r$ qui satisfait à cette équation et qui renferme r constantes arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$, en dehors de celle qu'on peut toujours lui ajouter puisque V n'entre dans l'équation que par ses dérivées partielles, jouit de toutes les propriétés de la fonction V définie précédemment

et peut être prise pour celle-ci. En effet, posons pour abréger, dans l'équation (12),

$$\frac{\partial V}{\partial t} = p, \ \frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \ldots, \frac{\partial V}{\partial q_r} = p_r.$$

Elle deviendra

$$(12') \qquad p + F(t, q_1, \ldots q_r, p_1, \ldots p_r) = 0,$$

ou, sous forme réduite, $f(t, q_1, \ldots q_r, p, p_1, \ldots p_r) = 0$. Le problème de trouver une intégrale complète de cette équation peut évidemment être posé sous la forme suivante : lui adjoindre r autres équations de la forme

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} H_1(t, q_1, \ldots q_r, p_1, \ldots p_r) = a_1, \\ H_2(t, q_1, \ldots q_r, p_1, \ldots p_r) = a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ H_r(t, q_1, \ldots q_r, p_1, \ldots p_r) = a_r, \end{array} \right.$$

($a_1, a_2, \ldots a_r$ étant des constantes arbitraires), qui soient telles que les valeurs de $p, p_1, \ldots p_r$, fournies par les $r + 1$ équations (12') et (13), étant substituées dans l'expression

$$p\,dt + p_1\,dq_1 + p_2\,dq_2 \cdots + p_r\,dq_r,$$

rendent celle-ci une différentielle exacte par rapport à $t, q_1, q_2, \ldots q_r$. Mais, comme on l'a rappelé plus haut, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que les équations (12') et (13) vérifient les égalités suivantes, où i et k sont deux nombres quelconques de la série $1, 2, \ldots r$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial H_i}{\partial p} - \dfrac{\partial f}{\partial p}\dfrac{\partial H_i}{\partial t} + (f, H_i) = 0, \\ \dfrac{\partial H_i}{\partial t}\dfrac{\partial H_k}{\partial p} - \dfrac{\partial H_i}{\partial p}\dfrac{\partial H_k}{\partial t} + (H_i, H_k) = 0. \end{array} \right.$$

La première se réduit, à cause des relations évidentes

$$\frac{\partial H_i}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial p} = 1,$$

à

$$-\frac{\partial H_i}{\partial t} + (f, H_i) = 0,$$

mais comme les dérivées partielles de f par rapport aux p_i, q_i se rédui-

sent évidemment à celles de F, cette équation revient à

$$-\frac{\partial H_i}{\partial t} + (F, H_i) = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{\partial H_i}{\partial t} + (H_i, H) = 0.$$

Rapprochée de l'équation (6), elle montre que chacune des équations (13) est une intégrale du système canonique (4), comme les équations (7) dont il a été question plus haut.

La seconde se réduit, puisque H_i, H_k ne renferment pas explicitement p, à la relation

$$(H_i, H_k) = 0,$$

qui nous montre que nos intégrales (13) satisfont à la même identité que nous avons admise plus haut (**255**) entre les fonctions φ_i, φ_k. Ainsi les fonctions $H_1, H_2, \ldots H_r$, que suppose la recherche de notre intégrale complète, jouissent exactement des mêmes propriétés que nous avons attribuées plus haut aux fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_r$, et peuvent les remplacer. L'intégrale complète que l'on déduira du système (12′) et (13) a donc aussi les mêmes propriétés que la fonction V considérée plus haut. On a donc ce beau théorème : *Si l'on connaît une intégrale complète* V *de l'équation aux dérivées partielles*

$$\frac{\partial V}{\partial t} + F\left(t, q_1, \ldots q_r, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \ldots \frac{\partial V}{\partial q_r}\right) = 0,$$

renfermant r constantes arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$, autres que celle qu'on peut toujours ajouter à V, *on aura le système entier des intégrales du système canonique*

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

en posant les 2r équations

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = p_2, \ldots \frac{\partial V}{\partial q_r} = p_r,$$
$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \ldots \frac{\partial V}{\partial \alpha_r} = \beta_r,$$

$\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_r$ étant des constantes arbitraires.

Hamilton a montré que l'intégrale définie V que nous avons considérée au n° **251** vérifie l'équation (12).

258. Il est bon d'observer que l'on pourrait procéder autrement; tirer des équations $\varphi_1 = \alpha_1$, $\varphi_2 = \alpha_2$, ... $\varphi_r = \alpha_r$ les valeurs des q_i en

fonction des p_i, et former une différentielle totale exacte par rapport aux variables $t, p_1, p_2, \dots p_r$. On arriverait à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial W}{\partial t} - F\left(t, \frac{\partial W}{\partial p_1}, \frac{\partial W}{\partial p_2}, \dots \frac{\partial W}{\partial p_r}, p_1, p_2, \dots p_r\right) = 0.$$

Formons, comme exemple, l'équation (12) pour le cas d'un système de points matériels libres, rapportés à des axes coordonnés rectangulaires. Les variables q sont ici x_i, y_i, z_i. L'équation

$$T = \frac{1}{2} \Sigma m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)$$

nous donne

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial q_i'} = m_i x_i', \quad m_i y_i', \quad m_i z_i',$$

$$H = T - U = \frac{1}{2} \Sigma \frac{p_i^2}{m_i} - U,$$

et l'équation (12) prendra la forme

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \Sigma \frac{1}{m_i} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)^2\right] = U.$$

Les équations du mouvement seront d'ailleurs

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i', \quad \frac{dy_i}{dt} = y_i', \quad \frac{dz_i}{dt} = z_i',$$

$$m_i \frac{dx_i'}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad m_i \frac{dy_i'}{dt} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad m_i \frac{dz_i'}{dt} = \frac{\partial U}{\partial z_i}.$$

259. Tout ce qui précède subsiste si la fonction caractéristique H renferme explicitement le temps, mais, dans le cas contraire, étudié d'abord par Hamilton, le problème se simplifie. Supposons donc que l'on ait

$$H = F(q_1, q_2, \dots q_r, p_1, p_2, \dots p_r).$$

On sait déjà que

$$H = h$$

est une des intégrales du système (4), h étant constant. Le système

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

fournit les $2r-1$ équations, ne renfermant ni t ni dt,

$$\text{(A)}\qquad \frac{dq_1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} = \cdots = \frac{dq_r}{\frac{\partial H}{\partial p_r}} = \frac{dp_1}{-\frac{\partial H}{\partial q_1}} = \cdots = \frac{dp_r}{-\frac{\partial H}{\partial q_r}}.$$

Concevons qu'on en ait obtenu $r-1$ intégrales

$$(14)\qquad \varphi_1 = \alpha_1, \quad \varphi_2 = \alpha_2, \quad \ldots, \quad \varphi_{r-1} = \alpha_{r-1},$$

qui ne renfermeront pas t explicitement; les fonctions φ_i satisferont nécessairement à l'équation (6), laquelle se réduit ici à

$$(\varphi_i, H) = 0.$$

Admettons d'ailleurs que l'on ait toujours

$$(\varphi_i, \varphi_k) = 0, \quad (i, k = 1, 2, \ldots, r-1).$$

Si de ces $r-1$ équations (14) et de l'équation $H = h$ on tire les valeurs de $p_1, p_2, \ldots p_r$ en fonction de $q_1, q_2, \ldots q_r$ (t n'y figurant pas), il résulte d'un théorème établi plus haut que l'expression

$$\bar{p}_1 dq_1 + \bar{p}_2 dq_2 + \cdots + \bar{p}_r dq_r - F(q_1, \ldots q_r, \bar{p}_1, \ldots \bar{p}_r)dt$$

sera une différentielle totale exacte par rapport aux variables $q_1, q_2, \ldots q_r, t$. Mais

$$F(q_1, \ldots, q_r, \bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_r)$$

se réduit identiquement à h, puisque $H = h$ est une des équations qui ont fourni les valeurs $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots \bar{p}_r$ des p_i. Donc, hdt étant une différentielle exacte en t,

$$\bar{p}_1 dq_1 + \cdots + \bar{p}_r dq_r$$

qui ne renferme que $q_1, q_2, \ldots q_r$, devra être séparément une différentielle exacte par rapport à ces variables. Si l'on désigne par V_1 son intégrale, on aura évidemment

$$V = V_1 - ht$$

pour l'intégrale complète de l'équation (12), et comme V_1 seul renferme les arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{r-1}$, les r intégrales qui complètent la solution du problème seront

$$(15)\qquad \frac{\partial V_1}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial V_1}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V_1}{\partial \alpha_{r-1}} = \beta_{r-1}, \quad \frac{\partial V_1}{\partial h} - t = \beta_r.$$

Ainsi, dans l'hypothèse où H ne renferme pas le temps, il suffit de

trouver $r - 1$ intégrales du système (A) pour effectuer l'intégration du système canonique. L'équation aux dérivées partielles qui définit V_1 est celle-ci :

$$F\left(q_1, q_2, \ldots, q_r, \frac{\partial V_1}{\partial q_1}, \frac{\partial V_1}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial V_1}{\partial q_r}\right) = h.$$

260. Pour éclaircir cette méthode, appliquons-la au *mouvement d'un point* M *de masse* 1 *sollicité vers un centre fixe* O *par une force accélératrice qui est une fonction $f(r)$ de la distance* OM $= r$.

Le mouvement ayant lieu dans un plan, on a ici $q_1 = x$, $q_2 = y$, $p_1 = x'$, $p_2 = y'$; les équations du mouvement sont

$$(16) \quad \frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{dx'}{dt} = -\frac{f(r)}{r}x, \quad \frac{dy'}{dt} = -\frac{f(r)}{r}y,$$

et l'on a

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

La fonction H a pour expression

$$H = T - U = \tfrac{1}{2}(x'^2 + y'^2) + \int f(r)dr,$$

et l'on vérifie en effet que l'on a

$$\frac{\partial H}{\partial x'} = x', \quad \frac{\partial H}{\partial y'} = y', \quad \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{f(r)}{r}x, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{f(r)}{r}y.$$

L'intégrale immédiate $H = h$ est ici

$$\tfrac{1}{2}(x'^2 + y'^2) + \int f(r)dr = h;$$

c'est celle des forces vives. On a aussi, par les équations (16),

$$x\frac{dy'}{dt} - y\frac{dx'}{dt} = 0, \quad \text{d'où} \quad xy' - yx' = \varphi(x, y, x', y') = \alpha,$$

c'est l'intégrale des aires. Elle doit satisfaire à l'équation $(\varphi, H) = 0$, ce qui se vérifie immédiatement.

Tirons des équations $H = h$ et $\varphi = \alpha$ les valeurs de x', y' en x et y. Nous aurons sans peine

$$y' = \frac{\alpha + yx'}{x}, \quad x'^2 + \frac{(\alpha + yx')^2}{x^2} = 2\left[h - \int f(r)dr\right],$$

d'où l'on tire la valeur de $\bar{x}'$, puis celle de $\bar{y}'$, sous les formes suivantes

$$\bar{x}' = \frac{-\alpha y \pm xR}{r^2}, \quad \bar{y}' = \frac{\alpha x \pm yR}{r^2},$$

en posant

$$R = \sqrt{2\left[h - \int f(r)dr\right]r^2 - \alpha^2}.$$

C'est une fonction de r seulement. On aura donc, par cette substitution,

$$\overline{x'}dx + \overline{y'}dy = \frac{\alpha(xdy - ydx)}{x^2 + y^2} \pm \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} R = \alpha\, d.\, \mathrm{arc\,tg}\frac{y}{x} \pm \frac{Rdr}{r}.$$

Comme R ne renferme que r, une simple quadrature donnera

$$V_1 = \alpha\, \mathrm{arc\,tg}\frac{y}{x} \pm \int \frac{Rdr}{r} + \mathrm{const.}$$

D'après cela, vu le théorème général du numéro **257**, les deux dernières intégrales du problème seront

$$\frac{\partial V_1}{\partial \alpha} = \mathrm{arc\,tg}\frac{y}{x} \pm \int \frac{\partial R}{\partial \alpha}\frac{dr}{r} = \beta_1,$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial h} - t = \pm \int \frac{\partial R}{\partial h}\frac{dr}{r} - t = \beta_2,$$

ou, calcul fait,

$$\mathrm{arc\,tg}\frac{y}{x} \mp \alpha \int \frac{dr}{rR} = \beta_1, \quad \pm \int \frac{rdr}{R} - t = \beta_2.$$

La première est l'équation en coordonnées polaires de la trajectoire. La seconde entre r et t fait connaître le rayon vecteur en fonction du temps.

261. On a supposé, dans la théorie qui précède, que les intégrales $\varphi = \alpha$ du système canonique vérifiaient une certaine identité $(\varphi_i, \varphi_k) = 0$. On doit à Poisson le remarquable théorème qui suit :

Soient

$$\varphi(t, q_1, \ldots, q_r, p_1, \ldots, p_r) = \alpha, \quad \psi(t, q_1, \ldots, q_r, p_1, \ldots, p_r) = \beta$$

deux intégrales, résolues par rapport aux constantes arbitraires α *et* β, *du système canonique* (4). *On aura, en vertu de ces équations* (4), *l'égalité*

$$(\varphi, \psi) = \mathrm{const.}$$

Remarquons d'abord que les fonctions φ, ψ satisfont (**254**) à l'équa-

tion (6) identiquement, donc

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+(\varphi, \mathrm{H})=0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial t}+(\psi, \mathrm{H})=0,$$

ou encore

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\sum_k\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_k}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_k}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_k}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_k}\right)=0,\\ &\frac{\partial\psi}{\partial t}+\sum_k\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_k}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_k}-\frac{\partial\psi}{\partial p_k}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_k}\right)=0, \end{aligned} \right.$$

l'indice k sous le signe Σ indique que la somme s'étend aux valeurs, $1, 2, \ldots r$, de k.

Cherchons la dérivée totale de la fonction (φ, ψ) par rapport à t; nous aurons

$$(18) \quad \frac{d}{dt}(\varphi, \psi)=\sum_i\left(\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}+\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial p_i}-\frac{\partial\psi}{\partial q_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial q_i}\right).$$

Or, on a évidemment

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_i\partial t}+\sum_k\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_i\partial q_k}\frac{dq_k}{dt}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_i\partial p_k}\frac{\partial p_k}{dt}\right),$$

ce qui, en vertu des équations (4) auxquelles satisfont les quantités p_k, q_k, peut s'écrire

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_i\partial t}+\sum_k\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_i\partial q_k}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_k}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_i\partial p_k}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_k}\right).$$

Mais si l'on dérive partiellement par rapport à q_i la première équation (17), on a

$$0=\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_i\partial t}+\sum_k\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_i\partial q_k}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_k}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_i\partial p_k}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_k}+\frac{\partial\varphi}{\partial q_k}\frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial q_i\partial p_k}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_k}\frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial q_i\partial q_k}\right)$$

car on peut intervertir l'ordre des dérivations partielles. Retranchant cette équation de la précédente, on a

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}=\sum_k\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_k}\frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial q_i\partial q_k}-\frac{\partial\varphi}{\partial q_k}\frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial q_i\partial p_k}\right).$$

On obtiendra les valeurs de

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial p_i}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial q_i}$$

en changeant dans cette équation φ en ψ ou q_i en p_i. Substituons ces diverses valeurs dans l'équation (18); nous aurons un résultat que nous pourrons écrire sous la forme suivante, en désignant par $\sum\limits_{i,k}$ une somme dans laquelle les indices i et k reçoivent successivement toutes les valeurs $1, 2, \cdots r$:

$$\frac{d}{dt}(\varphi, \psi) =$$

$$\sum_{i,k}\left[\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_k}\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_k} - \frac{\partial\varphi}{\partial q_k}\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_k}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p_k}\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_k} - \frac{\partial\psi}{\partial q_k}\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_k}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{\partial\psi}{\partial q_i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_k}\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_k} - \frac{\partial\varphi}{\partial q_k}\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_k}\right) - \frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p_k}\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_k} - \frac{\partial\psi}{\partial q_k}\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_k}\right)\right].$$

Dans l'expression sous le signe Σ, si i et k ont même valeur, $i = k$, les termes se détruisent deux à deux. Si i et k sont différents, le coefficient de

$$\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_k}$$

par exemple, savoir

$$\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\frac{\partial\varphi}{\partial p_k} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\frac{\partial\psi}{\partial p_k},$$

ne différera que par son signe du coefficient de la même dérivée de H dans un autre terme de la somme, celui où les indices i et k auraient échangé leurs valeurs. La même chose a lieu pour les coefficients des autres dérivées

$$\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_k}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_k}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_k}.$$

Donc tous les termes se détruiront, et l'on aura

$$\frac{d}{dt}(\varphi, \psi) = 0,$$

et par conséquent

$$(\varphi, \psi) = \text{const.},$$

ce qui est le théorème de Poisson.

262. L'importance de ce théorème est, au premier abord, incalculable, puisque la fonction (φ, ψ) étant égalée à une constante, fournirait une nouvelle intégrale $\chi = \gamma$ des équations (4); de celle-ci, combinée

avec chacune des précédentes de la même manière, on en déduirait deux autres, et ainsi de suite, en sorte que la connaissance de deux intégrales suffirait pour achever la solution. Malheureusement, il peut arriver et il arrive souvent, ou bien que l'équation

$$(\varphi, \psi) = \text{const.}$$

se réduit à une pure identité, ou bien qu'elle rentre dans les intégrales $\varphi = \alpha$, $\psi = \beta$, et n'apprend rien de nouveau. Néanmoins, les travaux de Jacobi, de Bour et de M. Bertrand ont montré comment, dans ces cas-là, on peut tirer parti du théorème de Poisson pour avancer l'intégration, et mis en relief les relations existant entre le problème de l'intégration des équations canoniques et celui de l'intégration des équations aux dérivées partielles du 1er ordre. Mais ces recherches sortent de notre cadre et nous renverrons aux ouvrages indiqués ci-dessous (1).

Exercice.

Un point M est attiré vers deux centres fixes F et F_1 en raison inverse du carré de ses distances r et r_1 à ces deux points. Déterminer son mouvement par la méthode de Jacobi.

R. Soit $2c$ la distance FF_1; prenons deux variables indépendantes q et q_1 telles que

$$2q = r + r_1, \qquad 2q_1 = r - r_1.$$

On aura, en exprimant v en fonction de q et de q_1, la masse du mobile étant 1,

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{q^2 - q_1^2}{q^2 - c^2}q'^2 + \frac{q^2 - q_1^2}{c^2 - q_1^2}q_1'^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{q^2 - c^2}{q^2 - q_1^2}p^2 + \frac{c^2 - q_1^2}{q^2 - q_1^2}p_1^2\right).$$

La fonction des forces est, μ et μ_1 étant constants,

$$U = \frac{\mu}{r} + \frac{\mu_1}{r_1} = \frac{\mu}{q + q_1} + \frac{\mu_1}{q - q_1};$$

elle ne renferme pas t. L'équation d'Hamilton est donc, h étant la constante des forces vives,

$$\frac{q^2 - c^2}{q^2 - q_1^2}\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right)^2 + \frac{c^2 - q_1^2}{q^2 - q_1^2}\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}\right)^2 = \frac{2\mu}{q + q_1} + \frac{2\mu_1}{q - q_1} + 2h,$$

(1) Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik*; — Bour, *Sur l'intégration des équations diff. de la mécanique* (Journ. de Liouville, t. XX). — Bertrand, Notes de la *Méc. Analyt.* de Lagrange; — Graindorge, *Intégration des équations de la mécanique.*

et on la partage en deux autres en posant $V = w + w_1$, w étant fonction de q seul, w_1 de q_1 seul. On a les équations différentielles

$$(q^2 - c^2)\left(\frac{dw}{dq}\right)^2 - 2(\mu + \mu_1) q - 2hq^2 = -2\alpha,$$

$$(c^2 - q_1^2)\left(\frac{dw_1}{dq_1}\right)^2 + 2(\mu - \mu_1) q_1 + hq_1^2 = 2\alpha,$$

α désignant une constante arbitraire. On a, par quadratures elliptiques,

$$V_1 = \int dq \sqrt{\frac{2hq^2 + 2(\mu + \mu_1) q - 2\alpha}{q^2 - c^2}} + \int dq_1 \sqrt{\frac{2\alpha + 2(\mu_1 - \mu) q - 2hq_1^2}{c^2 - q_1^2}}.$$

Les intégrales du problème sont alors, d'après la théorie de Jacobi,

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = \beta, \quad \frac{\partial V}{\partial h} = t + \varepsilon, \quad \frac{\partial V}{\partial q} = p, \quad \frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1.$$

CHAPITRE XVIII.

DES PERCUSSIONS.

262. On donne le nom de *percussions* ou *forces instantanées* à des forces qui agissent avec une très grande intensité pendant un temps extrêmement court, impossible à évaluer pratiquement. On a cru autrefois que ces forces imprimaient aux corps des vitesses finies pendant un temps rigoureusement nul, ce qui est impossible, et de là le nom de *forces instantanées*. Les chocs, les explosions développent des forces appartenant à cette catégorie.

Les formules et les principes de la mécanique générale sont d'ailleurs parfaitement applicables à ces forces comme à toutes les autres; seulement, à raison de l'impossibilité où l'on est d'estimer la durée d'une percussion ainsi que les variations de grandeur et de direction, pendant cette durée, des accélérations qu'elle communique aux points matériels, on est convenu d'introduire dans les questions où les percussions interviennent, non la mesure de leurs intensités, mais seulement leur effet total et définitif, comme il suit :

Soient X, Y, Z les composantes rectangulaires d'une force P appliquée

à un point de masse m, τ la durée de son action; on appelle composantes de l'*impulsion totale* de la force P les quantités

$$\int_0^\tau X dt, \quad \int_0^\tau Y dt, \quad \int_0^\tau Z dt.$$

Si le point m était libre et d'abord en repos, les équations (1) du nº **129**, multipliées par dt et intégrées entre o et τ, nous donneraient

$$(1) \qquad \int_0^\tau X dt = mv_x, \quad \int_0^\tau Y dt = mv_y, \quad \int_0^\tau Z dt = mv_z,$$

v_x, v_y, v_z désignant les composantes de la vitesse acquise au bout du temps τ. Ainsi, *l'impulsion totale d'une force* P *est représentée, en grandeur et en direction, par la quantité de mouvement que la force imprimerait à un point matériel libre et en repos.*

Cela posé, dans les calculs relatifs aux percussions, nous ferons figurer au lieu de ces forces elles-mêmes, leurs impulsions totales pendant la durée très courte τ de leur action, et ce sont ces impulsions que, pour abréger, nous désignerons sous le nom de *percussions*, en évitant avec soin de confondre cette manière de représenter leur effet total avec la mesure de leur intensité proprement dite.

264. Soient m la masse d'un point, X, Y, Z les composantes rectangulaires d'une des forces P qui agissent sur lui, depuis l'époque $t = 0$ jusqu'à $t = \tau$; v_x, v_y, v_z les composantes de la vitesse finale du point; v_{0x}, v_{0y}, v_{0z} celles de la vitesse initiale. De l'équation du mouvement d'un point libre

$$m \frac{dv_x}{dt} = \Sigma X,$$

on tire par l'intégration entre o et τ,

$$m (v_x - v_{0x}) = \Sigma \int_0^\tau X \, dt.$$

Soient ϖ_x, ϖ_y, ϖ_z les composantes de l'impulsion de la force P, et u la *vitesse gagnée,* c'est-à-dire la vitesse qui, composée avec la vitesse initiale v_0, donnerait la vitesse finale v. L'équation précédente se mettra sous la forme

$$(1) \qquad mu_x = \Sigma \varpi_x, \quad mu_y = \Sigma \varpi_y, \quad mu_z = \Sigma \varpi_z,$$

les deux dernières s'obtenant par le même procédé.

Observant que chaque point d'un système matériel donne lieu à des équations semblables, on fera la somme des équations relatives à un même axe pour tous les points, et l'on aura

$$(2) \qquad \Sigma m u_x = \Sigma \varpi_x, \quad \Sigma m u_y = \Sigma \varpi_y, \quad \Sigma m u_z = \Sigma \varpi_z,$$

les Σ des seconds membres s'étendant à tous les points et à toutes les forces; mais comme les forces intérieures sont deux-à-deux égales et opposées, les composantes de leurs impulsions totales sont évidemment deux-à-deux égales et de signes contraires et se détruisent; les seconds membres des équations (2) ne renferment donc que les impulsions des forces extérieures.

Soient x, y, z les coordonnées du point m à l'époque τ. On a facilement, par les équations (1),

$$m(yu_z - zu_y) = \Sigma(y\varpi_z - z\varpi_y),$$

et en sommant les équations semblables pour tous les points d'un système, et opérant de même pour les trois axes,

$$(3) \quad \begin{cases} \Sigma m(yu_z - zu_y) = \Sigma(y\varpi_z - z\varpi_y), \\ \Sigma m(zu_x - xu_z) = \Sigma(z\varpi_x - x\varpi_z), \\ \Sigma m(xu_y - yu_x) = \Sigma(x\varpi_y - y\varpi_x). \end{cases}$$

Les Σ des seconds membres s'étendent à tous les points et à toutes les forces; mais lorsqu'il s'agit de forces instantanées, la durée τ de leur action étant toujours excessivement petite, on admet que les points du système ne se déplacent pas sensiblement pendant ce temps, ou que x, y, z restent constants. On a donc

$$\int_0^\tau (yZ - zY)\,dt = y\int_0^\tau Z\,dt - z\int_0^\tau Y\,dt = y\varpi_z - z\varpi_y.$$

Comme, pour les forces intérieures, les moments $yZ - zY$ sont deux-à-deux égaux et de signes contraires (**170**), il en sera de même, d'après cette équation, des moments $y\varpi_z - z\varpi_y$ de leurs impulsions totales; les seconds membres des équations (3) ne renfermeront donc que les impulsions des forces extérieures. On pourra d'ailleurs, parmi ces dernières, négliger celles qui ne sont pas de forces instantanées, leurs impulsions totales pendant le temps τ étant tout à fait insensibles. Les équations (2) et (3) donnent alors les théorèmes suivants :

Quand un système de points matériels est soumis brusquement à des

percussions quelconques, 1° *la somme des quantités de mouvement gagnées par tous les points, en projection sur un axe quelconque, est égale à la somme des percussions extérieures, en projection sur le même axe;* 2° *la somme des moments des quantités de mouvement gagnées, par rapport à un axe quelconque, est égale à la somme des moments des percussions extérieures, par rapport au même axe.*

Si le système était en repos à l'instant où les forces instantanées viennent agir sur lui, on aurait $u = v$.

265. Ces théorèmes ont le même usage, pour déterminer le mouvement imprimé à un corps par les forces instantanées, que les théorèmes généraux du centre de gravité et des moments pour l'étude des mouvements continus. Ainsi, si V_0, V désignent les vitesses initiale et finale du centre de gravité, les équations (2) donnent

$$M(V_x - V_{0x}) = \Sigma\varpi_x, \quad \text{etc...},$$

et font connaître la variation de la vitesse du centre de gravité. On voit que *la quantité de mouvement du centre de gravité après le choc est la résultante de sa quantité de mouvement avant le choc, et de toutes les percussions extérieures qu'on aurait transportées en ce point.*

De même, si un solide a un point fixe O, A, B, C étant ses moments principaux d'inertie relatifs à ce point, p, q, r les composantes de la rotation instantanée suivant les axes principaux après la percussion, p_0, q_0, r_0 avant la percussion, on aura, comme on sait (**191**),

$$\Sigma m(yv_z - zv_y) = Ap,$$
$$\Sigma m(yu_z - zu_y) = A(p - p_0),$$

et si M_x, M_y, M_z désignent les moments de la percussion par rapport aux axes principaux, les équations (3) deviendront

$$(4) \qquad A(p - p_0) = M_x, \quad B(q - q_0) = M_y, \quad C(r - r_0) = M_z.$$

266. Appliquons les formules (2) et (3) à un solide fixé par deux points O et O', en repos, et frappé par une percussion, pour déterminer la vitesse angulaire ω qui lui est communiquée autour de l'axe OO', les percussions sur les appuis O et O', et les conditions pour que ces percussions soient nulles.

Prenons OO' pour axe des z positifs, l'origine en O; soient α, β, γ les coordonnées du point M auquel est appliquée la force instantanée P; ϖ_x, ϖ_y, ϖ_z les composantes de l'impulsion totale de cette force; U, V, W,

les composantes de la percussion totale sur le point O; U′, V′, W′ sur le point O′; $a = OO'$. Observant que les réactions des appuis sont égales et contraires aux efforts qu'ils éprouvent, et que l'on a pour tout point du solide $u_x = v_x = -\omega y$, $u_y = v_y = \omega x$, $u_z = 0$, on tire des équations (2)

$$-\omega\Sigma my = \varpi_x - U - U', \quad \omega\Sigma mx = \varpi_y - V - V', \quad 0 = \varpi_z - W - W',$$

ou, M étant la masse du solide x_1, y_1 les coordonnées de son centre de gravité,

$$(5)\quad U + U' = \varpi_x + M\omega y_1, \quad V + V' = \varpi_y - M\omega x_1, \quad W + W' = \varpi_z.$$

De même, les équations (3) conduisent aux relations

$$(6)\quad \left\{ \begin{array}{l} aV' = -\beta\varpi_z + \gamma\varpi_y - \omega\Sigma mxz, \quad aU' = \gamma\varpi_x - \alpha\varpi_z + \omega\Sigma myz, \\ \omega\Sigma m(x^2 + y^2) = \alpha\varpi_y - \beta\varpi_x. \end{array} \right.$$

Cette dernière formule donne la vitesse angulaire imprimée au solide; elle est égale, H désignant le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe OO′, à

$$\frac{\alpha\varpi_y - \beta\varpi_x}{H},$$

c'est-à-dire *au moment de la percussion par rapport à l'axe fixe, divisé par le moment d'inertie du solide relatif à cet axe*. Les autres équations (5) et (6) déterminent U, U′, V, V′, W + W′, ou les percussions totales éprouvées par l'axe.

Si l'on demande que les points d'appui n'éprouvent aucune percussion, il faut poser $U = 0$, $V = 0$, ... etc., et les formules (5) donnent

$$\varpi_x = -M\omega y_1, \quad \varpi_y = M\omega x_1, \quad \varpi_z = 0,$$

dont la première se réduit aussi à $\varpi_x = 0$ si l'on fait passer, comme cela est permis, le plan XZ par le centre de gravité G du solide. Comme ϖ_x et ϖ_z sont nuls, la percussion ϖ se réduit à sa composante ϖ_y; 1° *elle est donc normale au plan passant par l'axe OO′ et le centre de gravité du solide*. On a ensuite

$$\omega = \frac{\alpha\varpi_y}{H} = \frac{\alpha M\omega x_1}{H}, \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{H}{Mx_1},$$

ce que montre, d'après le n° **198**, que 2° *la distance à laquelle la direction de la percussion passe de l'axe doit être égale à la longueur du pendule composé que formerait le solide, si l'axe OO′ était horizontal.*

Enfin, les équations (6) deviennent, par la substitution des résultats

précédents,

$$o = \gamma M\omega x_1 - \omega\Sigma mxz, \quad o = \omega\Sigma myz,$$

d'où l'on déduit

$$\Sigma mx(z-\gamma) = \Sigma mxz - \gamma Mx_1 = o, \; \Sigma my(z-\gamma) = \Sigma myz - \gamma My_1 = o,$$

c'est-à-dire que 3° *l'axe OO′ doit être un axe principal d'inertie du solide, relativement au point A où il est coupé par un plan mené normalement à cet axe par la direction de la percussion ϖ.*

Les conditions 1°, 2°, 3° réunies sont donc nécessaires et suffisantes pour que l'axe OO′ n'éprouve aucune percussion par suite du choc qu'éprouve le solide.

Le point C où la direction de la percussion, déterminée par les conditions précédentes, vient percer le plan XZ passant par l'axe OO′ et le centre de gravité G, se nomme le *centre de percussion.* On utilisait la propriété qui fait l'objet du théorème ci-dessus dans le *pendule de Robins*, dont on se servait autrefois pour évaluer la vitesse des projectiles de l'artillerie, mais que les appareils électro-balistiques ont aujourd'hui avantageusement remplacé.

267. *Théorème des forces vives appliqué aux percussions.* — Reprenons les équations (1), multiplions les respectivement par $v_x + v_{0x}$, $v_y + v_{0y}$, $v_z + v_{0z}$, et ajoutons-les. En observant que $u_x = v_x - v_{0x}$, etc., on aura

$$mv^2 - mv_0^2 = \Sigma\,[\varpi_x(v_x + v_{0x}) + \varpi_y(v_y + v_{0y}) + \varpi_z(v_z + v_{0z})].$$

D'autre part, ces équations (1) multipliées par u_x, u_y, u_z et ajoutées donnent de même

$$mu^2 = \Sigma\,(\varpi_x u_x + \varpi_y u_y + \varpi_z u_z).$$

Ajoutant membre à membre ces deux équations, on obtient

$$mv^2 - mv_0^2 + mu^2 = 2\,\Sigma\,(\varpi_x v_x + \varpi_y v_y + \varpi_z v_z),$$

et en faisant la somme des équations semblables pour tous les points du système,

$$(7) \qquad \Sigma\, mv_0^2 - \Sigma\, mv^2 = \Sigma\, mu^2 - 2\,\Sigma\,(v_x\varpi_x + v_y\varpi_y + v_z\varpi_z),$$

le dernier Σ s'étendant à toutes les forces extérieures et intérieures. Cette égalité a lieu pour des forces motrices quelconques et pour un intervalle de temps quelconque. Nous ne l'appliquerons ici qu'à la percussion qui résulte du choc de deux corps solides qui se rencontrent,

animés de vitesses quelconques, l'époque $t=0$ correspondant à l'instant où le choc commence. On sait que le choc s'accompagne d'une *déformation* des deux corps, croissante jusqu'à un certain maximum, après quoi, selon que ces corps sont plus ou moins *élastiques*, ils reviennent plus ou moins exactement à leurs formes primitives, et la variation, due au choc, de la force vive du système des deux corps dépend de leur plus ou moins grande élasticité.

Admettons que l'époque τ corresponde, dans la formule (7), à l'instant de la déformation maximum, les vitesses v se rapportant donc à cet instant. Il n'y a à considérer ici, comme forces, que les réactions intérieures développées par le choc, car les autres forces sont négligeables pendant la durée très courte τ. Entre deux points M et M', ces réactions sont égales, opposées, dirigées suivant la ligne de jonction de ces deux points; leurs impulsions totales sont donc égales et de signes contraires, ce qui donne pour la somme des termes $v_x\varpi_x + v_y\varpi_y + v_z\varpi_z$ se rapportant à ces deux points.

$$(v_x - v'_x)\varpi_x + (v_y - v'_y)\varpi_y + (v_z - v'_z)\varpi_z = w_x\varpi_x + w_y\varpi_y + w_z\varpi_z,$$

w désignant la vitesse relative de M par rapport à M'. Or, a l'instant τ, les distances réciproques ayant acquis leurs valeurs extrêmes, la vitesse relative de deux points est nulle suivant la droite qui les joint, l'impulsion totale ϖ au contraire peut être considérée comme dirigée suivant cette droite, et le second membre de l'équation ci-dessus est nul. On a donc simplement, dans l'équation (7),

$$\Sigma mv_0^2 - \Sigma mv^2 = \Sigma mu^2.$$

Donc, dans le choc de deux corps d'élasticité quelconque, la perte de force vive qu'éprouve le système depuis l'instant où le choc commence jusqu'à l'instant de la déformation maximum, est égale à la somme des forces vives correspondant aux vitesses gagnées par tous les points.

Si les corps sont totalement dénués d'élasticité, la déformation maximum persiste intégralement; l'instant de la déformation maximum coïncide donc avec la fin de la période de choc, et le théorème précédent devient alors le *Théorème de Carnot.*

S'il s'agit du choc de deux corps parfaitement élastiques, le raisonnement peut être simplifié. En les considérant comme un seul système matériel et négligeant toujours les actions extérieures, on a, l'énergie

totale du système restant constante (181),

$$T - T_0 = \Pi_0 - \Pi,$$

T_0, Π_0 se rapportant au commencement, T, Π à la fin du choc. Puisque les deux corps reprennent exactement à la fin du choc les formes respectives qu'ils avaient au commencement, et que, à cause de la valeur très petite de τ, les positions relatives des deux corps ne changent pas d'une manière appréciable pendant ce temps, on peut admettre que les points du système se retrouvent sensiblement dans les mêmes positions relatives au commencement et à la fin de la percussion; la fonction Π reprend donc la même valeur, et $\Pi_0 - \Pi$ est nul. On a donc $T = T_0$, donc,

Lorsque deux corps parfaitement élastiques viennent à se choquer, il n'en résulte aucune variation dans la force vive totale du système des deux corps.

Exercices.

1. Deux sphères homogènes et parfaitement élastiques de masses m, m', animées des vitesses de translation respectives v_0, v'_0 suivant la droite qui joint leurs centres, se choquent. Déterminer leur mouvement après le choc, et discuter le cas 1° où les masses sont égales; 2° où l'un des corps est en repos.

R. On prouve d'abord que le choc ne produira aucune rotation; puis, soient v, v' les vitesses des centres après le choc, comptées positivement dans un sens sur la ligne des centres. Le principe du centre de gravité fournit l'équation

$$mv + m'v' = mv_0 + m'v'_0;$$

le théorème de la conservation de la force vive ([illegible]) donne

$$mv^2 + m'v'^2 = mv_0^2 + m'v'^2_0.$$

Par la combinaison de ces équations on a

$$v = \frac{(m - m')\,v_0 + 2m'v'_0}{m + m'}, \quad v' = \frac{(m' - m)\,v'_0 + 2mv_0}{m + m'}.$$

2. Mêmes problèmes, les sphères étant dénuées de toute élasticité.

R. L'équation du centre de gravité subsiste. Le théorème de Carnot donne, u étant égal ici à $v - v_0$,

$$\Sigma mv^2 = \Sigma mv_0 v, \quad \text{ou} \quad mv\,(v - v_0) + m'v'\,(v' - v'_0) = 0.$$

Combinant les deux équations, on a

$$m\,(v - v_0)\,(v - v') = 0 \quad \text{ou} \quad v = v',$$

d'où l'on tire

$$v = v' = \frac{mv_0 + m'v'_0}{m + m'}.$$

3. Une sphère homogène, parfaitement élastique, vient frapper une surface fixe; on néglige le frottement. Démontrer que les vitesses du centre de la sphère, avant et après le choc, sont égales, également inclinées sur la normale à la surface, et dans un même plan avec cette normale.

R. Combiner le théorème du centre de gravité et celui des forces vives.

4. Même problème, dans l'hypothèse où la vitesse du centre, normale à la surface, serait diminuée par le choc dans le rapport de e à 1, e étant un coefficient moindre que l'unité.

R. Soient v_0, v les vitesses avant et après le choc, α_0 et α les angles aigus que font leurs directions avec le plan tangent. On a

$$\operatorname{tg} \alpha = e \operatorname{tg} \alpha_0, \quad v = \frac{v_0 \cos \alpha_0}{\cos \alpha}.$$

5. Une bille sphérique, pesante, d'élasticité e, est lancée avec une vitesse donnée de grandeur et de direction au dessus d'un plan horizontal fixe, sur lequel elle rebondit plusieurs fois. Déterminer les instants des chocs successifs, les points du plan où ils ont lieu, la vitesse après un choc quelconque et l'angle qu'elle fait avec le plan. On fait abstraction du frottement et de la résistance de l'air.

R. L'origine O étant au point de départ sur le plan, l'axe OX à l'intersection du plan donné et du plan vertical dans lequel le mouvement a lieu, soient v_0, α_0 les données initiales, v_n et α_n la vitesse et son inclinaison sur le plan après le n^{me} choc; x_n, t_n la distance et le temps compris entre le départ et ce n^{me} choc; on trouvera

$$\operatorname{tg} \alpha_n = e^n \operatorname{tg} \alpha_0, \quad v_n = v_0 \cos \alpha_0 \sqrt{1 + e^{2n} \operatorname{tg}^2 \alpha_0},$$

$$t_n = \frac{2v_0 \sin \alpha_0}{g} \frac{1 - e^n}{1 - e}, \quad x_n = \frac{2v_0^2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0}{g} \frac{1 - e^n}{1 - e}.$$

6. Établir les formules générales qui déterminent les effets du choc de deux corps libres quelconques, animés de mouvements quelconques, dans les deux hypothèses extrêmes de l'élasticité parfaite et de l'élasticité nulle.

R. Les composantes de la vitesse du centre de gravité de chacun des corps suivant ses axes principaux d'inertie, et les composantes de l'axe instantané de rotation suivant ces mêmes axes, sont donnés à l'instant où le choc commence; leurs valeurs après le choc, et l'intensité de la percussion réciproque, sont les treize inconnues du problème. Le théorème du n° 364 donne douze équations. Le théorème de la conservation de la force vive, dans le premier cas, celui de Carnot dans le second, fournissent la treizième équation.

CHAPITRE XIX.

DU FROTTEMENT.

268. Dans la mécanique rationnelle, on considère habituellement les corps solides comme incompressibles et leurs surfaces comme parfaitement polies, en sorte que les réactions qui s'exercent entr'eux sont nécessairement normales aux surfaces en contact. Ainsi, en étudiant l'équilibre ou le mouvement d'un point matériel sur une surface fixe, nous avons regardé l'action de celle-ci sur le point comme se réduisant à une force normale à la surface. Mais l'expérience montre que c'est là un cas limite, que l'on n'atteint jamais dans la réalité. Ainsi, lorsqu'un corps pesant repose par une face plane sur un plan horizontal, au lieu que la plus petite force horizontale appliquée à ce corps le mette en mouvement, on reconnait que la force doit dépasser pour cela une certaine limite. Donc, dans tous les cas où deux solides sont pressés l'un contre l'autre, il se développe aux points de contact, indépendamment de la réaction normale déjà signalée, une réaction *tangentielle* qui doit exercer une influence sensible sur l'équilibre ou le mouvement de ces corps, et que l'on appelle le *frottement.*

Cette réaction ne doit évidemment dépendre que des situations *relatives* des deux corps; nous pouvons donc toujours raisonner comme si l'un d'eux était fixe. Cela admis, l'expérience montre que le frottement ne suit pas les mêmes lois, suivant que l'autre corps est en *repos* ou en *mouvement*, et, dans ce dernier cas, suivant que son mouvement par rapport au corps fixe consiste dans un *glissement* des deux surfaces l'une sur l'autre, ou dans un simple *roulement.* Nous devons donc examiner successivement ces différents cas, en commençant par celui où les corps sont en repos relatif et exposant les lois du *frottement statique* telles qu'elles ont été données par Coulomb et par Morin.

269. *Frottement statique.* — Lorsqu'un corps solide s'appuie contre une surface fixe et qu'une force tend à la déplacer sur cette surface, la réaction tangentielle que celle-ci exerce sur le corps en sens contraire du mouvement qu'il tend à prendre, croit avec la force jusqu'à un certain maximum au-delà duquel le glissement a lieu, et qu'on nomme le *frottement au départ.* Ce frottement maximum est indépendant de

l'étendue des surfaces en contact; il est proportionnel à la pression normale qui s'exerce entr'elles, et dépend d'ailleurs essentiellement de la nature des surfaces frottantes.

Il faut que la pression n'atteigne pas une valeur telle qu'elle produise l'*écrasement*. En outre, la première loi suppose que la pression totale reste la même. Si un corps est pressé avec une force donnée contre un plan dépoli, et si l'on augmente dans un certain rapport le nombre des éléments superficiels de contact, on comprend que la pression se répartissant sur un plus grand nombre d'éléments, son intensité varie dans le rapport inverse sur chaque élément. Il en résultera une diminution proportionnelle dans les frottements élémentaires, et par suite, l'intensité des réactions tangentielles variant en raison inverse de leur nombre, leur somme ou le frottement total ne variera pas.

L'étendue du contact étant sans influence, nous pouvons, pour plus de précision, en faire abstraction et réduire le corps à un point matériel M (fig. 119) et la surface fixe à son plan tangent AB. Soit P la force appliquée au point M, MN = N sa composante normale au plan, égale et opposée à la réaction normale de celui-ci; MT = T sa composante tangentielle, égale et opposée à la réaction tangentielle du plan ou au frottement F, tant que T ne dépassera pas la limite que nous avons appelée le *frottement au départ*, et qui, d'après les lois énoncées plus haut, a pour valeur Nf, f étant un coefficient qui dépend uniquement de la nature des surfaces frottantes. On appelle f le ***coefficient de frottement au départ***.



Fig. 119.

Le point M restera donc en repos tant que T sera $< Nf$; il se déplacera sur la surface dès que T dépassera cette limite. On voit que le coefficient f est donné par la relation

$$f = \frac{T}{N},$$

T se rapportant à l'instant où le mouvement commence à se produire. Mais le triangle MNP donne la relation

$$\frac{T}{N} = \text{tg PMN}, \quad \text{ou} \quad f = \text{tg}\ \varepsilon,$$

ε désignant l'angle que fait la force appliquée au mobile avec la normale

à AB. Cet angle ε se nomme ***l'angle de frottement.*** Il faut donc et il suffit, pour l'équilibre, que la force P fasse avec la normale un angle moindre que l'angle de frottement.

270. Nous allons montrer, par quelques exemples, comment l'on tient compte des réactions de frottement dans les questions de statique.

1er *Problème.* — ***Un point pesant*** **M** ***est posé sur un plan incliné dépoli, faisant avec l'horizon un angle α; on demande la plus grande valeur de α pour laquelle l'équilibre est possible.***

Le poids P du corps, force verticale, donne une composante $N = P \cos \alpha$ normale au plan, une autre $T = P \sin \alpha$ parallèle au plan suivant la ligne de plus grande pente. Lorsque α a sa plus grande valeur compatible avec l'équilibre, on a

$$T = Nf,$$

f étant le coefficient de frottement au départ pour les corps en contact. De là la relation

$$P \sin \alpha = Pf \cos \alpha, \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg} \alpha = f = \operatorname{tg} \varepsilon.$$

C'est donc lorsque l'inclinaison α est égale à l'angle de frottement que la limite d'équilibre est atteinte : de là un moyen de mesurer l'angle ε et par suite le coefficient f.

2me *Problème.* — ***Deux points pesants*** **M** ***et*** **M'** (fig. 120) ***s'appuient sur deux plans inclinés dépolis*** **BA, BC** ***et sont en outre réunis par un fil qui passe, sans frottement, sur une poulie*** **D** ***située verticalement au-dessus du sommet commun*** **B** ***des deux plans. Quelle est la position des points*** **M, M'**, ***lorsque le mouvement est sur le point de se produire dans le sens*** **BA?**

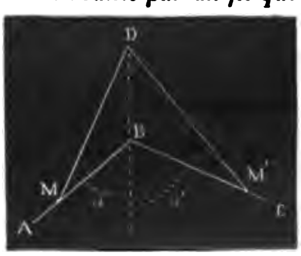


Fig. 120.

Soient α, α' les inclinaisons respectives des plans BA, BC sur la verticale; P, P' les poids des masses M, M'; f, f' les coefficients respectifs de frottement sur BA, BC; τ la tension du fil; θ, θ' les angles que forment les deux brins du fil avec la verticale dans la position d'équilibre extrême que l'on considère.

Projetant les forces qui sollicitent le point M, supposé libre, suivant BA

et normalement à BA, on a les égalités

$$(\alpha) \quad \begin{cases} P \cos \alpha - Nf - \tau \cos(\alpha - \theta) = 0, \\ P \sin \alpha - N - \tau \sin(\alpha - \theta) = 0. \end{cases}$$

Le même calcul, appliqué au point M′, en observant que pour celui-ci le frottement agit dans le sens BC, donne

$$(\beta) \quad \begin{cases} P' \cos \alpha' + N'f' - \tau \cos(\alpha' - \theta') = 0, \\ P' \sin \alpha' - N' - \tau \sin(\alpha' - \theta') = 0. \end{cases}$$

Eliminant N entre les équations (α), on a d'abord

$$P(\cos \alpha - f \sin \alpha) - \tau [\cos(\alpha - \theta) - f \sin(\alpha - \theta)] = 0,$$

ou, en remplaçant f par tg ε, ε étant l'angle de frottement pour le plan AB,

$$P \cos(\alpha + \varepsilon) - \tau \cos(\alpha - \theta + \varepsilon) = 0.$$

Eliminant de même N′ entre les équations (β) et posant $f' = \text{tg}\, \varepsilon'$, on a

$$P' \cos(\alpha + \varepsilon) - \tau (\alpha' - \theta' - \varepsilon') = 0,$$

et si l'on élimine τ entre ces deux égalités, on a pour la relation entre θ et θ′ qui répond à l'équilibre extrême

$$P \cos(\alpha + \varepsilon) \cos(\alpha' - \theta' - \varepsilon') = P' \cos(\alpha' - \varepsilon') \cos(\alpha - \theta + \varepsilon).$$

D'ailleurs, les triangles MBD, M′BD donnent la relation suivante, où l est la longueur totale du fil et h la distance DB:

$$l = MD + DM' = \frac{h \sin \alpha}{\sin(\alpha - \theta)} + \frac{h \sin \alpha'}{\sin(\alpha' - \theta')};$$

cette équation, jointe à la précédente, détermine θ et θ′ et achève la solution.

271. 3^me *Problème.* — *Un prisme rectangle* EFIH (fig. 121), *homogène et pesant, est posé sur un plan dépoli* AB *qui fait un angle* α *avec l'horizon, l'arête projetée en* H *étant horizontale. Déterminer dans quels cas le prisme glissera sur le plan, ou basculera autour de l'arête* H.

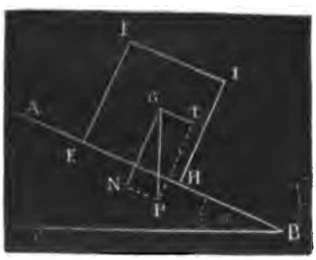


Fig. 121.

La force motrice se réduit au poids P du corps, appliqué verticalement au centre de gravité G, ou à ses deux composantes respectivement normale et parallèle au plan,

$$N = P \cos \alpha, \quad T = P \sin \alpha.$$

La somme X des composantes des forces parallèlement à AB est

$$X = P \sin \alpha - F,$$

F étant le frottement total. La valeur maximum de F étant $Nf = Pf \cos \alpha$, pour que le corps glisse, il faut que l'on ait

$$X = P(\sin \alpha - f \cos \alpha) > 0, \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg} \alpha > f,$$

c'est-à-dire que l'inclinaison α soit supérieure à l'angle de frottement. Si au contraire on a $\operatorname{tg} \alpha < f$, F sera égal à P sin α et le corps ne glissera pas; mais la somme des moments des forces N, T, par rapport à l'arête H est égale à

$$Tb - Na = P(b \sin \alpha - a \cos \alpha),$$

où $2a = EH$, $2b = IH$. Si cette somme est positive, c'est-à-dire si l'on a

$$\operatorname{tg} \alpha > \frac{a}{b},$$

le corps prendra un mouvement de rotation autour de H, il y aura renversement. Si, au contraire, $\operatorname{tg} \alpha > a : b$, le mouvement de rotation qui tend à se produire en sens contraire sera empêché par la réaction normale du plan; le corps restera en contact avec le plan AB par la face EH.

272. *Frottement dynamique.* — Lorsque les surfaces en contact ont un mouvement relatif de glissement, on reconnaît facilement que la réaction tangentielle ou le frottement ne cesse pas d'exister. Ainsi, un corps pesant lancé le long d'un plan horizontal sur lequel il s'appuie par une face plane, diminue de vitesse et finit par s'arrêter, ce qui n'aurait pas lieu si la réaction du plan fixe était normale à cette surface.

Les lois du frottement *dynamique* sont les suivantes : 1° le frottement est dirigé en sens inverse de la vitesse des points qui glissent sur la surface fixe et il est, comme le frottement statique, proportionnel à la pression normale et indépendant de l'étendue des surfaces en contact. De plus, il est *indépendant de la vitesse du corps*, mais intimement lié à la nature des surfaces frottantes. *Son coefficient est sensiblement inférieur*, pour les mêmes surfaces, *au coefficient du frottement au départ*.

C'est à cause de cela que, si l'on pose un corps sur un plan trop peu incliné pour qu'il y glisse sous l'action de la pesanteur, il suffit souvent d'une faible impulsion pour que le glissement commence, et alors il se continue de lui-même.

Il importe d'observer que le frottement statique entre deux corps n'a pas une valeur déterminée d'avance : il peut prendre, suivant l'intensité de la force motrice, toutes les valeurs depuis zéro jusqu'à ce maximum qu'on appelle frottement au départ. Il n'en est pas de même du frottement dynamique, dont la valeur est nécessairement déterminée dès que la pression est donnée.

Les expériences de Morin qui ont établi que l'influence de la vitesse relative est nulle sur le frottement dynamique, n'ont été faites qu'entre les limites ordinaires de rapidité des machines, en sorte qu'on n'est pas autorisé à étendre cette loi à des vitesses plus grandes. Il peut se faire qu'une grande vitesse élève le coefficient de frottement en provoquant des vibrations, en échauffant les surfaces, ce qui amène le *grippement*, etc. Mais dans d'autres cas, l'accroissement de vitesse a pour effet de diminuer l'adhésion, la pression réciproque, et par suite le frottement. Ainsi, des expériences de Bochet sur les rails de chemin de fer l'ont conduit, entre le frottement normal f_0, le frottement à grande vitesse f et la vitesse v, à la relation

$$f = \frac{f_0}{1 + 0{,}03v}.$$

Au contraire, lorsque les vitesses relatives des surfaces en contact sont très faibles, il semble que le frottement augmente quelque peu avec la vitesse.

Dans les applications, on fait d'ordinaire abstraction de ces cas exceptionnels et l'on se contente de donner, pour chaque couple de corps en contact, le coefficient du frottement au départ et celui du frottement dynamique pour les vitesses moyennes.

278. On voit, d'après les lois qui précèdent, que pour avoir égard au frottement dans le mouvement d'un point sur une surface fixe, il faudra joindre à la réaction normale de la surface une réaction tangentielle, directement opposée à la vitesse du point, et égale à la réaction normale N de la surface multipliée par le coefficient de frottement *dynamique* f. S'il s'agit d'un corps touchant la surface sur une certaine étendue, on appliquera de même à chaque élément superficiel du corps une réaction tangentielle, en sens contraire du mouvement de cet élément, et égale à la pression qu'il supporte multipliée par le coefficient f.

Comme application, cherchons à déterminer, dans un plan vertical

donné, *le lieu des extrémités des droites* AB *qui seraient parcourues dans un même temps* ($t=1$), *par un point pesant* M *de masse m, partant sans vitesse d'un point fixe* A, *le coefficient du frottement étant* $f = \operatorname{tg} \varepsilon$.

Pour établir l'équation du mouvement du point sur la droite AB, nommons θ l'inclinaison de AB sur la verticale AZ, r la distance AM. La composante de la force motrice mg parallèlement à AB, est $mg \cos \theta$; la composante normale est $mg \sin \theta$, donc $-\ mgf \sin \theta$ mesure la réaction due au frottement. On a donc l'équation différentielle

$$\frac{d^2r}{dt^2} = g(\cos\theta - f\sin\theta) = \frac{g\cos(\theta+\varepsilon)}{\cos\varepsilon}.$$

Intégrant et observant que pour $t=0$, $r=0$, $v=0$, on trouve

$$r = \frac{gt^2}{2}\,\frac{\cos(\theta+\varepsilon)}{\cos\varepsilon}.$$

Le mouvement sera donc uniformément varié. Pour $t=1$, on a

$$r = \frac{g}{2\cos\varepsilon}\cos(\theta+\varepsilon),$$

qui correspond au point B. C'est donc l'équation en coordonnées polaires de la courbe cherchée. On y reconnaît un cercle vertical, décrit sur le diamètre $g : 2\cos\varepsilon$ faisant un angle ε avec la verticale AZ.

II[e] *Problème. — Un plan incliné dépoli* AB *fait un angle* α *avec le plan horizontal. Un point pesant* M, *de masse m, est lancé d'une position donnée* A *avec une vitesse* v_0 *suivant la ligne de plus grande pente. Déterminer son mouvement.*

Soient x la distance du mobile à sa position initiale A, comptée positivement en descendant ou dans le sens AB, v la vitesse, $f = \operatorname{tg}\varepsilon$ le coefficient de frottement dynamique entre le point et le plan.

La composante du poids mg suivant AB étant $mg \sin \alpha$, la pression normale $mg \cos \alpha$, le frottement a pour expression $\mp\, mgf \cos \alpha$, le signe supérieur se rapportant au cas où le mobile descend, le signe inférieur au cas où il monte, ce qui aura lieu d'abord lorsque v_0 sera dirigé dans le sens BA.

L'équation différentielle du mouvement est donc

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = g(\sin\alpha \mp f\cos\alpha) = \frac{g\sin(\alpha\mp\varepsilon)}{\cos\varepsilon}.$$

On en tire, par deux intégrations successives, et en observant que $t = 0$ donne $v = v_0$ et $x = 0$,

$$(2) \qquad v = \frac{gt \sin(\alpha \mp \varepsilon)}{\cos \varepsilon} + v_0,$$

$$(3) \qquad x = \frac{gt^2 \sin(\alpha \mp \varepsilon)}{\cos \varepsilon} + v_0 t.$$

Dans ces équations, on prendra le signe supérieur ou inférieur selon que le mouvement aura lieu dans le sens AB ou BA.

1° Supposons d'abord $v_0 > 0$; si $\alpha > \varepsilon$, ou si l'inclinaison de AB sur l'horizon est plus grande que l'angle du frottement *dynamique*, $\sin(\alpha - \varepsilon)$ est positif. Les deux termes de la valeur de v étant positifs, le mouvement a lieu constamment dans le sens de la descente, et la vitesse s'accélère à mesure que t augmente. La valeur de x croîtra indéfiniment avec t. Si $\alpha = \varepsilon$, la vitesse reste constante et égale à v_0, le mouvement continue encore indéfiniment dans le sens AB.

Si $\alpha < \varepsilon$, $\sin(\alpha - \varepsilon) < 0$; le premier terme de v, dans l'équation (2), est négatif et croissant avec t; v_0 étant positif, la vitesse v décroît depuis v_0 jusqu'à zéro, ce qui a lieu pour

$$t = \frac{v_0 \cos \varepsilon}{g \sin(\varepsilon - \alpha)}, \quad x = \frac{v_0^2 \cos \varepsilon}{2g \sin(\varepsilon - \alpha)}.$$

A cet instant, la vitesse étant nulle et $\alpha < \varepsilon$, le point s'arrêtera; il est clair, d'ailleurs, que les équations (1), (2) et (3) ne sont pas applicables au-delà de cet instant.

2° Supposons $v_0 < 0$. Le mouvement commencera vers le haut, on prendra donc le signe inférieur dans les formules. Dans l'équation (2), le premier terme du second membre croît avec t à partir de zéro; le second est constant et < 0; la vitesse, d'abord négative, devient nulle pour

$$t = -\frac{v_0 \cos \varepsilon}{g \sin(\alpha + \varepsilon)}, \quad x = -\frac{v_0^2 \cos \varepsilon}{2g \sin(\alpha + \varepsilon)}.$$

Le mouvement ascendant s'arrête. A partir de cet instant, suivant que l'on aura $\alpha >$ ou $< \varepsilon$, le mobile restera en repos ou glissera suivant la ligne AB, et les lois de son mouvement seront données par le premier cas, où l'on supposera $v_0 = 0$ et x compté de cette position extrême.

Une construction élégante détermine simultanément, pour les deux cas

$v_o > o$, $v_o < o$, les points D et E où le mobile arrive avec une vitesse nulle(1).

274. Le frottement exerce une influence, tantôt favorable, tantôt nuisible. Dans l'état statique, il est utile, par exemple, pour empêcher le glissement des matériaux dans les constructions, pour faciliter la retenue d'une masse pesante par une corde enroulée sur un arbre fixe; le frottement sert encore à donner à la locomotive un point d'appui sur les rails, etc. Dans les machines en mouvement, le frottement est généralement nuisible, non seulement parce qu'il amène l'usure des pièces, mais parce qu'une partie de la force motrice est employée à le vaincre, ou, en d'autres termes, parce qu'il dépense sous forme de chaleur perdue une portion de l'énergie fournie par le foyer de la machine ou la chute d'eau. Aussi cherche-t-on dans ce cas à le diminuer autant que possible en modifiant la nature des surfaces en contact, qui exerce, comme on l'a vu, une influence prépondérante sur la valeur du coefficient de frottement. C'est en cela que les expériences de Morin, qui ont fixé la valeur de f pour des substances très variées, sont particulièrement utiles. On a reconnu, en outre, que pour les mêmes substances frottantes, le poli plus ou moins avancé des surfaces, le sens des fibres si la matière est fibreuse (bois, fer), la direction de la cristallisation, etc... ont une influence très sensible.

Le moyen le plus efficace de combattre les réactions tangentielles consiste dans l'emploi des enduits gras (huile d'olive, de pied de bœuf, de palme, suif), qui substitue en quelque sorte au frottement immédiat entre deux substances solides, un frottement médiat où l'une et l'autre glissent sur l'enduit liquide. Aussi se ménage-t-on, dans les machines, le moyen de graisser les paliers des arbres, les articulations des pièces mobiles, et surtout de maintenir constamment en contact avec de l'huile ou un corps gras les pivots des rouages animés d'une rotation très rapide. Lorsqu'un axe cylindrique en métal tourne dans un cylindre métallique creux, on a la formule

$$F = \frac{\mu Q U_1}{\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda_1} + \frac{\mu}{\lambda_2}},$$

F étant la réaction totale produite par le frottement, μ le coefficient de frottement intérieur du corps gras lubrifiant, Q la surface du cylindre

(1) E. Collignon, *Traité de Mécanique*, t. III, livre I, ch. III.

intérieur, U_1 la vitesse relative des parties en contact, ε l'épaisseur moyenne de la couche liquide, λ_1 et λ_2 les coefficients de frottement du liquide contre les cylindres. Cette formule suppose que la température reste invariable (Petroff, *Neue Theorie der Reibung*). Il paraît que l'on obtiendrait encore une réduction plus considérable du frottement en injectant, sous une forte pression, de l'eau ou de l'air entre les surfaces frottantes des pièces de machines, mais certains inconvénients et des difficultés pratiques s'opposent à l'adoption de ce moyen.

Le tableau suivant, qui fournit la valeur du coefficient de frottement dans un certain nombre de cas utiles, met en évidence, 1° la différence notable qui existe entre le frottement au départ et le frottement dynamique ; 2° l'abaissement que subit le coefficient de frottement relatif aux diverses substances, par l'emploi des enduits gras.

NATURE DES CORPS FROTTANTS.	VALEUR DE f AU DÉPART	VALEUR DE f DANS LE MOUVEMENT
Bois sur bois (sec).	0,50	0,36
Bois sur métal (id.)	0,60	0,42
Métal sur métal (id.)	0,19	0,18
Bois ou métal sur cuir	0,47	0,30
Pierre sur pierre	—	0,76
Chêne sur chêne, fibres parallèles	0,62	0,48
» » fibres perpendiculaires . . .	—	0,34
Bois sur bois (enduit gras)	0,20	0,07
Métal sur bois (id.)	0,12	0,08
Métal sur métal (id.)	0,10	0,09
Métal sur cuir (id.).	—	0,20

275. ***Résistance au roulement.*** — Lorsqu'un corps solide roule, avec ou sans glissement, sur une surface résistante, il se produit au contact une réaction de la surface, distincte du frottement de glissement, et que l'on nomme *frottement de seconde espèce*, ou mieux, *résistance au roule-*

ment. Cette résistance est due à une dépression presqu'insensible qui se produit sur la surface par le passage du corps roulant et persiste plus ou moins après ce passage, de façon que, en avant du point de contact géométrique, le corps s'appuie sur un plan légèrement incliné.

Pour nous rendre compte du fait, concevons un cylindre homogène, pesant, ayant son centre de gravité en un point O (fig. 122) de son axe, et couché sur le plan horizontal; une section normale à l'axe, en O, coupe ce plan suivant LM et le cylindre suivant un cercle qui touche LM en un point A, section de la génératrice de contact. Soit P le poids du cylindre, force verticale agissant suivant OA; appliquons une force horizontale en un point B du rayon OA; soit AB $=q$. Le cylindre reste en équilibre aussi longtemps que cette force ne dépasse pas une limite Q; la réaction du plan est donc une force R, égale et opposée à la résultante des forces P et Q agissant en B; sa direction vient donc couper la circonférence en un point a situé près de A,

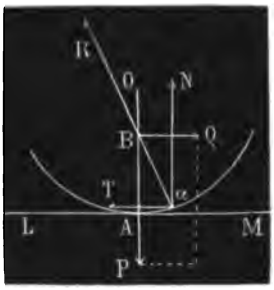


Fig. 122.

en avant de A dans le sens du mouvement que la force Q tend à produire, et on peut la supposer transportée en ce point a, et l'y décompose en deux forces N et T respectivement égales, parallèles et opposées à P et à Q. La réaction horizontale T passe très près de A et peut sans inconvénient être appliquée à ce point, c'est le *frottement* proprement dit; sa valeur est

$$T = Q = fP,$$

d'après les lois ci-dessus, f étant le coefficient de frottement au départ pour les surfaces en contact. La réaction verticale N passe à une distance δ du point A et donne un couple $N\delta$ égal et de sens contraire au couple Qq qui tend à produire la rotation autour du point A. C'est ce couple $N\delta$ qui s'oppose au roulement, et l'on a

$$N\delta = Qq, \quad \delta = \frac{Qq}{N} = \frac{Qq}{P}.$$

Or, d'après les expériences de Coulomb, le coefficient δ dépend de la nature physique des surfaces en contact, mais serait indépendant de leur courbure et de la pression normale P, dans les limites ordinaires. Ce serait donc une constante caractéristique à déterminer par des expériences

sur les différentes substances en contact. Ainsi, pour un rouleau de fonte roulant sur du granit uni, on a $\delta = 0^{m}001$; pour un rouleau d'orme sur du chêne bien dressé, $\delta = 0^{m}0016$; pour une roue en fonte sur du fer en saillie, $\delta = 0^{m}0012$. Cette quantité δ est donc très petite et de là vient que dans beaucoup de cas on néglige la résistance au roulement vis-à-vis du frottement de glissement.

276. Pour que le cylindre se mette en mouvement, il faudra donc que la force Q dépasse la limite fP indiquée ci-dessus, mais la nature du mouvement dépendra de la valeur de q. Pour qu'il y ait roulement, il faut que l'on ait

$$Qq > P\delta,$$

δ ayant la valeur déterminée qui convient aux corps en contact. Donc, il faut que

$$q > \frac{P\delta}{Q},$$

et comme $Q = fP$,

$$q > \frac{\delta}{f}.$$

Les coefficients δ et f étant connus, on aura la limite inférieure de la distance q du point de contact A au point B, compatible avec le roulement. Si q descend au-dessous de cette limite, le cylindre glissera au lieu de rouler.

En généralisant ces considérations, on conclut que, *lorsqu'un solide* S *est sollicité au roulement sur un autre solide fixe* S′ *par l'action de certaines forces, il reçoit de celui-ci* 1° *une réaction normale* N *que l'on peut concevoir appliquée aux points de contact géométrique des deux corps;* 2° *une réaction tangentielle dont la valeur maxima est* Nf, f *étant le frottement au départ;* 3° *un couple de réaction de sens contraire à la rotation qui tend à se produire, et dont le moment est* $N\delta$, δ *étant un très petit coefficient dépendant de la nature des corps en contact.*

Des développements plus étendus sur le rôle du frottement dans l'équilibre ou le mouvement des machines nous paraissent sortir du programme de la mécanique rationnelle.

Exercices.

1. Un point pesant est posé sur un cercle vertical. Déterminer, en tenant compte du frottement, la position la plus éloignée de la verticale passant par le centre du cercle, pour laquelle l'équilibre est possible.

R. Soit θ l'angle compris entre la verticale et le rayon mené à ce point extrême; $\theta = \varepsilon$.

2. Une barre pesante AB s'appuie par son extrémité inférieure A sur un plan horizontal dépoli KL, l'autre extrémité B est soutenue par un fil qui passe sans frottement sur une poulie E et porte un poids Q à l'autre bout. Déterminer les conditions pour que l'équilibre soit sur le point d'être rompu.

R. Soient P le poids de la barre, θ son inclinaison sur le plan KL, φ l'angle que fait le fil avec KL; ϖ la réaction normale du plan. La tension du fil étant égale à Q, les conditions de l'équilibre donneront

$$\varpi f + Q\cos\varphi = 0,\ (P - Q\sin\varphi) f + Q\cos\varphi = 0,$$
$$P\cos\theta = 2Q\sin(\varphi - \theta).$$

et en remplaçant f par $\operatorname{tg}\varepsilon$,

$$P\sin\varepsilon = Q\cos(\varphi - \varepsilon);$$

on a donc deux équations entre φ et θ.

3. Une barre homogène et pesante appuie ses extrémités A et B respectivement sur deux glissières, l'une horizontale OX, l'autre verticale OY. Trouver la position de la tige au moment où elle va glisser.

R. Soient P le poids, $2a$ la longueur de la barre, f et f' les coefficients de frottement au départ pour OX, OY; ϖ et ϖ' les réactions normales de OX, OY; θ l'inclinaison de la barre sur l'horizontale. On trouvera

$$\varpi' - \varpi f = 0,\quad \varpi + \varpi' f' - P = 0,\quad (P - 2\varpi)\cos\theta + 2\varpi'\sin\theta = 0,$$

et par l'élimination de ϖ, ϖ',

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{1 - ff'}{2f}.$$

4. Un anneau circulaire est serré entre les côtés d'un angle ABC sur lesquels on exerce une pression; déterminer la valeur θ de l'angle pour laquelle l'anneau s'échappera et glissant.

R. $$\frac{\theta}{2} = f = \operatorname{tg}\varepsilon,\quad \theta = 2\varepsilon.$$

5. Un bloc parallélipipédique s'appuie sur deux rouleaux cylindriques d'égal rayon r, roulant sur un plan horizontal. Une force horizontale Q est appliquée au bloc; déterminer la force Q qui mettra le système en mouvement.

R. Soient P le poids du bloc, celui des rouleaux étant négligeable; δ, δ' les coefficients de roulement pour les deux rouleaux. En prenant les moments des forces par rapport aux points de contact de chaque rouleau avec le plan, et les composantes horizontales et verticales des forces qui agissent sur le bloc, on trouve

$$\frac{Q}{P} = \frac{\delta + \delta'}{2r}.$$

LIVRE QUATRIÈME.

HYDROSTATIQUE ET HYDRODYNAMIQUE.

CHAPITRE XX.

ÉQUILIBRE DES FLUIDES.

§ 1. CONDITIONS GÉNÉRALES DE L'ÉQUILIBRE.

277. On appelle *fluides*, en général, une classe de corps dont les molécules roulent les unes sur les autres avec une grande facilité et se détachent de la masse sans résistance appréciable, en sorte que la forme de cette masse peut changer sous l'action des plus faibles causes.

On divise généralement ces corps en *liquides* ou fluides *incompressibles*, et en *gaz* ou *fluides élastiques*. Les premiers, tels que l'eau, le mercure, soumis à des pressions très considérables dans des enveloppes résistantes, n'éprouvent que des variations de volume et de densité inappréciables, et nous les regarderons en théorie comme absolument incompressibles. Les gaz, au contraire, par exemple l'hydrogène, l'azote, varient de volume sous les plus faibles variations de pression, et tendent toujours d'eux-mêmes à occuper le plus grand espace possible, en sorte qu'on est obligé de les maintenir dans des récipients fermés pour qu'ils ne s'échappent pas au dehors.

Les corps *visqueux*, *semi-fluides*, tiennent le milieu entre les solides et les liquides, participant des propriétés des uns et des autres; les

vapeurs se comportent comme les gaz lorsqu'elles sont éloignées de leur point de condensation, mais ces propriétés s'altèrent à mesure qu'on se rapproche de ce point. La théorie mécanique des fluides proprement dits n'est donc applicable que dans une mesure très limitée à ces divers corps; aussi ne nous en occuperons-nous pas ici, mais il importe de remarquer que les fluides *parfaits*, tels que nous les définissons plus haut, n'existent pas dans la nature, et que tous présentent une certaine cohésion et viscosité.

278. Les fluides étant des systèmes de points matériels, les lois, les formules, les propriétés générales de l'équilibre et du mouvement des systèmes, le théorème des forces vives, par exemple, leur sont toujours applicables. Mais, à cause de l'ignorance où nous sommes encore de la nature des liaisons et des réactions intérieures qui existent dans ces systèmes, on a dû jusqu'ici fonder en partie la théorie de l'équilibre et du mouvement des fluides sur certains principes spéciaux tirés directement de l'expérience.

Considérons une masse fluide, renfermée dans une enveloppe de forme invariable, et soumise en ses divers points à des forces données et sur sa surface à une pression déterminée. Sur la paroi interne de l'enveloppe, prenons un élément ε très petit, que nous regarderons comme plan. Cet élément éprouvera de la part du fluide renfermé dans l'enveloppe une certaine *pression* P, résultante des actions sensiblement parallèles exercées sur tous ses points par le fluide. L'expérience montre, en premier lieu, que *cette pression* P *sur l'élément* ε *est normale à la surface de cet élément.* En divisant P par la surface ε de l'élément pressé, nous aurons ce qu'on nomme la *pression moyenne* sur cet élément; enfin, nous appellerons *pression en un point donné* M de la paroi, la pression moyenne $P : \varepsilon$ qui a lieu normalement sur la surface d'un élément extrêmement petit entourant le point M. Nous la désignerons généralement par p.

Soit maintenant M un point quelconque pris dans l'intérieur de la masse fluide, et concevons par ce point un élément plan ε, orienté d'une manière quelconque. Le fluide situé d'un côté de l'élément exerce, à travers celui-ci, sur la portion de fluide de l'autre côté, des actions qui se résument en une pression P qui sera encore normale à l'élément ε, et nous pouvons chercher comme précédemment le rapport de cette pression P à la surface de l'élément, ainsi que la valeur p de ce rapport

lorsqu'on suppose ε inférieur à toute dimension sensible; p est alors ce que nous nommerons *la pression au point* M de la masse fluide. Le principe fondamental de la théorie mécanique des fluides consiste donc en ce que *l'intensité de la pression en un point* M *de la masse fluide est indépendante de l'orientation, autour du point* M, *de l'élément plan auquel elle est normale.* C'est en cela que consiste le principe de *l'égalité de pression dans tous les sens*, et l'expérience montre qu'il est vrai, non seulement dans un fluide en équilibre, mais, jusqu'à un certain point, dans les fluides en mouvement. Il est bon d'observer que l'absence de composantes tangentielles des pressions est une conséquence de l'hypothèse de la fluidité parfaite, et que l'égalité des pressions en tous les sens résulte des conditions d'équilibre d'un élément fluide; mais nous nous contentons ici de considérer ces lois comme des faits d'expérience.

Au moyen de ces principes, nous allons établir l'équation qui renferme les lois de l'équilibre des fluides ou de l'*Hydrostatique.*

279. Pour résoudre d'abord une question plus générale, nous prendrons une masse fluide sollicitée par des forces quelconques et nous appliquerons les équations générales du mouvement des systèmes matériels (**165**), à une portion quelconque de cette masse fluide limitée par une surface fermée S. Nommons $d\omega$ un élément du volume Ω compris sous la surface S; ρ la densité du fluide en un point (x, y, z) de cet élément, X, Y, Z les composantes rectangulaires de la force *extérieure* agissant en ce point, rapportées à l'unité de masse(1), et j_x, j_y, j_z celles de l'accélération au même point; $d\sigma$ un élément de la surface S et p la pression en ce point. L'équation

$$\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X$$

du n° **165** s'exprimera ici, évidemment, en considérant toutes les forces extérieures qui agissent sur la masse, par

$$\int_\Omega \rho d\omega . j_x == \int_\Omega \rho X d\omega - \int_S p \cos \overline{nx}\, d\sigma,$$

$\overline{nx}$ étant l'angle de la normale à $d\sigma$ menée vers l'intérieur du volume Ω.

---

(1) Voir, au sujet des forces X, Y, Z, ce qui a été défini au n° **115**.

Mais le théorème d'Ostrogradsky[1] donne immédiatement

$$\int_S p \cos \overline{nx}\, d\sigma = -\int_\Omega \frac{\partial p}{\partial x}\, d\omega,$$

et en substituant, réunissant sous un même signe les intégrales qui s'étendent aux mêmes éléments de volume, on aura

$$\int_\Omega \left[\rho (X - j_x) - \frac{\partial p}{\partial x}\right] d\omega = 0.$$

La surface S est arbitraire, on peut la prendre aussi petite qu'on le veut, et l'on voit alors que le coefficient de $d\omega$ doit être nul en tout point de la masse fluide, sans quoi on pourrait délimiter un volume Ω assez petit pour que ce coefficient y eût partout le même signe. On a donc, en raisonnant de même par rapport aux axes OY, OZ, les trois équations

$$(1) \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = X - j_x, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = Y - j_y, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = Z - j_z,$$

qui seront vérifiées en chaque point du fluide en mouvement.

Il faut observer que, dans cette démonstration, les forces X, Y, Z doivent comprendre toutes celles, en dehors des actions moléculaires proprement dites constituant les *pressions*, qui émanent de points *extérieures* à la surface S. On y fera donc rentrer, non seulement les forces *extérieurs* telles que la pesanteur, mais les actions à distance finie que le fluide exercerait sur lui-même au point (x, y, z).

Pour appliquer les équations (1) à un fluide en équilibre, il suffit de supposer j_x, j_y, j_z nuls et l'on a

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = X, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = Y, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = Z$$

pour les équations de l'équilibre d'un fluide de densité quelconque, constante ou variable. Multiplions respectivement par dx, dy, dz ces trois équations et ajoutons-les; il vient

$$(2) \qquad \frac{dp}{\rho} = (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz),$$

équation qui peut évidemment remplacer les trois précédentes.

Dans un fluide en équilibre, la pression varie généralement d'un

---

(1) Voir la note II à la fin du volume.

point à un autre et est une fonction des coordonnées x, y, z définie par l'équation (2). On nomme ***surface de niveau***, dans le fluide, toute surface telle que la pression p est constante en tous ses points. Une telle surface est caractérisée par l'équation $p = \text{const.}$, ou $dp = 0$, ou, d'après l'équation (2),

$$\text{(3)} \qquad X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0.$$

Il résulte de cette équation, d'après une remarque déjà faite, que la résultante des actions X, Y, Z, en un point du fluide en équilibre, est normale à la surface de niveau qui passe par ce point. On sait aussi que, en général, deux surfaces de niveau ne peuvent avoir aucun point commun.

Lorsque le fluide n'est pas enfermé de toutes parts par une enveloppe, comme c'est le cas pour un liquide qui présente une ***surface libre***, si la pression extérieure, celle de l'air, par exemple, est constante aux différents points de la surface libre, celle-ci devra être une surface de niveau et vérifier l'équation (3).

280. Lorsque les forces motrices admettent un potentiel, on a

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = dU,$$

U étant une fonction des coordonnées x, y, z. Il faut alors, pour que l'équation d'équilibre (2) soit vérifiée, que $dp : \rho$ soit lui-même une différentielle exacte par rapport aux variables x, y, z. C'est ce qui a lieu nécessairement, soit dans un fluide homogène où ρ est une constante donnée, soit lorsqu'il existe dans le fluide une relation déterminée entre la densité en un point et la pression en ce point.

Ainsi, dans un gaz où la température est uniforme, la loi de Mariotte donne la relation

$$\rho = \gamma p,$$

γ étant un coefficient constant qui ne dépend que de la température. L'équation d'équilibre prend la forme

$$\frac{1}{\gamma}\frac{dp}{p} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = dU,$$

et l'on a, par suite,

$$\text{(4)} \qquad \frac{1}{\gamma}\,\mathrm{l}.p = U, \quad \text{ou} \quad p = e^{\gamma U}.$$

L'équation de surfaces de niveau, dans ce cas où les forces X, Y, Z dérivent d'un potentiel, se réduit à

$$dU = o \quad \text{ou} \quad U = \text{const.}$$

C'est ce qui a lieu dans un fluide homogène ou dans un gaz à température uniforme.

281. *Equilibre d'un fluide pesant.* — Le plan XY étant horizontal et l'axe de z positifs vertical dans le sens de la pesanteur, on a, pour un fluide soumis à la pesanteur seule,

$$X = o, \quad Y = o, \quad Z = g,$$

et l'équation (2) devient

$$(5) \qquad dp = \rho g dz.$$

L'équation des surfaces de niveau se réduit à $dz = o$, ou, si l'on intègre, à

$$z = \text{const.}$$

Ainsi, *dans un fluide pesant en équilibre, les surfaces de niveau sont des plans horizontaux*. Cela suppose évidemment une masse fluide assez limitée pour que l'on puisse regarder la pesanteur comme constante en grandeur et en direction dans toute son étendue.

L'expression ρdz ne peut être une différentielle exacte en x, y, z que si ρ ne renferme ni x, ni y; ρ étant fonction de z seul, *la densité sera constante, dans un fluide pesant en équilibre, en tous les points d'un même plan horizontal*. Elle peut d'ailleurs varier avec z, et même d'une manière brusque, comme cela a lieu dans l'équilibre de plusieurs liquides de densités différentes superposés.

Intégrons l'équation (5), et désignons par p_0 la pression qui répond au plan $z = z_0$. Nous aurons

$$(6) \qquad p = p_0 + g\int_{z_0}^{z} \rho dz.$$

Or, dz est le volume d'un élément ayant l'unité de surface pour base et dz pour hauteur; ρdz est la masse, $g\rho dz$ le poids de cet élément; donc

La différence des pressions qui correspondent à deux plans horizontaux donnés, dans le fluide, est égale au poids d'une colonne fluide ayant pour base l'unité de surface, et pour hauteur la distance verticale comprise entre ces deux plans.

Ce théorème s'applique aussi bien aux fluides élastiques qu'aux liquides. Lorsqu'il s'agit d'un liquide homogène, si l'on prend pour plan $z_0 = 0$ celui du niveau supérieur ou de la surface libre, on a

$$p = p_0 + g\rho z.$$

La pression croît donc proportionnellement à la distance verticale du point considéré au plan du niveau supérieur.

§ 2. PRESSIONS SUR UN SOLIDE BAIGNÉ PAR UN FLUIDE.

282. *Pressions sur une paroi plane.* — Considérons d'abord un cas très simple, celui d'un solide présentant une paroi plane, terminée par un contour quelconque, et recouverte par un liquide pesant et homogène dont la surface horizontale est soumise à une pression uniforme p_0. Les pressions que le liquide exerce sur tous les éléments de la paroi étant parallèles, donnent une résultante P normale au plan de la paroi; le point C où elle perce le plan s'appelle le *centre de pression*. Pour déterminer la pression P et le point C, prenons pour plan XY (fig. 123) le plan du niveau supérieur, l'axe des z étant vertical dans le sens de la pesanteur; pour axe des y l'intersection du plan XY par le plan de la paroi prolongé. Soient A l'aire de la surface pressée; α l'angle que fait son plan avec le plan horizontal XY; x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre de gravité G de l'aire A; x', y', z' celles du centre de pression. Décomposons l'aire A en éléments infiniment petits $d\sigma$; la pression sur un de ces éléments sera $pd\sigma = (p_0 + g\rho z)\, d\sigma$. Nous aurons donc, l'intégrale s'étendant à tous les éléments de l'aire A,

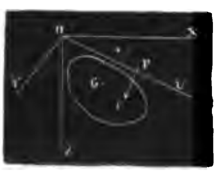


Fig. 123.

$$(1) \qquad P = \int (p_0 + g\rho z)\, d\sigma = Ap_0 + g\rho \int z\, d\sigma = A(p_0 + g\rho z_1),$$

et comme $p_0 + g\rho z_1$ mesure la pression dans le fluide au point G, *la pression totale sur l'aire* A *est égale au produit de cette aire par la pression que le fluide exerce sur le centre de gravité* G; *elle est donc la même, quelle que soit la position que l'on donne à la surface pressée autour de son centre de gravité.*

La théorie des forces parallèles nous donne ensuite, pour déterminer x', y', z', les équations

$$(2)\qquad \begin{cases} Px' = \int (p_0 + g\rho z)\, x\, d\sigma = p_0 A x_1 + g\rho \int xz\, d\sigma, \\ Py' = \int (p_0 + g\rho z)\, y\, d\sigma = p_0 A y_1 + g\rho \int yz\, d\sigma, \\ Pz' = \int (p_0 + g\rho z)\, z\, d\sigma = p_0 A z_1 + g\rho \int z^2\, d\sigma. \end{cases}$$

Soient u, v les distances d'un point quelconque (x, y, z) de l'aire A à l'axe OY et à la perpendiculaire OU à cet axe dans le plan de l'aire; Ak^2 le moment d'inertie de l'aire A par rapport à OY. Nous aurons

$$x = u \cos \alpha, \quad y = v, \quad z = u \sin \alpha,$$

d'où, substituant dans les formules ci-dessus et réduisant,

$$\begin{cases} Pu' = A\,(p_0 u_1 + g\rho k^2 \sin \alpha), \\ Pv' = A\, p_0 v_1 + g\rho \sin \alpha \int uv\, d\sigma, \end{cases}$$

u_1, v_1 se rapportant au centre de gravité.

Ces formules déterminent, dans le plan de l'aire, les coordonnées u', v' du centre de pression, ce qui suffit, la coordonnée verticale z' étant égale à $u' \sin \alpha$.

Comme application des formules (1) et (2), considérons un cercle de rayon a, plongeant verticalement dans le liquide, son centre O à une distance h au-dessous du plan du niveau supérieur, et soient AB la corde d'intersection du cercle par ce plan, 2θ l'angle sous lequel on voit la corde AB du centre O. L'origine étant au milieu I de la corde AB et l'axe IZ vertical dans le sens de la pesanteur, on aura évidemment

$$x_1 = y_1 = 0, \quad x' = y' = 0,$$

il restera à déterminer A, P et x'.

L'aire A s'obtient en retranchant de l'aire du cercle πa^2, celle du segment détaché par la corde AB, ce qui donne aisément

$$A = a^2 (\pi - \theta + \sin \theta \cos \theta),$$
$$a \cos \theta = h, \quad a \sin \theta = \sqrt{a^2 - h^2}.$$

La pression totale P est donnée par la formule (1) où l'on a

$$Az_1 = \int z\, d\sigma = 2 \int_0^{a+h} z\, dz \sqrt{a^2 - (z-h)^2}.$$

Posant

$$z = h + a \cos \varphi, \quad dz = -a \sin \varphi\, d\varphi,$$

on a

$$\int z\,d\sigma = 2a^2\int_0^{\pi-\theta}(h+a\cos\varphi)\sin^2\varphi\,d\varphi = a^2h\,(\pi-\theta+\sin\theta\cos\theta+\frac{2a^3}{3}\sin^3\theta.$$

D'où

$$P = a^2(p_0+g\rho h)(\pi-\theta+\sin\theta\cos\theta)+\frac{2}{3}g\rho a^3\sin^3\theta.$$

Enfin, on aura

$$\int_A z^2\,d\sigma = 2\int_0^{a+h} z^2\,dz\sqrt{a^2-(z-h)^2} = 2a^2\int_0^{\pi-\theta}(h+a\cos\varphi)^2\sin^2\varphi\,d\varphi$$

$$= 2a^2h^2\int_0^{\pi-\theta}\sin^2\varphi\,d\varphi + 4a^3h\int_0^{\pi-\theta}\sin^2\varphi\cos\varphi\,d\varphi + 2a^4\int_0^{\pi-\theta}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi$$

$$= a^2\left(h^2+\frac{a^2}{4}\right)(\pi-\theta+\sin\theta\cos\theta)+\left(\frac{4a^3h}{3}+\frac{a^4}{2}\cos\theta\right)\sin^3\theta.$$

De là, la dernière équation (2) donnera

$$Pz' = a^2\left[p_0h+g\rho\left(h^2+\frac{a^2}{4}\right)\right](\pi-\theta+\sin\theta\cos\theta)$$

$$+a^3\left(\frac{2p_0}{3}+\frac{4h}{3}+\frac{a}{2}\cos\theta\right)\sin^3\theta.$$

En supposant $p_0 = 0$, comme on peut toujours le faire puisque cela revient à remonter d'une quantité facile à déterminer le plan du niveau du liquide, si l'on suppose en outre que la circonférence soit à fleur d'eau, $h = a$, on trouve

$$P = \pi g\rho a^3,\quad Pz' = \frac{5}{4}\pi g\rho a^4,$$

d'où

$$z = \frac{5}{4}a$$

pour la distance du niveau au centre de pression.

282. Lorsque la surface S du corps plongé est courbe, les directions des pressions élémentaires sur cette surface n'étant plus parallèles, on ne peut plus affirmer qu'elles donneront une résultante. Il faut alors décomposer la pression $p\,d\sigma$ sur chaque élément de la surface S, parallèlement à trois axes rectangulaires OX, OY, OZ, et déterminer la résul-

tante et le couple résultant de ces forces par les formules données dans la statique (85). Soient R la force résultante, G l'axe du couple résultant des pressions, n la direction de la normale *intérieure* au point (x, y, z) de la surface S. Les composantes de la pression élémentaire seront

$$p \cos \overline{nx}\, d\sigma, \quad p \cos \overline{ny}\, d\sigma, \quad p \cos \overline{nz}\, d\sigma,$$

et nous aurons

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} R_x = \int_S p \cos \overline{nx}\, d\sigma, \quad R_y = \int_S p \cos \overline{ny}\, d\sigma, \quad R_z = \int_S p \cos \overline{nz}\, d\sigma, \\ G_x = \int_S p\,(y \cos \overline{nz} - z \cos \overline{ny})\, d\sigma, \quad G_y = \int_S p\,(z \cos \overline{nx} - x \cos \overline{nz})\, d\sigma, \\ G_z = \int_S p\,(x \cos \overline{ny} - y \cos \overline{nx})\, d\sigma, \end{array} \right.$$

formules qui résolvent le problème, lorsque p est connu en fonction de x, y, z.

Mais ces équations conduisent à une conséquence importante. Concevons pour un instant que l'espace Ω occupé par le corps solide soit rempli par le fluide en équilibre, soumis à l'action des mêmes forces X, Y, Z en chaque point, et admettons que cette substitution n'altère pas les pressions aux différents points de la surface S. Appelons ρ la densité, p la pression du fluide dans l'intérieur de l'espace Ω. En appliquant le théorème d'Ostrogradsky et ayant égard aux équations d'équilibre du fluide, nous aurons

$$\int_S p \cos \overline{nx}\, d\sigma = -\int_\Omega \frac{\partial p}{\partial x}\, d\omega = \int_\Omega \rho X\, d\omega,$$

$$\int_S p\,(y \cos \overline{nz} - z \cos \overline{ny})\, d\sigma = -\int_\Omega \left(y \frac{\partial p}{\partial z} - z \frac{\partial p}{\partial y} \right) d\omega = -\int_\Omega \rho (yZ - zY)\, d\omega,$$

et en raisonnant de même sur les autres intégrales, les formules (1) deviendront

$$R_x = -\int_\Omega \rho X\, d\omega, \quad R_y = -\int \rho Y\, d\omega, \quad R_z = -\int \rho Z\, d\omega,$$

$$G_x = -\int_\Omega \rho (yZ - zY)\, d\omega, \quad G_y = -\int \rho (zX - xZ)\, d\omega, \quad G_z = -\int \rho (xY - yX)\, d\omega.$$

Mais on voit immédiatement que

$$\rho X\, d\omega, \quad \rho Y\, d\omega, \quad \rho Z\, d\omega$$

sont les forces extérieures qui agissent sur un élément $\rho d\omega$ de la masse fluide en équilibre, d'où résulte ce théorème général : *Lorsqu'un corps solide est plongé dans un fluide en équilibre, les pressions que le fluide exerce sur sa surface donnent la même résultante et le même couple résultant que si l'on appliquait à chaque élément de volume du solide une force égale et opposée à la force extérieure qui solliciterait le fluide, supposé en équilibre, occupant le même élément de volume.*

Le *principe d'Archimède* est un cas particulier de ce théorème. Le fluide étant supposé soumis à l'action de la pesanteur seulement, les forces extérieures se réduisent à la force verticale g appliquée en chaque point du fluide. Donc, *les pressions élémentaires qu'un fluide pesant en équilibre exerce sur la surface d'un solide qui y est plongé sont réductibles à une force unique, égale au poids du fluide qui occuperait la place du corps si celui-ci était supprimé, verticale, dirigée en sens contraire de la pesanteur, et appliquée au centre de gravité G′ du fluide déplacé.*

On énonce quelquefois ce principe en disant qu'*un corps plongé dans un fluide pesant en équilibre perd de son poids le poids du fluide déplacé*. Le point G′ est le *centre de poussée*.

284. Le principe d'Archimède s'applique aussi à un solide qui n'est plongé qu'en partie dans un liquide pesant, qui flotte, par exemple, à sa surface. Il suffit, pour s'en assurer, de remarquer que la loi suivant laquelle la densité ρ varie avec z reste quelconque dans la démonstration ci-dessus, et si l'on suppose que ρ soit nul pour les valeurs de z qui répondent aux points au-dessus de la surface libre, on tombera précisément sur la conséquence que nous voulions établir.

De là on déduit les conditions d'équilibre d'un corps *flottant*, ou plongé en partie seulement dans un liquide pesant en équilibre. Le corps étant soumis, d'une part, à la pesanteur, c'est-à-dire à une force verticale égale au poids du corps, appliquée à son centre de gravité G; d'autre part, à la poussée du fluide dont nous avons déterminé plus haut la valeur et le point d'applications G′, il faut et il suffit que ces deux forces soient égales et directement opposées, c'est-à-dire 1° que le poids du solide soit égal au poids du fluide dont il occupe la place; 2° que le centre de gravité G du solide, et le centre de gravité G′ de la masse fluide

déplacée, soient sur une même verticale. Lorsque le solide est homogène ainsi que le fluide, le centre de gravité G′ coïncide avec celui du volume du corps compris sous le plan du niveau du liquide. De plus, V′ désignant ce volume et V le volume total du corps, ρ et ρ' les densités respectives du liquide et du solide, la première condition d'équilibre donne

$$V'\rho = V\rho', \quad \text{ou} \quad \frac{V'}{V} = \frac{\rho'}{\rho} = \mu,$$

μ étant le rapport donné des densités du solide et du fluide. Le problème de déterminer les positions d'équilibre du solide flottant se réduit donc à ce problème géométrique : *Couper le solide par un plan tel, que le volume* V′ *d'une partie soit au volume total* V *dans un rapport donné, et que les centres de gravité des volumes* V *et* V′ *soient sur une même perpendiculaire au plan sécant.* La solution est impossible si $\rho' > \rho$.

Ce problème présente, en général, de grandes difficultés. Si l'on suppose que le corps ait une forme prismatique ou cylindrique, et que les arêtes soient horizontales dans la flottaison, la question se simplifie. Les centres de gravité G et G′ des volumes V, V′ coïncident avec les centres de gravité des sections droites de ces volumes menées par le milieu des arêtes, et les volumes eux-mêmes sont dans le même rapport que leurs sections droites. Il suffit donc de résoudre pour l'aire de la section droite du solide le problème posé ci-dessus.

285. Comme exemple, considérons un cylindre dont la section droite soit le segment de parabole BAC (fig. 124), AF étant l'axe, BC une corde perpendiculaire à l'axe. Soit DE la droite cherchée, telle que le rapport des aires DAE, BAC soit μ, et que les centres de gravité respectifs G′ et G de ces aires soient sur une perpendiculaire à DE.

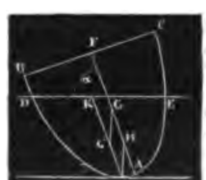


Fig. 124.

A′ étant le point de la parabole où la tangente est parallèle à la ligne de flottaison DE, soient A′K parallèle à AF; $2b$ le paramètre de la parabole, AF $= a$, A′K $= u$, α l'angle que fait A′K avec l'horizontale; on a, d'après les propriétés de la parabole,

$$surf.\,\text{BAC} = \frac{4a}{3}\sqrt{2ba}, \quad surf.\,\text{DA'E} = \frac{4}{3}u\sqrt{2bu},$$

et la première condition fournit l'équation

$$\left(\frac{u}{a}\right)^{\frac{5}{2}} = \mu, \qquad \text{ou} \qquad u = \mu^{\frac{2}{5}} a.$$

Les centres de gravité G, G′ des aires BAC, DA′E se trouvent (105) sur AF, A′K, à des distances

$$AG = \frac{3}{5} a, \qquad A'G' = \frac{3}{5} u.$$

Soit H le point où la normale en A′ coupe l'axe. Pour que la deuxième condition soit remplie, il faut que GG′ soit parallèle à A′H, ou A′G′ égal à GH, d'où

$$A'G' = AG - AH, \qquad \text{ou} \qquad \frac{3}{5} u = \frac{3}{5} a - b\left(1 + \frac{1}{2}\cot^2 \alpha\right),$$

d'où enfin

$$u = a - \frac{5}{3} b\left(1 + \frac{1}{2}\cot^2 \alpha\right).$$

Éliminant u, on obtient pour déterminer l'inclinaison α l'équation

$$\sin^2 \alpha = \frac{5b}{6a\left(1 - \mu^{\frac{2}{5}}\right) - 5b}.$$

Ces valeurs de u et de α déterminent les positions de la droite DE, qui prises pour lignes d'affleurement, correspondent à des positions d'équilibre du solide.

286. Dans le cas où un solide pesant flotte en équilibre sur un liquide pesant et homogène, le centre de gravité G et le centre de poussée G′ sont sur une même verticale, mais le second point est généralement au-dessous du premier. Le poids du solide agissant vers le bas et la poussée vers le haut, si la droite GG′ se déplace très peu de la verticale, il semble que les deux forces constituent un couple qui tend à produire le renversement entier du corps; l'équilibre serait donc instable. Mais le déplacement du corps a pour effet de modifier le moment de la poussée d'une quantité du premier ordre, et en réalité l'équilibre sera stable si le point G′ n'est pas trop bas par rapport au point G.

Nous allons donc supposer que le corps, étant placé d'abord dans une situation d'équilibre de flottaison, se déplace d'une petite quantité; nous calculerons les travaux des forces qui agissent sur lui dans ce déplace-

ment, et en nous appuyant sur le théorème de Dirichlet (**178**), nous déterminerons la condition qui assure la stabilité de l'équilibre.

Il est clair qu'une translation horizontale ne change rien aux conditions dans lesquelles se trouve le solide et n'altère pas l'équilibre. Il en est de même d'une rotation autour d'un axe vertical. Nous pouvons donc nous borner à un déplacement très petit composé d'une translation verticale et d'une rotation autour d'un axe horizontal.

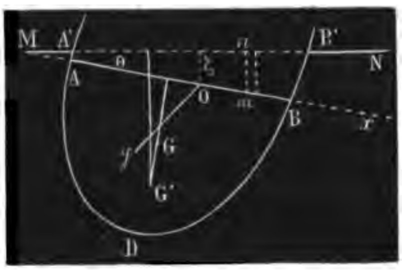


Fig. 125.

Soit MN (fig. 125) le plan du niveau du liquide; dans la position (P) qui suit le déplacement très petit, ce plan coupe le corps suivant la section A'B', tandis que la section primitive est venue en AB, et les points du corps qui coïncidaient respectivement avec le centre de gravité de la section AB, le centre de gravité du corps et le centre de poussée sont en O, G, G'; GG' est donc normal à AB, puisque l'équilibre avait lieu dans la position (P_0). Concevons que le déplacement se compose 1° d'une très petite translation verticale ζ égale à l'abaissement du point O au-dessous du plan de niveau MN; 2° d'une rotation très petite θ autour d'un axe Oy parallèle à l'intersection des plans AB, A'B'; Oy est donc horizontal. La ligne GG', d'abord verticale, fait actuellement un angle θ avec la verticale. Soient encore ϖ le poids spécifique du liquide, V_0 le volume ADB immergé dans la position (P_0), V le volume A'DB' immergé dans la position (P).

Dans le petit mouvement considéré, le travail développé par les forces qui agissent sur le corps se compose 1° du travail produit par le poids du corps, agissant verticalement en G, 2° du travail des pressions du liquide sur la surface.

Le poids du corps est égal (**284**) au poids ϖV_0 du fluide déplacé dans la position (P_0), et si z_1, z_{10} sont les distances verticales du centre de gravité du corps au plan MN, après et avant le déplacement, $\varpi V_0 (z_1 - z_{10})$ représente le premier travail.

Pour évaluer celui des pressions, rappelons que (**282**) celles-ci peuvent être remplacées par une force $\varpi d\omega$ appliquée verticalement vers le haut à chaque élément $d\omega$ du volume immergé du solide; nommant z_0,

z les cotes verticales, avant et après le mouvement, de cet élément au-dessous du plan MN, le travail de cette force sera

$$-\varpi(z - z_0)\,d\omega = \varpi(z_0 - z)\,d\omega.$$

Mais il faut observer que cette expression ne convient qu'aux éléments $d\omega$ qui sont sous le plan MN dans les positions (P_0) et (P), car, d'après l'origine même de la poussée, la force n'agit que lorsque l'élément $d\omega$ est au-dessous de ce plan. Le travail total des pressions du liquide aura donc pour valeur, d'après cette remarque,

$$-\varpi\int_V z\,d\omega + \varpi\int_{V_0} z_0\,d\omega.$$

La première intégrale représente le moment, par rapport au plan MN, du volume immergé dans la position (P), la deuxième celui du volume immergé dans la position (P_0). Pour calculer le premier, considérons à part le volume $ADB = V_0$, dont le centre de gravité est au point G' pour lequel on a, en posant $a = GG'$,

$$z = z_1 + a\cos\theta,$$

d'où

$$\int_{V_0} z\,d\omega = V_0(z_1 + a\cos\theta) = V_0(z_1 + a) - \tfrac{1}{2}V_0 a\theta^2,$$

en développant $\cos\theta$ et négligeant les termes du 4^{me} ordre en θ.

Il faut y ajouter l'intégrale étendue au volume ABB'A' qui a passé sous le plan MN par le déplacement. Décomposons l'aire A de la section AB en éléments $d\sigma$ et le volume ABB'A en éléments prismatiques verticaux ayant pour bases les éléments $d\sigma$ et terminés au plan MN. Soient Ox, Oy deux axes rectangulaires dans le plan AB.

Le volume d'un de ces prismes élémentaires sera $(\zeta + x\sin\theta)\cos\theta\,d\sigma$; son centre de gravité sera au milieu de sa longueur mn, donc, son moment aura pour expression

$$\tfrac{1}{2}(\zeta + x\sin\theta)^2\cos\theta\,d\sigma,$$

et par suite, on aura

$$\int_{V-V_0} z\,d\omega = \frac{1}{2}\int_A (\zeta + x\sin\theta)^2\cos\theta\,d\sigma.$$

Développant, observant que ζ et θ sont constants dans l'intégration,

que $\int x d\sigma$ est nul vu que O est le centre de gravité de l'aire A; que $\int x^2 d\sigma$ est le moment d'inertie H de cette aire par rapport à Oy, on trouve

$$\int_{V-V_0} z d\omega = \tfrac{1}{2} \cos\theta\,(A\zeta^2 + H \sin^2\theta),$$

ou, en développant sin θ, cos θ et négligeant les termes d'ordre supérieur au second en ζ, θ,

$$\int_{V-V_0} z d\omega = \tfrac{1}{2}(A\zeta^2 + H\theta^2).$$

De là on tire

$$\int_V z d\omega = V_0(z_1 + a) + \tfrac{1}{2}[A\zeta^2 + (H - V_0 a)\theta^2].$$

On trouve de même sans difficulté, en reportant G′ dans sa position initiale

$$\int_{V_0} z_0 d\omega = V_0(z_{10} + a),$$

et en réunissant tous ces résultats on obtient, pour l'expression du travail total du poids du corps et de la poussée,

$$T = -\tfrac{1}{2}\varpi\,[A\zeta^2 + (H - V_0 a)\theta^2].$$

Cette expression représente l'accroissement du potentiel de toutes les forces qui sollicitent le solide, lorsque celui-ci passe de la position d'équilibre à une position extrêmement rapprochée; d'après le théorème de Dirichlet, il suffit, pour que l'équilibre soit stable, que cet accroissement soit *négatif* pour tous les petits déplacements que l'on peut considérer. C'est ce qui aura lieu évidemment si a est négatif, c'est-à-dire si le centre de gravité G′ est au-dessus de G dans l'état d'équilibre, ce qui est possible si le solide n'est pas homogène; mais cette condition de stabilité subsistera même si a est positif, ou G au-dessus de G′, à la condition que l'on ait

$$H - V_0 a > 0 \quad \text{ou} \quad a < \frac{H}{V_0}.$$

Cette condition devra d'ailleurs être vérifiée pour tous les axes Oy que l'on peut mener dans le plan de la section AB, et pour cela il suffira, évidemment, qu'elle le soit pour l'axe Oy qui donne la plus petite

valeur de H. Donc, *lorsqu'un corps flotte en équilibre sur un liquide pesant et homogène, il suffit, pour que l'équilibre soit stable, que le centre de poussée ne soit pas, au-dessous du centre de gravité du corps, à une distance supérieure au plus petit moment d'inertie de la section d'affleurement, relativement aux axes passant par son centre de gravité, divisé par le volume immergé.*

Il importe de remarquer que l'on fait abstraction, dans cette théorie, des petits mouvements du liquide qui contribuent aussi, dans une certaine mesure, à augmenter la stabilité(1).

§ 3. APPLICATION DES ÉQUATIONS DE L'ÉQUILIBRE A UN FLUIDE ANIMÉ D'UNE ROTATION UNIFORME ET A L'ÉQUILIBRE DE L'ATMOSPHÈRE.

287. On rattache ordinairement à l'hydrostatique l'étude des formes de la surface libre d'un liquide homogène, animé d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe, et sollicité par des forces extérieures données.

Si l'on suppose que la masse ait atteint un état d'équilibre *relatif*, c'est-à-dire que sa forme reste permanente dans la rotation, les équations (1) du § 1 conduisent facilement à l'équation différentielle de cette surface. Appelons ω la vitesse angulaire de la rotation, et admettons que les forces extérieures X, Y, Z qui sollicitent la masse aient un potentiel U, en sorte que

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

L'axe des z étant dirigé suivant l'axe de rotation, les composantes de l'accélération d'un point du fluide sont

$$j_x = -\omega^2 x, \quad j_y = -\omega^2 y, \quad j_z = 0,$$

et les équations (1) deviennent

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} + \omega^2 x, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} + \omega^2 y, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

(1) On peut encore consulter, sur cette question, un mémoire de CLEBSCH, *Journal de Crelle*, t. LVII et la thèse de M. TURQUAN *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants.*

Multipliées respectivement par dx, dy, dz et ajoutées, elles donnent

$$\frac{1}{\rho}\,dp = dU + \omega^2(x\,dx + y\,dy) = d\left[U + \tfrac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2)\right].$$

L'équation des surfaces de niveau, $dp = 0$, deviendra donc ici, après intégration,

(1) $$U + \tfrac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2) = \text{const.}$$

Si la surface libre S du liquide est soumise à une pression uniforme ou n'est soumise à aucune pression, elle sera comprise dans cette équation. La constante qui s'y rapporte se déterminera par la condition que le volume compris sous cette surface S soit égal au volume donné du liquide.

288. Considérons, comme première application, un liquide homogène et pesant, contenu dans un vase qui tourne autour d'un axe vertical avec la vitesse ω. On aura ici

$$X = 0,\quad Y = 0,\quad Z = -g,\quad U = -gz;$$

l'équation de la surface libre sera

$$z = \frac{\omega^2}{2g}(x^2+y^2) + C,$$

C étant constant. C'est un paraboloïde de révolution autour de l'axe de rotation, ayant son sommet vers le bas.

Pour déterminer C, supposons le vase cylindrique, de rayon a; soient V le volume du liquide, h la hauteur à laquelle il s'élève dans le vase à l'état de repos, h' la hauteur pendant la rotation. On a

$$V = \pi a^2 h,\quad h' = \frac{\omega^2 a^2}{2g} + C,$$

et comme le volume du fluide est égal à celui du cylindre de hauteur h', diminué du volume du paraboloïde compris entre les plans $z = C$ et $z = h'$, il faudra que l'on ait

$$V = \pi a^2 h = \pi a^2 h' - \tfrac{1}{2}\pi a^2(h' - C) = \tfrac{1}{2}\pi a^2(h' + C).$$

Mettant pour h' sa valeur ci-dessus, on a

$$C = h - \frac{\omega^2 a^2}{4g},$$

et l'équation de la surface libre devient

$$z = h + \frac{\omega^2}{2g}\left(x^2 + y^2 - \frac{a^2}{2}\right).$$

On vérifie sans peine, par cette équation, que, quelle que soit la vitesse ω, le plan du niveau du liquide à l'état de repos coupe la surface du paraboloïde suivant un cercle fixe, de rayon $a : \sqrt{2}$.

289. Un problème plus difficile consiste à déterminer la figure permanente d'un liquide homogène et tournant, lorsqu'on suppose que ses molécules s'attirent proportionnellement à leurs masses et en raison inverse du carré de leur distance. Les forces qui agissent et leur potentiel dépendent en effet, dans ce cas-ci, de la forme même de la surface qu'il s'agit de déterminer, et nous devrons nous borner à établir qu'un ellipsoïde de révolution aplati peut satisfaire à la condition exprimée par l'équation (1).

Soient a et c le rayon de l'équateur et le rayon du pôle de l'ellipsoïde, ce dernier dirigé suivant l'axe de rotation. Si nous posons

$$\lambda c = \sqrt{a^2 - c^2},$$

l'équation de l'ellipsoïde s'écrira sous la forme

$$\frac{x^2 + y^2}{1 + \lambda^2} + z^2 = c^2. \tag{2}$$

Il sera démontré plus loin (*Théorie du potentiel*) que, la densité de l'ellipsoïde étant désignée par ρ, le potentiel de l'action qu'il exerce sur l'unité de masse en un point (x, y, z) de son intérieur a pour expression

$$U = \frac{2\pi\rho(1+\lambda^2)}{\lambda^3}\left[\lambda^2 c^2 \operatorname{arc\,tg}\lambda - \frac{x^2+y^2}{2}\left(\operatorname{arc\,tg}\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right) - z^2\left(\lambda - \operatorname{arc\,tg}\lambda\right)\right].$$

Substituons cette valeur de U dans l'équation (1); elle prendra évidemment la forme

$$L(x^2 + y^2) + Mz^2 = \alpha,$$

où l'on a posé

$$L = \omega^2 - \frac{2\pi\rho}{\lambda^3}\left[(1+\lambda^2)\operatorname{arc\,tg}\lambda - \lambda\right],$$

$$M = \frac{4\pi\rho(1+\lambda^2)}{\lambda^3}(\operatorname{arc\,tg}\lambda - \lambda), \quad \alpha = \text{const.}$$

Il faut donc, pour que l'équation (1) coïncide avec celle de l'ellip-

soïde (2), que l'on ait les relations

$$(1+\lambda^2)L = M = \frac{\alpha}{c^2}, \quad \text{ou} \quad (1+\lambda^2)L = M, \quad Mc^2 = \alpha.$$

La constante α n'étant assujettie à aucune condition, on peut toujours admettre que cette dernière égalité sera vérifiée; la valeur de α dépendra du volume attribué à la masse liquide. La première équation, la seule à laquelle on doit satisfaire, se réduit à

$$\omega^2\lambda^3 - 2\pi\rho[(1+\lambda^2)\operatorname{arc\,tg}\lambda - \lambda] = 4\pi\rho(\operatorname{arc\,tg}\lambda - \lambda),$$

ou, réductions faites,

$$(3)\qquad \frac{(3+\lambda^2)\operatorname{arc\,tg}\lambda - 3\lambda}{\lambda^3} = \frac{\omega^2}{2\pi\rho}.$$

Si l'on suppose ω et ρ donnés, il faudra que λ vérifie cette équation pour que l'ellipsoïde (2) satisfasse au problème.

290. *Discussion des racines de l'équation* (3). — En remplaçant dans l'équation (3) λ par $\theta\sqrt{-1}$, et transformant $\operatorname{arc\,tg}\theta\sqrt{-1}$ en logarithme, on reconnaît qu'aucune valeur réelle de θ ne peut vérifier l'équation, ce qui revient à dire que a ne peut être plus petit que c et que l'ellipsoïde (2) est nécessairement aplati. Pour voir si l'équation (3) admet des racines réelles pour λ, cherchons si la courbe qui a pour équation

$$(4)\qquad y = \frac{(3+x^2)\operatorname{arc\,tg}x - 3x}{x^3},$$

peut couper la droite parallèle à l'axe des x,

$$y = \frac{\omega^2}{2\pi\rho}.$$

En supposant x très petit, développant $\operatorname{arc\,tg}x$ par la formule

$$\operatorname{arc\,tg}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\cdots$$

et opérant les réductions, on a

$$y = x^2\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{3}\right) + hx^3 = \frac{4}{15}x^2 + hx^3,$$

ce qui montre que y et dy s'annulent pour $x = 0$. La courbe passe par l'origine et y est tangente à l'axe des x. On trouve ensuite en différentiant

$$\frac{dy}{dx} = \frac{9+7x^2}{x^3(1+x^2)} - \frac{(9+x^2)\operatorname{arc\,tg}x}{x^4}.$$

Posant

$$(5) \qquad \varphi(x) = \frac{(9 + 7x^2)\,x}{(1 + x^2)(9 + x^2)} - \operatorname{arc\,tg} x,$$

nous pourrons écrire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{9 + x^2}{x^4}\,\varphi(x),$$

ce qui nous fait voir que la dérivée de y est toujours de même signe que $\varphi(x)$. Pour déterminer ce signe, x étant > 0, formons la dérivée

$$\varphi'(x) = \frac{9 + 7x^2 + 14x^4}{(1 + x^2)(9 + x^2)} - \frac{1}{1 + x^2} - \frac{4x^2(9 + 7x^2)(5 + x^2)}{(1 + x^2)^2(9 + x^2)^2},$$

ou, après réductions,

$$\varphi'(x) = \frac{8x^4(3 - x^2)}{(1 + x^2)^2(9 + x^2)^2}.$$

Cette équation montre que $\varphi'(x)$ est toujours de même signe que $3 - x^2$, c'est-à-dire d'abord positif de $x = 0$ à $x = \sqrt{3}$; nul pour $x = \sqrt{3}$; négatif depuis $x = \sqrt{3}$ jusqu'à $x = \infty$. Donc la fonction $\varphi(x)$, nulle pour $x = 0$, reste positive et croissante jusqu'à $x = \sqrt{3}$, devient maximum pour $x = \sqrt{3}$, puis décroît constamment jusqu'à $x = \infty$ qui donne $\varphi(x) = -\pi : 2$ d'après l'équation (5). Cette fonction doit donc s'annuler, nécessairement, pour une seule valeur x_1 de x comprise entre $\sqrt{3}$ et ∞, et elle sera toujours positive de $x = 0$ à $x = x_1$, négative de $x = x_1$ à $x = \infty$; la dérivée de y par rapport à x satisfera donc aux mêmes conditions, donc y est positif et croissant de $x = 0$ à $x = x_1$, maximum pour $x = x_1$, et décroît en restant toujours positif de $x = x_1$ à $x = \infty$, qui donne $y = 0$. La courbe a pour asymptote l'axe des x positifs.

Il résulte clairement de là que si le maximum y_1 de y qui répond à $x = x_1$ est plus petit que $\omega^2 : 2\pi\rho$, aucune valeur de λ ne peut vérifier l'équation (3). Si l'on a

$$\frac{\omega^2}{2\pi\rho} = y_1,$$

l'équation aura une seule racine égale à x_1; enfin, si $\omega^2 : 2\pi\rho$ est inférieur à y_1, elle aura deux racines réelles en λ, déterminant deux ellipsoïdes aplatis qui sont des figures d'équilibre. Cette équation (3) impose donc, pour une valeur donnée de ρ, une limite supérieure de ω

au-dessus de laquelle il n'existe aucun ellipsoïde de révolution satisfaisant à la question.

Un calcul numérique facile montre que $\varphi(x)$ est positif pour $x = 2$ et négatif pour $x = 3$, x_1 est donc compris entre 2 et 3. On détermine cette valeur de x_1 par des substitutions successives et l'on trouve

$$x_1 = 2{,}53; \quad y_1 = 0{,}225,$$

en sorte que la condition d'existence de l'ellipsoïde est celle-ci :

$$\omega^2 \leqslant 2\pi\rho . 0{,}225.$$

Lorsqu'on fait décroître ω indéfiniment, l'une des valeurs de λ tend vers zéro, l'élipsoïde a pour limite une sphère; l'autre croît indéfiniment, l'ellipsoïde se rapproche d'un disque indéfiniment aplati (1). Il faut bien remarquer, dans l'application numérique de ces formules, que l'expression du potentiel U est donnée dans l'hypothèse où la constante d'attraction est prise égal à l'unité, c'est-à-dire où l'on choisit pour unité de force l'action réciproque de deux masses égales à l'unité, placées à l'unité de distance. La densité ρ devra être multipliée par un facteur déterminé en conséquence.

291. On nomme *aplatissement* de l'ellipsoïde le rapport

$$\varepsilon = \frac{a - c}{a},$$

ou l'excès du rayon de l'équateur sur celui du pôle, divisé par le premier. On a donc

$$\varepsilon = 1 - \frac{c}{a} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2}},$$

et si λ est une fraction, en développant suivant les puissanes de λ^2 on aura

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{3}{8}\lambda^4 + \frac{3}{16}\lambda^6 . - \ldots$$

---

(1) Jacobi a démontré par une méthode ingénieuse qu'un ellipsoïde à trois axes inégaux peut aussi, moyennant certaines conditions, satisfaire à la forme d'équilibre d'une masse fluide douée d'une rotation uniforme. M. W. Thomson a découvert d'autres figures, de forme annulaire (*Treatise on natural Philosophy*, t. II, p. 329) et M. Poincaré, dans un remarquable mémoire (*Acta mathematica*, t. VII, 1885) a montré qu'il existe une infinité de formes d'équilibre ayant un plan de symétrie normal à l'axe et un, au moins, passant par l'axe.

D'autre part, si l'on veut appliquer les formules à la figure de la terre, traitée comme une masse liquide homogène, il faut y supposer

$$\omega = 0{,}000073\ldots,\quad \pi = 3{,}14159\ldots,\ \rho = \ldots$$

et l'on a pour déterminer λ l'équation

$$\frac{(3+\lambda^2)\,\text{arc tg}\,\lambda - 3\lambda}{\lambda^3} = 0{,}00223.$$

Cette équation admet deux racines dont la plus petite seule se rapporte à la terre. En développant le premier membre on a, pour déterminer cette plus petite racine,

$$\lambda^2 = 0{,}00862 + \frac{6}{7}\lambda^4,$$

et l'on trouve par approximations successives

$$\lambda^2 = 0{,}00869\ldots,\quad \text{d'où}\quad \varepsilon = 0{,}00432 = \frac{1}{231}.$$

Cette valeur étant notablement supérieure à celle de l'aplatissement de la terre qui est environ 1 : 300, on doit en conclure que la terre ne peut être considérée comme une masse homogène.

292. *Equilibre de l'atmosphère.* — L'air atmosphérique qui enveloppe le globe terrestre étant supposé en équilibre, il existe entre la hauteur d'un point M au-dessus du niveau de la mer, et la pression de l'air en ce point, une relation que nous voulons déterminer.

Nommons z l'ordonnée verticale OM du point M, comptée du niveau de la mer; R le rayon de la terre qui aboutit au point O, g la pesanteur en O; p la pression, ρ la densité, θ la température de l'air, au point M.

Comme il est nécessaire d'avoir égard ici à la variation de l'intensité de la pesanteur à mesure qu'on s'élève, intensité qui est en raison inverse du carré de la distance au centre de la terre, on aura évidemment dans les équations générales

$$X = 0,\quad Y = 0,\quad Z = -\frac{gR^2}{(R+z)^2} = -g\left(1+\frac{z}{R}\right)^{-2},$$

ou, en développant et observant que $z : R$ est toujours une très petite fraction dont le carré est négligeable

$$Z = -g\left(1 - \frac{2z}{R}\right).$$

L'équation (2) du § 1 devient donc

$$dp = -g\rho\left(1 - \frac{2z}{R}\right)dz.$$

D'autre part, la loi de Mariotte et de Gay-Lussac établit entre p, ρ et θ la relation

$$p = k\rho(1 + \alpha\theta),$$

k étant une constante et α le coefficient de dilatation de l'air. Si l'on appelle ρ_0 la densité de l'air à 0° et sous la pression moyenne p_0 de 760mm, on a

$$p_0 = k\rho_0, \quad k = \frac{p_0}{\rho_0},$$

d'où

$$\rho = \frac{\rho_0 p}{p_0(1 + \alpha\theta)},$$

et l'équation différentielle en p devient

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g\rho_0}{p_0(1 + \alpha\theta)}\left(1 - \frac{2z}{R}\right)dz.$$

L'intégration rigoureuse de cette équation est impossible, la loi qui lie la température θ à l'altitude z étant inconnue. Mais on se contente de l'approximation qui attribue à θ une valeur constante, moyenne entre les températures extrêmes de la colonne d'air que l'on considère. On trouve alors, C étant une constante,

$$\mathrm{l}.p = -\frac{g\rho_0}{p_0(1 + \alpha\theta)}\left(z - \frac{z^2}{R}\right) + C.$$

Si z_1 et p_1 sont les valeurs de z et de p se rapportant à un point donné M_1 entre O et M, on aura

$$\mathrm{l}\,p_1 = -\frac{g\rho_0}{p_0(1 + \alpha\theta)}\left(z_1 - \frac{z_1^2}{R}\right) + C,$$

d'où, retranchant membre à membre et posant

$$z = z_1 + \zeta, \quad z + z_1 = 2z_1 + \zeta,$$

on trouve

$$\mathrm{l}.\frac{p_1}{p} = \frac{g\rho_0\zeta}{p_0(1 + \alpha\theta)}\left(1 - \frac{2z_1 + \zeta}{R}\right),$$

et en tirant de là la valeur de ζ,

$$(4)\qquad \zeta = \frac{p_0}{g\rho_0}(1 + \alpha\theta)\left(1 + \frac{2z_1 + \zeta}{R}\right) l . \frac{p_1}{p}.$$

Il faut multiplier cette valeur de ζ par le module M qui sert à passer des logarithmes népériens aux logarithmes vulgaires. De plus, la pesanteur g dépend de la latitude φ du lieu O, et est liée à la pesanteur g_0 à Paris par la formule

$$g = g_0(1 - 0,0026 \cos 2\varphi).$$

On a d'ailleurs, en nombres,

$$\frac{Mp_0}{g_0\rho_0} = 18401,2.$$

Pour tenir compte de la vapeur d'eau existant dans l'atmosphère, on force le coefficient de dilatation et l'on prend $\alpha = 0,004$. Enfin, on a

$$\frac{2}{R} = 0,0000002.$$

On prend pour θ la moyenne des températures θ_1 et θ_2 correspondant aux stations extrêmes M_1 et M. Enfin, le rapport $p_1 : p$ des pressions peut être remplacé par le rapport $h_1 : h$ des hauteurs barométriques observées en M_1 et M, corrigées de la température, etc. On a ainsi, en négligeant le rapport $\zeta : R$ dans une première approximation,

$$(5)\quad \zeta = 18401,2\,(1 + 0,004 \cdot \theta)(1 + 0,0026 \cdot \cos 2\varphi)(1 + 0,0000002 \cdot z_1) \log \frac{h_1}{h}.$$

Telle est la formule pratique dont on se sert pour évaluer, au moyen d'observations barométriques, la différence d'altitude de deux points de la surface de globe situés sur une même verticale.

Exemple : Avril 1884. — Altstätten (Suisse), $\varphi = 47°23'$. Baromètre 716^{mm}, temp. $6°72$. — Sommet du Sentis, $\varphi = 47°15$; Baromètre $557^{mm}81$; therm. — $5°$, $\theta = 0°88$.

On trouve

$$\log \frac{h_1}{h} = 0,108721, \quad 1 + 0,0000002 \cdot z_1 = 1,00029, \quad \zeta = 2012^m.$$

Les méthodes trigonométriques donnent comme chiffre exact $\zeta = 2008^m$; mais les circonstances ne sont pas toujours aussi favorables.

Exercices.

1. Dans un fluide en équilibre, la densité en un point quelconque M est proportionnelle à la distance de ce point à un centre fixe O; la force P qui sollicite le fluide en M est dirigée vers le point O, et proportionnelle au carré de la pression en M. Trouver l'expression de la pression et l'équation des surfaces de niveau.

R. L'origine étant en O, p_0 désignant la pression en ce point, μ le rapport de la densité ρ à la distance OM, a le rapport de la force P au carré de la pression, on a

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p_0} = \frac{a\mu}{2}(x^2 + y^2 + z^2).$$

Les surfaces de niveau sont des sphères dont le centre est O.

2. Un fluide, dans lequel l'accroissement de pression qui détermine un accroissement de densité est supposé proportionnel à cette dernière, est disposé en couches sphériques homogènes sur une surface sphérique de rayon a. Les éléments du fluide s'attirent en raison inverse du carré de la distance. L'équilibre étant supposé avoir lieu, quelle est la loi de la densité des couches?

R. D'après l'hypothèse et d'après la loi connue (ex. 5, chap. XII, § 1), on aura, r désignant le rayon d'une couche fluide, k, λ des constantes données,

$$\frac{dp}{d\rho} = k\rho, \quad P = \frac{4\pi\lambda}{r^2}\int_a^r \rho r^2 dr,$$

et la force P est dirigée vers le centre de la couche. On trouve, pour déterminer ρ, l'équation

$$\frac{d^2\rho}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\rho}{dr} + \frac{4\pi\lambda}{k}\rho = 0,$$

d'où

$$\rho = \frac{A}{r}\left(\cos r\sqrt{\frac{4\pi\lambda}{k}} + \alpha\right).$$

α, A étant des constantes.

3. Une surface plane étant plongée dans un liquide pesant et homogène en équilibre, par le c. de g. G et par le centre de pression C de cette surface on mène des horizontales dans le plan de la figure. Démontrer que, de quelque manière que la figure se déplace parallèlement à elle-même dans son plan, le produit de la pression totale P sur cette surface par la distance des deux droites ne varie pas.

R. Les formules du n° [illegible] donnent la relation

$$P(u' - u_1) = Ag\rho\lambda^2 \sin\alpha,$$

λ étant le rayon de gyration de la figure par rapport à l'horizontale menée par son centre de gravité; cette équation démontre la proposition. Lorsque p_0 est nul, elle devient

$$u_1(u' - u_1) = \lambda^2.$$

4. Un vase hémisphérique fermé par un plan est entièrement rempli d'un liquide pesant et homogène. Quelle doit être l'inclinaison θ de l'axe du plan sur la verticale pour que la somme des pressions élémentaires sur la surface totale du vase soit un maximum.

R. On trouve, pour la somme des pressions élémentaires sur le plan, $\pi g\rho a^3 \sin\theta$ (a, rayon de la sphère), et sur la demi-surface sphérique, $\pi g\rho a^3 (\cos\theta + 2\sin\theta)$. La condition de maximum fournit la relation

$$\operatorname{tg}\theta = 3.$$

5. Déterminer la pression totale et le centre de pression C pour une paroi rectangulaire, placée verticalement dans un liquide pesant et homogène, de manière que deux côtés opposés soient horizontaux.

R. Soient a le côté vertical, b le côté horizontal du rectangle, p_0 la pression au niveau du côté supérieur b; z' la distance du centre de pression à ce côté. Le point C étant d'ailleurs sur la droite qui joint les milieux des côtés b, on a

$$P = ab\left(p_0 + \frac{g\rho a}{2}\right), \quad Pz' = a^2 b\left(\frac{p_0}{2} + \frac{g\rho a}{3}\right).$$

Si le rectangle affleure et qu'il n'y ait pas de pression extérieure, p_0 est nul et l'on a

$$z' = \frac{2a}{3}.$$

6. Même problème pour un quart du cercle, compris entre deux rayons dont l'un est vertical, l'autre horizontal.

R. Soient a le rayon du cercle, x' et z' les distances du centre de pression au côté vertical et au côté horizontal, p_0 la pression au niveau de ce dernier; on trouve

$$P = \frac{\pi a^2}{4} p_0 + \frac{g\rho a^3}{3}, \quad Px' = \frac{p_0 a^3}{3} + \frac{g\rho a^4}{8}, \quad Pz' = \frac{p_0 a^3}{3} + \frac{\pi g\rho a^4}{16}.$$

Lorsque le côté horizontal affleure et qu'il n'y a pas de pression extérieure, on a $p_0 = 0$,

$$P = \frac{g\rho a^3}{3}, \quad x' = \frac{3a}{8}, \quad z' = \frac{3\pi a}{16}.$$

7. Une porte d'écluse est formée d'un rectangle ABCD (fig. 126) et d'un quart de cercle ABE; ce système tourne autour d'un axe vertical AB. Calculer la largeur $u = AD$ de la portion rectangulaire, pour laquelle la porte sera en équilibre indifférent autour de AB lorsque le niveau du liquide sera en EAD. On néglige la pression extérieure p_0.

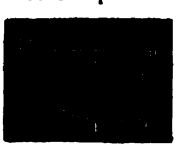


Fig. 126.

R. Les moments des pressions sur ABCD, ABE, par rapport à AB, doivent être égaux. Cette condition, combinée avec les résultats des ex. 5 et 6, conduit à

$$u = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

8. Centre de pression d'un trapèze dont le plan fait un angle α avec le plan horizontal, les bases étant horizontales, la pression sur la surface libre du liquide nulle.

R. Soient a la base supérieure, b la base inférieure, h la hauteur du trapèze; c la distance de la base supérieure à l'intersection du plan du trapèze et de la surface libre; δ la distance du centre de pression à la base a. Le centre de pression est sur la droite qui joint les milieux des bases, et l'on a

$$\delta = \frac{(a+3b)\,h^2 + 2\,(a+2b)\,hc}{2\,(a+2b)\,h + 6\,(a+b)\,c}.$$

Si la base a affleure, $c = 0$, on a

$$\delta = \frac{(a+3b)\,h}{2\,(a+2)}.$$

9. Centre de pression d'un parallélogramme, d'un triangle, la pression sur la surface libre étant nulle.

R. Cas particuliers de l'exemple précédent ($a = b$, $a = 0$).

10. Une sphère creuse est rempli hermétiquement d'un liquide pesant et homogène. 1° Démontrer que les pressions élémentaires sur la surface, correspondant à la portion du liquide située au-dessus d'un plan horizontal quelconque (H), se réduisent à une force unique, et évaluer cette résultante; 2° déterminer la position du plan horizontal pour laquelle cette résultante est nulle; 3° calculer la pression totale de la masse liquide et prouver qu'elle est égale à son poids; 4° mener un plan horizontal tel que les pressions résultantes des portions de liquide séparées par ce plan soient égales.

R. Soient a le rayon de la sphère, z la distance du plan horizontal (H) à l'extrémité supérieure du diamètre vertical de la sphère, Z la résultante des pressions du liquide situé au-dessus de ce plan, comptée positivement vers le haut.

On trouve, en décomposant la surface pressée en bandes horizontales,

$$Z = \pi g \rho \left(a - \frac{2}{3} z\right) z^2.$$

Si le plan passe par le centre, on a $Z = \frac{\pi g \rho a^3}{3} = \frac{P}{4}$, P étant le poids total du liquide.

Pour que Z soit nul, il faut que le plan soit à une distance du centre, au-dessous de ce point, égale à la moitié du rayon. — Lorsque $z = 2a$, on a la pression totale; elle est égale à

$$-\frac{4}{3} \pi g \rho a^3.$$

Enfin, pour que les portions au-dessus et au-dessous du plan donnent des pressions égales, il faut que l'on ait

$$2z^3 - 3az^2 - 2a^3 = 0.$$

Il y a une racine réelle, comprise entre $\frac{7}{4}\,a$ et $2a$.

11. Un cadre rectangulaire horizontal a deux côtés opposés réunis par une membrane flexible; les deux autres portent deux parois verticales et fixes; l'espace intermédiaire est rempli d'un liquide homogène et pesant, jusqu'au niveau du cadre. Déterminer la forme d'équilibre de la membrane.

R. Il suffit de considérer une section parallèle aux parois fixes. Les équations du n° 227 montrent que la tension est constante, égale au produit du rayon de courbure par la pression du fluide. Appelant φ l'inclinaison de la tangente à la section sur l'horizontale; x, z les coordonnées horizontale et verticale de la courbe; T_0 la tension constante, φ_0 la valeur de φ pour $z=0$, on a, en se servant d'une expression connue du rayon de courbure (Cours d'An., ch. XVIII, ex. 2),

$$2T_0(\cos\varphi - \cos\varphi_0) = -g\rho z^2,$$

d'où l'équation différentielle de la courbe,

$$dx = \frac{(\cos\varphi_0 - az^2)\,dz}{\sqrt{1-(\cos\varphi_0 - az^2)^2}}.$$

12. Un vase rectangulaire est animé d'un mouvement uniformément accéléré de translation horizontal et parallèle à ses faces latérales. Quelle est la forme d'équilibre relatif d'un liquide homogène et pesant renfermé dans ce vase.

R. On trouve une surface plane.

CHAPITRE XXI.

ÉQUATIONS GÉNÉRALES DU MOUVEMENT DES FLUIDES.

292. Le problème général de l'*hydrodynamique* ou théorie du mouvement des fluides peut se formuler ainsi : on connaît l'état initial d'une masse fluide continue, les forces extérieures qui sollicitent chacun de ses points à un instant quelconque du mouvement et les conditions particulières qui subsistent à sa surface. Il s'agit de déterminer, dans toute la suite du temps, les positions et les vitesses des particules fluides, les trajectoires qu'elles décrivent, la pression et la densité en un point quelconque de la masse.

Ce problème très-compliqué peut être abordé de deux manières différentes. Ou bien, on cherchera à déterminer le mouvement de chaque élément du fluide en particulier, et l'on aura à assigner les coordonnées d'une particule quelconque en fonction du temps et de sa position initiale; c'est la voie ouverte par Lagrange, mais difficilement utilisable. Ou

bien, on se proposera de déterminer l'*état* du fluide en un point quelconque de l'espace qu'il occupe et à un instant quelconque; c'est la méthode plus féconde d'Euler. Dans ce cas, soient (x, y, z) les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque M de l'espace rempli par le fluide; u, v, w les composantes de la vitesse dont le fluide est animé en ce point à l'époque t; p la pression, ρ la densité, X, Y, Z les composantes de la force motrice rapportée à l'unité de masse, au même point (x, y, z) et au même instant t. Au point de vue d'Euler, u, v, w, p, ρ, X, Y, Z sont des fonctions des quatre variables indépendantes x, y, z, t, fonctions entre lesquelles existent des relations que nous devons chercher.

Il est clair que si nous parvenons à résoudre le problème sous cette forme, il sera résolu aussi sous la forme proposée par Lagrange. Admettons, en effet, que nous ayons obtenu les valeurs de u, v, w en fonction de x, y, z, t, soient

$$(1) \qquad u = f(x, y, z, t), \quad v = f_1(x, y, z, t), \quad w = f_2(x, y, z, t).$$

Si nous considérons une particule déterminée du fluide, ses coordonnées x, y, z seront des fonctions du temps et les composantes de sa vitesse seront les dérivées de ces fonctions par rapport au temps,

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}.$$

Mais ces composantes sont exprimées, en fonction de la position actuelle de la molécule et du temps, par les équations (1), d'où l'on tire

$$(2) \qquad \frac{dx}{dt} = f(x, y, z, t), \quad \frac{dy}{dt} = f_1(x, y, z, t), \quad \frac{dz}{dt} = f_2(x, y, z, t).$$

L'intégration de ce système d'équations différentielles du premier ordre fera connaître x, y, z en fonction de t avec trois constantes arbitraires a, b, c, qui permettront d'identifier la molécule considérée avec l'une quelconque des molécules du fluide. Le mouvement et la trajectoire de cette molécule seront donc bien connus.

294. Nous avons déjà donné trois équations du mouvement du fluide au n° **279**, savoir

$$(3) \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = X - j_x, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = Y - j_y, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = Z - j_z,$$

mais nous les mettrons sous une autre forme en exprimant les accéléra-

tions au moyen des dérivées partielles des fonctions u, v, w. En effet, si nous regardons pour un instant x, y, z comme les coordonnées variables d'un même point matériel, nous aurons, vu les équations (2),

$$j_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt},$$

ou, ce qui est la même chose, d'après (1),

$$j_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Opérant de même pour j_y, j_z, on met les équations (3) sous la forme

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = X - \dfrac{\partial u}{\partial t} - u\dfrac{\partial u}{\partial x} - v\dfrac{\partial u}{\partial y} - w\dfrac{\partial u}{\partial z}, \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} = Y - \dfrac{\partial v}{\partial t} - u\dfrac{\partial v}{\partial x} - v\dfrac{\partial v}{\partial y} - w\dfrac{\partial v}{\partial z}, \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} = Z - \dfrac{\partial w}{\partial t} - u\dfrac{\partial w}{\partial x} - v\dfrac{\partial w}{\partial y} - w\dfrac{\partial w}{\partial z}. \end{cases}$$

295. On obtient une relation distincte des précédentes en exprimant que l'accroissement de masse du fluide, dans un espace Ω compris sous une surface fermée fixe S, pendant un temps infiniment petit Δt, est produit par la somme des masses qui ont pénétré dans cet espace par tous les éléments infiniment petits $d\sigma$ de la surface S pendant le même intervalle Δt. La masse du fluide dans l'espace Ω a pour expression $\int_\Omega \rho\, d\omega$, et son accroissement dans le temps Δt,

$$\int_\Omega \Delta_t\rho \,.\, d\omega = \int_\Omega \frac{\partial\rho}{\partial t}\Delta t\, d\omega = \Delta t\int_\Omega \frac{\partial\rho}{\partial t}\, d\omega,$$

en négligeant une quantité infiniment petite par rapport à Δt. D'autre part, le volume du fluide qui entre par l'élément $d\sigma$ dans l'intérieur de la surface S, pendant Δt, a pour expression, V_n étant la composante de la vitesse du fluide suivant la direction n de la normale *intérieure*, $V_n\, \Delta t \,.\, d\sigma$; donc on a, en supprimant le facteur Δt, l'égalité

$$\int_\Omega \frac{\partial\rho}{\partial t}\, d\omega = \int_S \rho V_n\, d\sigma = \int_S \rho\,(u\cos\overline{nx} + v\cos\overline{ny} + w\cos\overline{nz})\, d\sigma.$$

Transformons l'intégrale *superficielle* en intégrale de volume par la

formule d'Ostrogradsky :

$$\int_S \rho u \cos \overline{nx}\, d\sigma = -\int_\Omega \frac{\partial . \rho u}{\partial x} d\omega, \quad \text{etc...},$$

l'équation préeédente prendra la forme

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial . \rho u}{\partial x} + \frac{\partial . \rho v}{\partial y} + \frac{\partial . \rho w}{\partial z} \right) d\omega = 0.$$

Mais l'espace Ω pouvant être réduit autant qu'on le veut, il suit de là, par un raisonnement déjà employé, que l'équaton

$$(5) \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial . \rho u}{\partial x} + \frac{\partial . \rho v}{\partial y} + \frac{\partial . \rho w}{\partial z} = 0$$

doit être vérifiée en chaque point de l'espace occupé par le fluide. C'est l'*équation de continuité*. Si l'on a égard aux relations

$$\frac{\partial . \rho u}{\partial x} = \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \text{etc...}$$

on peut aussi lui donner la forme

$$(6) \qquad \frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0.$$

Lorsque le fluide est incompressible, les mêmes molécules occupent toujours un même volume infiniment petit, la densité ρ est donc constante autour d'un même point en mouvement; donc $d\rho : dt = 0$, et par suite on a

$$(7) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

pour l'équation de continuité.

296. Les équations (4) et (5) sont aux dérivées partielles; elles ne suffisent pas encore pour déterminer les cinq fonctions inconnues u, v, w, p et ρ, en supposant d'ailleurs X, Y, Z donnés en fonction de x, y, z, t. Mais, si le fluide est incompressible et homogène, ρ est une constante donnée. En général, on considère p et ρ comme deux variables liées entr'elles par une relation déterminée, qui dépend de la nature du fluide. Ainsi, dans un gaz parfait, la loi de Mariotte et de Gay-Lussac fournit l'équation

$$p = k\rho (1 + \alpha\theta),$$

θ étant la température; si celle-ci est uniforme et donnée, cette équation entre p et ρ complètera le nombre des relations nécessaires.

Les équations aux dérivées partielles (4) et (5) étant supposées intégrées, l'intégration introduira, comme on sait, un certain nombre de *fonctions arbitraires* de quelques unes des variables. Mais ces fonctions se déterminent au moyen de ces *conditions à la surface* dont nous avons parlé, qui subsistent seulement pour les points du fluide distribués, à l'instant que l'on considère, sur une surface déterminée. Nous ne parlerons ici que de deux cas :

1° Si le fluide en mouvement est un liquide offrant une surface libre sur laquelle un gaz exerce une pression Π, connue et partout égale, telle que celle de l'atmosphère, on aura en chaque point (x, y, z) de cette surface, la relation

$$p = \Pi.$$

2° Si le fluide en mouvement reste sans cesse en contact avec une paroi fixe, dont la surface est représentée par une équation

$$F(x, y, z) = 0,$$

les points du fluide qui s'appuient sur la paroi ont nécessairement leurs vitesses dirigées tangentiellement à cette surface; en chaque point (x, y, z) qui vérifie l'équation de la surface, la vitesse est perpendiculaire à la normale à la surface, ce qui fournit l'équation

$$u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y} + w\frac{\partial F}{\partial z} = 0. \tag{8}$$

Les fonctions u, v, w, p sont en outre assujetties dans tout l'espace à certaines conditions : elles ne peuvent avoir qu'une valeur unique et déterminée pour chaque système de valeur des variables x, y, z, t; elles sont finies et continues, et p est positif. La densité ρ est finie et positive, mais peut varier brusquement en certains points.

Il faut observer que nos équations générales sont fondées sur l'hypothèse de l'égalité de pression dans tous les sens, qui n'est applicable aux fluides en mouvement que si l'on néglige les frottements intérieurs. Leur intégration offre d'ailleurs, presque toujours, des difficultés insurmontables.

297. L'équation de continuité a été mise par Lagrange sous une autre forme, que l'on peut déduire de la forme (5), mais qui se démontre

mieux directement. Comme on l'a dit plus haut, les coordonnées x, y, z d'une particule déterminée P à l'époque t peuvent être considérées comme des fonctions continues de t et de trois constantes arbitraires a, b, c, qui pourront être, par exemple, les coordonnées initiales x_0, y_0, z_0 de cette particule ou tous autres paramètres servant à définir celle-ci. En nous plaçant à ce point de vue, la particule qui occupait, à l'époque $t = 0$, la position $a + da, b, c$ aura pour coordonnées, à l'époque t,

$$x + \frac{\partial x}{\partial a} da, \quad y + \frac{\partial y}{\partial a} da, \quad z + \frac{\partial z}{\partial a} da,$$

et la droite qui joint les positions actuelles de ces deux particules a pour projections sur les axes

$$\frac{\partial x}{\partial a} da, \quad \frac{\partial y}{\partial a} da, \quad \frac{\partial z}{\partial a} da.$$

On trouverait de même, pour les projections des droites qui joignent la particule P respectivement aux positions actuelles des particules définies par les paramètres $(a, b + db, c)$, $(a, b, c + dc)$,

$$\frac{\partial x}{\partial b} db, \quad \frac{\partial y}{\partial b} db, \quad \frac{\partial z}{\partial b} db; \quad \frac{\partial x}{\partial c} dc, \quad \frac{\partial y}{\partial c} dc, \quad \frac{\partial z}{\partial c} dc.$$

Si l'on exprime le volume du parallélipipède qui a pour arêtes ces trois droites au moyen de la formule donnée par Lagrange pour le volume de la pyramide triangulaire, en fonction des projections de ses arêtes, et si l'on désigne par

$$D\left(\frac{x, y, z}{a, b, c}\right) \qquad \text{(Cours d'An., Note II)}$$

le déterminant fonctionnel formé avec les dérivées partielles de x, y, z par rapport à a, b, c, on a

$$\rho D\left(\frac{x, y, z}{a, b, c}\right) da\,db\,dc$$

pour la masse de ce parallélipipède infiniment petit. Mais comme il se compose des mêmes points matériels qu'à l'époque $t = 0$, cette masse est invariable, et l'on a, par suite, en désignant par ρ_0 la densité à l'époque $t = 0$,

$$(9) \qquad \rho D\left(\frac{x, y, z}{a, b, c}\right) = \rho_0 D\left(\frac{x_0, y_0, z_0}{a, b, c}\right).$$

C'est une nouvelle forme de l'équation de continuité. Elle se simplifie si a, b, c sont précisément les valeurs initiales de x, y, z; le déterminant au second membre se réduit à l'unité, donc on a simplement

$$(10) \qquad D\left(\frac{x, y, z}{a, b, c}\right) = \frac{\rho_0}{\rho},$$

et si le fluide est incompressible, de sorte que ρ_0 et ρ soient égaux,

$$(11) \qquad D\left(\frac{x, y, z}{a, b, c}\right) = 1$$

sera l'équation de continuité. Nous représenterons en général par Δ le déterminant qui figure au premier membre.

298. Reprenons maintenant les équations différentielles du mouvement sous la forme (3), et observons que u, v, w étant, par les équations (1), des fonctions de x, y, z, t, ils deviennent, lorsqu'on y remplace x, y, z par leurs valeurs en fonction de a, b, c, t, des fonctions de ces dernières quantités. Nous représenterons par

$$\frac{du}{dt}, \quad \frac{dv}{dt}, \quad \frac{dw}{dt}$$

les dérivées de u, v, w par rapport au temps dans cette dernière hypothèse, c'est-à-dire, lorsqu'on regarde u, v, w comme se rapportant à une même particule dans toute la suite du temps.

Ces équations, mises sous la forme

$$(\alpha) \qquad \frac{du}{dt} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{dv}{dt} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{dw}{dt} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z},$$

multipliées respectivement par

$$\frac{\partial x}{\partial a}, \quad \frac{\partial y}{\partial a}, \quad \frac{\partial z}{\partial a},$$

et ajoutées, donneront celle-ci

$$\frac{du}{dt}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{dv}{dt}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{dw}{dt}\frac{\partial z}{\partial a} = X\frac{\partial x}{\partial a} + Y\frac{\partial y}{\partial a} + Z\frac{\partial z}{\partial a} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial a}.$$

Nous supposerons que les forces admettent un potentiel U, en sorte que

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z};$$

de plus, qu'il existe entre la pression p et la densité ρ une relation

déterminée, en sorte que l'on puisse poser

$$P = \int \frac{dp}{\rho}, \quad U - P = \Omega;$$

l'équation ci-dessus deviendra donc

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt}\dfrac{\partial x}{\partial a} + \dfrac{dv}{dt}\dfrac{\partial y}{\partial a} + \dfrac{dw}{dt}\dfrac{\partial z}{\partial a} = \dfrac{\partial \Omega}{\partial a}, \\ \dfrac{du}{dt}\dfrac{\partial x}{\partial b} + \dfrac{dv}{dt}\dfrac{\partial y}{\partial b} + \dfrac{dw}{dt}\dfrac{\partial z}{\partial b} = \dfrac{\partial \Omega}{\partial b}, \\ \dfrac{du}{dt}\dfrac{\partial x}{\partial c} + \dfrac{dv}{dt}\dfrac{\partial y}{\partial c} + \dfrac{dw}{dt}\dfrac{\partial z}{\partial c} = \dfrac{\partial \Omega}{\partial c}, \end{cases}$$

les deux dernières équations se démontrant comme la première. Dérivons partiellement la deuxième et la troisième, respectivement, par rapport à c et à b, et retranchons membre à membre, en observant que l'on a

$$\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{du}{dt}\frac{\partial x}{\partial b}\right) - \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{du}{dt}\frac{\partial x}{\partial c}\right) = \frac{\partial x}{\partial b}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u}{\partial c}\right) - \frac{\partial x}{\partial c}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u}{\partial b}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial u}{\partial c} - \frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial u}{\partial b}\right),$$

car

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial b}\right) = \frac{\partial u}{\partial b}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial c}\right) = \frac{\partial u}{\partial c};$$

On aura, les seconds membres se détruisant,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial u}{\partial c} - \frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial u}{\partial b} + \frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial v}{\partial c} - \frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial v}{\partial b} + \frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial w}{\partial c} - \frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial w}{\partial b}\right) = 0.$$

La dérivée de cette expression par rapport au temps étant nulle, sa valeur est indépendante du temps, et en opérant de la même manière sur les autres équations et désignant par A, B, C des constantes indépendantes du temps, on aura

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial b}\dfrac{\partial u}{\partial c} - \dfrac{\partial x}{\partial c}\dfrac{\partial u}{\partial b} + \dfrac{\partial y}{\partial b}\dfrac{\partial v}{\partial c} - \dfrac{\partial y}{\partial c}\dfrac{\partial v}{\partial b} + \dfrac{\partial z}{\partial b}\dfrac{\partial w}{\partial c} - \dfrac{\partial z}{\partial c}\dfrac{\partial w}{\partial b} = A, \\ \dfrac{\partial x}{\partial c}\dfrac{\partial u}{\partial a} - \dfrac{\partial x}{\partial a}\dfrac{\partial u}{\partial c} + \dfrac{\partial y}{\partial c}\dfrac{\partial v}{\partial a} - \dfrac{\partial y}{\partial a}\dfrac{\partial v}{\partial c} + \dfrac{\partial z}{\partial c}\dfrac{\partial w}{\partial a} - \dfrac{\partial z}{\partial a}\dfrac{\partial w}{\partial c} = B, \\ \dfrac{\partial x}{\partial a}\dfrac{\partial u}{\partial b} - \dfrac{\partial x}{\partial b}\dfrac{\partial u}{\partial a} + \dfrac{\partial y}{\partial a}\dfrac{\partial v}{\partial b} - \dfrac{\partial y}{\partial b}\dfrac{\partial v}{\partial a} + \dfrac{\partial z}{\partial a}\dfrac{\partial w}{\partial b} - \dfrac{\partial z}{\partial b}\dfrac{\partial w}{\partial a} = C. \end{cases}$$

Nous donnerons une forme plus simple à ces équations en les multi-

pliant respectivement par

$$\frac{\partial x}{\partial a}, \quad \frac{\partial x}{\partial b}, \quad \frac{\partial x}{\partial c}$$

et les ajoutant. Nous aurons évidemment

$$D\left(\frac{x, x, u}{a, b, c}\right) + D\left(\frac{x, y, v}{a, b, c}\right) + D\left(\frac{x, z, w}{a, b, c}\right) = A\frac{\partial x}{\partial a} + B\frac{\partial x}{\partial b} + C\frac{\partial x}{\partial c}.$$

Le premier déterminant a deux colonnes égales et s'évanouit; d'après une propriété connue des déterminants fonctionnels, le second et le troisième ont respectivement les valeurs

$$D\left(\frac{x, y, v}{a, b, c}\right) = D\left(\frac{x, y, v}{x, y, z}\right) \cdot D\left(\frac{x, y, z}{a, b, c}\right) = \Delta\frac{\partial v}{\partial z},$$

$$D\left(\frac{x, z, w}{a, b, c}\right) = D\left(\frac{x, z, w}{x, y, z}\right) \cdot D\left(\frac{x, y, z}{a, b, c}\right) = -\Delta\frac{\partial w}{\partial y}.$$

Substituant et opérant de la même manière sur les équations (13) au moyen des dérivées de y et de z par rapport à a, b, c, on obtient les relations

$$(14) \quad \begin{cases} \Delta\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) = A\frac{\partial x}{\partial a} + B\frac{\partial x}{\partial b} + C\frac{\partial x}{\partial c}, \\ \Delta\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) = A\frac{\partial y}{\partial a} + B\frac{\partial y}{\partial b} + C\frac{\partial y}{\partial c}, \\ \Delta\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) = A\frac{\partial z}{\partial a} + B\frac{\partial z}{\partial b} + C\frac{\partial z}{\partial c}. \end{cases}$$

299. Ces équations renferment d'importantes propriétés du mouvement des fluides. Admettons qu'à un instant déterminé, $t = 0$, les binômes

$$\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$$

soient nuls. Les équations (14) ayant lieu à chaque instant, on déduira de là des valeurs nulles pour les constantes A, B, C, car le déterminant fonctionnel

$$D\left(\frac{x, y, z}{a, b, c}\right) = \Delta$$

ne peut être nul pour $t = 0$, si l'on suppose, comme nous le ferons, que

a, b, c soient les valeurs initiales de x, y, z; sa valeur est $\rho_0 : \rho$ d'après l'équation (10). On aura donc, A, B, C étant nuls, et Δ différent de zéro, à un instant quelconque,

$$\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \tag{15}$$

Mais ces équations expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour que u, v, w soient les dérivées partielles par rapport à x, y, z d'une même fonction $\varphi(x, y, z, t)$(1). On aura donc

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

On peut donc formuler ce théorème important : *Lorsque l'expression*

$$udx + vdy + wdz$$

est une différentielle exacte, par rapport aux variables indépendantes x, y, z, à un instant donné du mouvement du fluide, pour tout ou partie de la masse fluide, si les forces motrices admettent un potentiel et si la densité et la pression sont liées par une relation déterminée, cette expression restera une différentielle exacte pendant toute la durée du mouvement, pour les mêmes parties de la masse.

La fonction φ est alors ce qu'on nomme un *potentiel de vitesse*. Cette condition remarquable est réalisée, notamment, lorsque le fluide est supposé en repos à l'instant initial.

Représentons par

$$T = \tfrac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$$

la moitié du carré de la vitesse du fluide. Nous aurons, d'après les relations (15),

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial(u^2 + v^2 + w^2)}{\partial x},$$

ou enfin, u étant la dérivée de φ par rapport à x,

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + T\right).$$

(1) Voir la note I à la fin du volume.

Les équations (α) pourront donc s'écrire, par la substitution des valeurs de

$$\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt}, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}, \text{etc.} \ldots$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\mathrm{T}-\Omega\right)=0,\\ &\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\mathrm{T}-\Omega\right)=0,\\ &\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\mathrm{T}-\Omega\right)=0,\end{aligned}\right.$$

et par conséquent, la fonction entre parenthèses ayant ses dérivées partielles nulles par rapport à x, y et z, ne peut dépendre que de la seule variable t. On a donc l'intégrale

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\mathrm{T}-\Omega=\psi(t),$$

qu'on peut aussi écrire sous la forme suivante, en faisant rentrer la fonction ψ dans le potentiel φ, ce qui est permis, puisque φ n'est défini que par ses dérivées partielles en x, y, z :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]=\mathrm{U}-\int\frac{dp}{\rho}. \tag{16}$$

L'équation de continuité d'un fluide incompressible (7) se réduit, dans le cas où il y a un potentiel de vitesse, à la forme remarquable

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0. \tag{17}$$

200. On peut déduire de ces formules (14) d'autres belles propriétés lorsqu'on se représente le mouvement du fluide, autour d'un point quelconque M (x, y, z), comme composé 1° d'une translation égale à la vitesse du point M ; 2° d'une rotation autour d'un certain axe passant par le point M ; 3° d'une déformation résultant de trois *dilatations* (positives ou négatives) suivant trois directions rectangulaires Mx', My', Mz'.

Si u, v, w sont les composantes de la vitesse au point M, u, v, w seront les composantes de la vitesse de translation du fluide. Celles de la vitesse due à une rotation dont λ, μ, ν seraient les composantes parallèles aux axes, seront, pour le point $(x+\partial x,\ y+\partial y,\ z+\partial z)$,

$$\mu\partial z-\nu\partial y,\quad \nu\partial x-\lambda\partial z,\quad \lambda\partial y-\mu\partial x.$$

Enfin, les dilatations suivant les directions Mx', My', Mz' donnent, parallèlement à ces directions, des vitesses

$$a\partial x', \quad b\partial y', \quad c\partial z',$$

mais il faut exprimer $\partial x', \partial y', \partial z'$ en fonction de $\partial x, \partial y, \partial z$ par les relations

$$\partial x' = \partial x \cos \overline{xx'} + \partial y \cos \overline{yx'} + \partial z \cos \overline{zx'},$$

. . . .

et projeter ces vitesses sur les directions Mx, My, Mz par les relations

$$V_x = V_{x'} \cos \overline{xx'} + V_{y'} \cos \overline{xy'} + V_{z'} \cos \overline{xz'},$$

. . . .

En faisant ces substitutions, on reconnaît immédiatement que les composantes parallèles à x, y, z des vitesses dues à ces dilatations, sont de la forme

$$\alpha\partial x + n\partial y + m\partial z, \quad n\partial x + \beta\partial y + l\partial z, \quad m\partial x + l\partial y + \gamma\partial z,$$

α, β, γ, l, m, n étant des coëfficients constants pour toutes les molécules voisines du point M.

D'après cela, si l'on fait la somme des composantes, parallèles à un même axe, des vitesses dues à la translation, à la rotation et à la dilatation, on trouvera pour les composantes u', v', w' de la vitesse totale au point $(x + \partial x, \ y + \partial y, \ z + \partial z)$,

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} u' &= u + \alpha\partial x + (n - \nu)\,\partial y + (m + \mu)\,\partial z, \\ v' &= v + (n + \nu)\,\partial x + \beta\partial y + (l - \lambda)\,\partial z, \\ w' &= w + (m - \mu)\,\partial x + (l + \lambda)\,\partial y + \gamma\partial z. \end{aligned} \right.$$

D'un autre côté, le mouvement du fluide est toujours supposé continu, c'est-à-dire que les coordonnées de ses différents points sont des fonctions continues de leurs valeurs initiales et du temps, ainsi que leurs dérivées partielles. Dans cette hypothèse, les composantes u', v', w' de la vitesse au point $(x + \partial x, y + \partial y, z + \partial z)$ sont évidemment données par les formules

$$\left\{ \begin{aligned} u' &= u + \frac{\partial u}{\partial x}\partial x + \frac{\partial u}{\partial y}\partial y + \frac{\partial u}{\partial z}\partial z, \\ v' &= v + \frac{\partial v}{\partial x}\partial x + \frac{\partial v}{\partial y}\partial y + \frac{\partial v}{\partial z}\partial z, \\ w' &= w + \frac{\partial w}{\partial x}\partial x + \frac{\partial w}{\partial y}\partial y + \frac{\partial w}{\partial z}\partial z. \end{aligned} \right.$$

Rapprochées des formules (18), ces valeurs conduisent, pour déterminer $\alpha, \beta, \ldots l, m, \ldots$ aux équations

$$\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \beta = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$l + \lambda = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad l - \lambda = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad m + \mu = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad m - \mu = \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$n + \nu = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad n - \nu = \frac{\partial u}{\partial y},$$

qui fournissent les valeurs des rotations et dilatations, et montrent par conséquent la possibilité de représenter le mouvement autour d'un point par l'hypothèse émise ci-dessus. Nous en tirons, en particulier, les composantes de la rotation autour du point M sous la forme

$$(19) \quad \lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad \mu = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad \nu = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

301. La première remarque à faire est celle-ci : lorsqu'il existe un potentiel de vitesse, il résulte des équations (15) que λ, μ, ν se réduisent à zéro, et qu'il n'y a pas de rotation des particules fluides sur elles-mêmes. Ces équations (15) étant vérifiées pendant toute la durée du mouvement lorsqu'elles le sont à un instant donné, on a ce théorème :

Lorsque les particules fluides n'ont pas de mouvement de rotation à un instant déterminé, elles n'en acquièrent aucun pendant la durée du mouvement.

Reprenons nos équations (14), et posons dans ces formules

$$A = -2A'\rho\Delta, \quad B = -2B'\rho\Delta, \quad C = -2C'\rho\Delta.$$

Les quantités A,B,C étant indépendantes de t, ainsi que le produit $\rho\Delta$ d'après l'équation (9), il en sera de même des quantités A′,B′,C′. Ces équations prendront la forme

$$(20) \quad \begin{cases} \lambda = \rho\left(A'\dfrac{\partial x}{\partial a} + B'\dfrac{\partial x}{\partial b} + C'\dfrac{\partial x}{\partial c}\right), \\ \mu = \rho\left(A'\dfrac{\partial y}{\partial a} + B'\dfrac{\partial y}{\partial b} + C'\dfrac{\partial y}{\partial c}\right), \\ \nu = \rho\left(A'\dfrac{\partial z}{\partial a} + B'\dfrac{\partial z}{\partial b} + C'\dfrac{\partial z}{\partial c}\right). \end{cases}$$

Concevons que l'on prenne da, db, dc respectivement proportionnels

à A′, B′, C′, ou que l'on pose

$$\frac{da}{A'} = \frac{db}{B'} = \frac{dc}{C'} = \frac{\sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}} = \varepsilon,$$

ε désignant une quantité infiniment petite évidemment indépendante du temps. La première des équations (20) devient

$$\lambda = \frac{\rho}{\varepsilon}\left(\frac{\partial x}{\partial a} da + \frac{\partial x}{\partial b} db + \frac{\partial x}{\partial c} dc\right) = \frac{\rho}{\varepsilon} dx,$$

si l'on suppose $dt = 0$. On a donc

$$dx = \frac{\varepsilon}{\rho}\lambda, \quad \text{et de même} \quad dy = \frac{\varepsilon}{\rho}\mu, \quad dz = \frac{\varepsilon}{\rho}\nu.$$

Ces équations ayant lieu à chaque instant, on a pour $t = 0$,

$$\frac{da}{\lambda_0} = \frac{db}{\mu_0} = \frac{dc}{\nu_0} = \frac{\varepsilon}{\rho_0},$$

et par suite

$$A' = \frac{\lambda_0}{\rho_0}, \quad B' = \frac{\mu_0}{\rho_0}, \quad C' = \frac{\nu_0}{\rho_0}.$$

Ainsi, dans le cas actuel, A′, B′, C′ sont proportionnels aux composantes de la rotation initiale de la molécule considérée, et l'on conclut alors des valeurs ci-dessus de dx, dy, dz que, *si la droite qui joint deux particules infiniment voisines du fluide coïncide, à un certain instant, avec l'axe de rotation de la première, elle coïncidera avec cet axe à toute époque*. De plus, si nous désignons par η la vitesse angulaire de la rotation, l'équation

$$\eta = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2} = \frac{\rho}{\varepsilon}\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \rho\frac{\delta}{\varepsilon}$$

nous montrera que *la vitesse de rotation de la particule, à chaque instant, est proportionnelle au produit de la densité par la distance δ des deux particules considérées*.

302. On peut interpréter autrement ces résultats en introduisant les expressions d'Helmoltz. Concevons qu'à un instant donné, on trace dans la masse fluide une ligne tangente, en chacun de ses points, à la direction de l'axe de rotation qui répond à ce point : on aura ce que nous nommerons une *ligne de tourbillon*. Le théorème établi ci-dessus montre que les particules fluides qui, à un instant donné, sont sur une ligne de

tourbillon restent toujours sur une telle ligne, ou qu'*une ligne de tourbillon est toujours composée des mêmes particules fluides.*

On nomme *filet-tourbillon* la portion de la masse fluide comprise dans le faisceau des lignes de tourbillon menées par le contour d'un petit élément plan σ normal à ces lignes. Ces filets jouissent de propriétés remarquables :

1° Considérons la masse d'un filet entre deux sections normales à une distance très petite δ, à un instant déterminé : elle a pour expression $\rho\sigma\delta$. Cette masse est invariable puisqu'elle est toujours composée des mêmes particules. Mais on a vu que $\rho\delta$ est proportionnel à la vitesse de rotation η, donc le produit $\sigma\eta$ restera constant; donc, *pour un même élément d'un filet-tourbillon, le produit de la section transversale du filet par la vitesse angulaire de la rotation reste constant à toute époque.*

2° Soit Ω le volume compris sous une surface fermée S. Nous aurons, par la formule d'Ostrogradsky.

$$\int_\Omega\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\frac{\partial\mu}{\partial y}+\frac{\partial\nu}{\partial z}\right)d\omega=-\int_S(\lambda\cos\overline{nx}+\mu\cos\overline{ny}+\nu\cos\overline{nz})d\sigma=-\int_S\eta\cos\overline{n\eta}\,d\sigma,$$

n désignant la direction de la normale *intérieure* à la surface S, $\overline{n\eta}$ l'angle que fait cette direction avec celle de l'axe de rotation du fluide au même point. Les formules (19) montrent que l'on a identiquement

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\frac{\partial\mu}{\partial y}+\frac{\partial\nu}{\partial z}=0$$

en tout point de la masse fluide; l'intégrale ci-dessus est nulle, et par suite

$$\int_S\eta\cos\overline{n\eta}\,d\sigma=0.$$

Appliquons cette formule à un filet tourbillon limité par deux sections transversales quelconques σ', σ''. La portion de l'intégrale relative à la surface latérale du filet est nulle, puisque, d'après la définition même des lignes de tourbillon, on a pour chaque élément $d\sigma$ de cette surface $\overline{n\eta}=90°$, $\cos\overline{n\eta}=0$; on a donc simplement, en accentuant les quantités qui se rapportent aux deux bases σ' et σ'' du filet,

$$\eta'\sigma'\cos\overline{n'\eta'}+\eta''\sigma''\cos\overline{n''\eta''}=0,$$

ou, comme évidemment $\cos\overline{n'\eta'}=1$, $\cos\overline{n''\eta''}=-1$,

$$\eta'\sigma'=\eta''\sigma''.$$

On conclut de là que *le produit* $\eta\sigma$ *de la vitesse rotatoire par la section du filet*, qui est constant (1°) pour un même élément du filet dans le temps, *est aussi constant à un même instant aux différents points d'un même filet.*

D'autres propriétés générales du mouvement des fluides, lorsqu'il existe un potentiel de vitesse, seront plus faciles à déduire comme conséquences de la théorie du potentiel.

303. Les équations générales du mouvement des fluides peuvent se mettre encore sous une autre forme qui a l'avantage de rappeler beaucoup les équations dynamiques de Lagrange (**249**) et par suite, de se prêter facilement aux changements de coordonnées. Posons toujours

$$dU = Xdx + Ydy + Zdz, \quad P = \int \frac{dp}{\rho}, \quad U - P = \Omega,$$

$$T = \tfrac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2).$$

Les équations (α) s'écriront

$$(21) \qquad \frac{du}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad \frac{dw}{dt} = \frac{\partial \Omega}{dz}.$$

Introduisons, au lieu des variables x, y, z, trois autres variables ξ, η, ζ liées aux premières par des équations données

$$x = \varpi(\xi, \eta, \zeta), \quad y = \varpi_1(\xi, \eta, \zeta), \quad z = \varpi_2(\xi, \eta, \zeta).$$

Nous aurons

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial \xi}\xi' + \frac{\partial x}{\partial \eta}\eta' + \frac{\partial x}{\partial \zeta}\zeta',$$

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial \xi}\xi' + \frac{\partial y}{\partial \eta}\eta' + \frac{\partial y}{\partial \zeta}\zeta',$$

$$w = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial \xi}\xi' + \frac{\partial z}{\partial \eta}\eta' + \frac{\partial z}{\partial \zeta}\zeta',$$

ξ', η', ζ' étant les dérivées totales de ξ, η, ζ par rapport au temps. Multipliant les équations (21) par

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial z}{\partial \xi}$$

et ajoutant, on a

$$\frac{du}{dt}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{dv}{dt}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{dw}{dt}\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{\partial \Omega}{\partial \xi},$$

ou, par une transformation évidente,

$$\frac{d}{dt}\left(u\frac{\partial x}{\partial \xi}+v\frac{\partial y}{\partial \xi}+w\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)-\left(u\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial \xi}+v\frac{d}{dt}\frac{\partial y}{\partial \xi}+w\frac{d}{dt}\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)=\frac{\partial \Omega}{\partial \xi}.$$

Mais les valeurs ci-dessus de u, v, w étant linéaires par rapport à ξ', η', ζ', on en déduit

$$\frac{\partial u}{\partial \xi'}=\frac{\partial x}{\partial \xi},\quad \frac{\partial v}{\partial \xi'}=\frac{\partial y}{\partial \xi},\quad \frac{\partial w}{\partial \xi'}=\frac{\partial z}{\partial \xi},$$

d'où

$$u\frac{\partial x}{\partial \xi}+v\frac{\partial y}{\partial \xi}+w\frac{\partial z}{\partial \xi}=u\frac{\partial u}{\partial \xi'}+v\frac{\partial v}{\partial \xi'}+w\frac{\partial w}{\partial \xi'}=\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \xi'}.$$

D'autre part,

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}=\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2}\xi'+\frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta}\eta'+\frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \zeta}\zeta'=\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial \xi},$$

et de même

$$\frac{\partial v}{\partial \xi}=\frac{d}{dt}\frac{\partial y}{\partial \xi},\quad \frac{\partial w}{\partial \xi}=\frac{d}{dt}\frac{\partial z}{\partial \xi},$$

d'où

$$u\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial \xi}+v\frac{d}{dt}\frac{\partial y}{\partial \xi}+w\frac{d}{dt}\frac{\partial z}{\partial \xi}=\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \xi}.$$

Substituant dans l'équation ci-dessus et opérant de même sur les deux autres équations (21), on aura

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \xi'}-\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \xi}=\frac{\partial \Omega}{\partial \xi},\\ &\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \eta'}-\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \eta}=\frac{\partial \Omega}{\partial \eta},\\ &\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \zeta'}-\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \zeta}=\frac{\partial \Omega}{\partial \zeta},\end{aligned}\right.$$

qui sont les équations du mouvement sous une nouvelle forme. T s'exprimera directement en fonction des coordonnées ξ, η, ζ par l'expression de l'élément d'arc dans ce système de coordonnées, et les formules (22) se prêteront à aborder directement le problème dans ce même système.

304. Supposons, par exemple, qu'on veuille employer les coordon-

nées sphériques r, θ, ψ : les équations de transformation étant

$$x = r\sin\theta\cos\psi,\quad y = r\sin\theta\sin\psi,\quad z = r\cos\theta,$$

la formule connue de la différentielle de l'arc

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\psi^2$$

donnera immédiatement

$$T = \tfrac{1}{2}(r'^2 + r^2\theta'^2 + r^2\sin^2\theta.\psi'^2),$$

et les équations (22) prendront la forme

$$(23)\quad \begin{cases} \dfrac{dr'}{dt} - r(\theta'^2 + \sin^2\theta.\psi'^2) = \dfrac{\partial\Omega}{\partial r}, \\ \dfrac{d.r^2\theta'}{dt} - r^2\sin\theta\cos\theta.\psi'^2 = \dfrac{\partial\Omega}{\partial\theta}, \\ \dfrac{d.r^2\sin^2\theta.\psi'}{dt} = \dfrac{\partial\Omega}{\partial\psi}. \end{cases}$$

De même, si l'on adopte les coordonnées cylindriques, savoir, la distance r à l'axe des z, l'angle que fait cette distance avec l'axe des x, et la hauteur z au-dessus du plan XY, on aura

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2,\quad T = \tfrac{1}{2}(r'^2 + r^2\theta'^2 + z'^2),$$

et les équations du mouvement du fluide en coordonnées cylindriques seront

$$(24)\qquad \frac{dr'}{dt} - r\theta'^2 = \frac{\partial\Omega}{\partial r},\quad \frac{d(r^2\theta')}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial\theta},\quad \frac{dz'}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial z}.$$

Elles se prêtent à l'étude des mouvements symétriques autour d'un axe.

CHAPITRE XXII.

APPLICATION DES ÉQUATIONS GÉNÉRALES A DIVERS PROBLÈMES.

305. *Mouvement permanent.* — Lorsque le fluide est soumis à des conditions parfaitement invariables; que les forces qui agissent en chaque point de l'espace occupé par le fluide ne dépendent pas du temps, on admet qu'au bout d'un certain temps il s'établit un état *permanent*, c'est-à-dire que l'état du fluide en un point donné (x, y, z) ne varie plus,

et que les quantités u, v, w, p, ρ peuvent dépendre encore de x, y, z, mais sont devenues indépendantes de t. Il suit de là que les particules fluides qui, à des époques différentes, passent par un même point, y passent avec des vitesses identiques et parcourent des trajectoires identiques. Si l'on conçoit, à un instant donné, l'ensemble des particules fluides qui, suivant ainsi un même chemin, ont passé ou passeront à travers un petit élément plan donné, on aura ce qu'on appelle un *filet* du fluide.

Les cas où le mouvement est sensiblement permanent se présentent souvent. Ainsi, unrécipient rempli d'un liquide homogène et pesant, maintenu à un niveau constant par un réservoir indéfini, et muni d'un orifice d'écoulement, offre un exemple simple du cas où les conditions du mouvement permanent sont réalisées.

Dans l'hypothèse du mouvement permanent, on a les équations

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Si ds désigne l'élément de la trajectoire d'une particule fluide déterminée, on a évidemment, V étant la vitesse du fluide,

$$u = V\frac{dx}{ds}, \quad v = V\frac{dy}{ds}, \quad w = V\frac{dz}{ds}.$$

Soit U le potentiel des forces X, Y, Z. La première équation (4) du chapitre précédent devient

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} - V\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{ds}\right) = \frac{\partial U}{\partial x} - V\frac{du}{ds}.$$

On a de même

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} - V\frac{dv}{ds}, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z} - V\frac{dw}{ds}.$$

Multipliant ces équations respectivement par $dx : ds$, $dy : ds$, $dz : ds$ et ajoutant, on a, eu égard aux équations ci-dessus,

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{ds} = \frac{dU}{ds} - u\frac{du}{ds} - v\frac{dv}{ds} - w\frac{dw}{ds},$$

ou, à cause de la relation

$$u^2 + v^2 + w^2 = V^2,$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{ds} = \frac{dU}{ds} - \frac{1}{2}\frac{d.V^2}{ds}.$$

Intégrons et introduisons de nouveau la fonction

$$P = \int \frac{dp}{\rho},$$

nous aurons

$$\text{(1)} \qquad V^2 = 2(U - P) + C,$$

C désignant une constante *par rapport à s*, c'est-à-dire que tout le long d'un même filet fluide C a une valeur invariable.

306. Cette intégrale, qui n'est au fond que la traduction du théorème de l'énergie, a une importance spéciale. Lorsque le liquide est homogène, ρ étant constant, P est égal à $p : \rho$, et l'équation devient

$$\text{(2)} \qquad V^2 = 2\left(U - \frac{p}{\rho}\right) + C.$$

Supposons qu'il s'agisse d'un gaz en mouvement permanent. Lorsque ce gaz subit une *transformation adiabatique*, c'est-à-dire lorsqu'il n'absorbe ni ne perd de la chaleur pendant son mouvement, on sait que la pression et la densité sont liées par la relation

$$p = k\rho^\gamma,$$

k étant un coefficient constant et γ le rapport des chaleurs spécifiques à pression et à volume constant pour le gaz considéré. On a donc

$$P = \int \frac{dp}{\rho} = k\gamma \int \rho^{\gamma-2}\, d\rho = \frac{k\gamma}{\gamma - 1}\rho^{\gamma-1},$$

ou

$$P = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho},$$

et l'équation (1) devient

$$\text{(3)} \qquad V^2 = 2\left(U - \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho}\right) + C.$$

L'équation (2), mise sous la forme

$$p = \rho\left(U - \tfrac{1}{2}V^2 + \tfrac{1}{2}C\right)$$

montre que, le long d'un même filet fluide, la pression est généralement plus grande aux points où la vitesse est plus petite et vice versa. L'équation (3) conduit à une conséquence analogue.

L'équation (2) montre également qu'il y a une limite de vitesse que le fluide ne peut dépasser sans se disjoindre. Concevons, par exemple, que

l'on puisse négliger les forces motrices, et que le liquide s'écoule d'un récipient dans lequel à une petite distance de l'orifice le mouvement est insensible et la pression égale à une constante Π. On aura

$$C = \frac{2\Pi}{\rho},$$

et par suite

$$V^2 = 2\frac{\Pi - p}{\rho}, \quad p = \Pi - \rho\frac{V^2}{2}.$$

On voit que si V^2 venait à surpasser $2\Pi : \rho$, p deviendrait négatif; il y aurait dans le liquide une *tension* au lieu d'une *pression*, et l'on admet qu'un fluide parfait se sépare sous la plus petite force de tension.

307. — I. Appliquons l'équation (2) au mouvement permanent d'un liquide pesant, maintenu à un niveau constant dans un vase par un réservoir d'alimentation et s'écoulant par un orifice percé à la partie inférieure du vase. L'axe de z étant vertical dans le sens de la pesanteur, on a

$$U = gz,$$

l'équation (2) devient

$$V^2 = 2\left(gz - \frac{p}{\rho}\right) + C.$$

Pour déterminer la constante C pour un filet quelconque, nous admettrons encore que la surface libre du liquide soit très étendue relativement à celle de l'orifice d'écoulement, et qu'elle soit soumise à une pression uniforme Π (pression de l'atmosphère). Tous les filets fluides ayant leur origine à la surface libre, la continuité exige que la vitesse y soit incomparablement moindre qu'à l'orifice, et à peu près négligeable. La surface libre restera donc sensiblement plane et horizontale, et nous la prendrons pour plan XY. On aura donc, à la surface,

$$V = 0, \quad z = 0, \quad p = \Pi,$$

d'où

$$C = \frac{2\,\Pi}{\rho},$$

et

$$V^2 = 2gz + \frac{2(\Pi - p)}{\rho}. \tag{4}$$

Cette égalité fait connaître la vitesse en un point quelconque de la masse fluide; *à la surface* du jet qui sort de l'orifice, la pression p sera généralement la même qu'à surface libre; on aura $p = \Pi$, et

$$V = \sqrt{2gz}.$$

De là le théorème de Torricelli : *La vitesse avec laquelle un liquide pesant s'écoule par un orifice étroit, percé à la base d'un récipient où le liquide est maintenu à un niveau constant, est égale à celle qu'un corps acquerrait s'il tombait, en chûte libre, d'une hauteur égale à celle du niveau du liquide au-dessus de l'orifice.*

Lorsqu'on applique ce principe pour mesurer la quantité de liquide qui s'écoule en un temps donné par l'orifice, on trouve un résultat trop élevé. La première raison en est que le jet de liquide est composé d'une infinité de filets fluides qui convergent de toute la masse vers l'orifice, et qui, conservant cette convergence après leur passage par l'ouverture, vont passer en réalité à travers une section plus petite qu'on appelle la *veine contractée*. C'est donc à cette section que l'on doit appliquer le théorème de Torricelli.

En second lieu, ce n'est qu'à la surface de la veine que la pression est réellement égale à la pression atmosphérique Π; mais les filets fluides plus rapprochés de l'axe de la veine présentent une pression plus grande, et par conséquent, d'après l'équation (4), une vitesse moindre que celle qui résulterait du principe de Torricelli.

Le rapport de la section Σ' de de la veine fluide au point où elle est le plus contractée à la section Σ de l'ouverture, se nomme le *coefficient de contraction*. Dans le cas d'une simple ouverture en paroi mince, sa valeur est sensiblement 0,62. Elle s'accroît notablement si l'on munit l'ouverture, à l'extérieur, d'un petit ajutage cylindrique; elle tombe au contraire à 0,5 si cet ajutage est placé à l'intérieur.

D'après cela, le *débit* de l'orifice, ou la masse liquide qui s'écoule dans l'unité de temps, aura pour expression

$$\rho\Sigma' \sqrt{2gz_1},$$

z_1 étant la hauteur verticale du niveau du liquide au-dessus du centre de gravité de la section contractée.

308. — II. *Ecoulement d'un gaz.* — Nous supposons un gaz à la pression p_1, à la densité ρ_1, dans un réservoir d'où le gaz s'échappe par

une ouverture étroite dans une capacité où la pression est uniforme, égale à p_2. Les forces extérieures sont négligeables et la transformation adiabatique.

Ici, il faut faire usage de l'équation (3), et comme dans le réservoir, à une petite distance de l'orifice, on peut supposer la vitesse du fluide insensible, la pression égale à p_1 et la densité à ρ_1, la constante C est déterminée pour un filet quelconque par l'égalité

$$C = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p_1}{\rho_1}.$$

L'équation (3) devient

$$V^2 = \frac{2\gamma}{\gamma - 1}\left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p}{\rho}\right),$$

et donne pour la vitesse à la section contractée, ρ_2 désignant la densité en ce point,

$$V^2 = \frac{2\gamma}{\gamma - 1}\left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2}\right) = \frac{2\gamma}{\gamma - 1}\frac{p_1}{\rho_1}\left(1 - \frac{p_2\rho_1}{p_1\rho_2}\right).$$

Mais la relation déjà rappelée

$$p = k\rho^\gamma$$

donne

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}},$$

et par suite

$$V^2 = \frac{2\gamma}{\gamma - 1}\frac{p_1}{\rho_1}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right].$$

Si l'on désigne par c la vitesse du son dans le gaz renfermé dans le récipient, on sait que c est déterminé par l'équation

$$c^2 = \gamma\frac{p_1}{\rho_1},$$

et l'on a enfin l'expression du carré de la vitesse sous la forme

$$V^2 = \frac{2c^2}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]. \tag{5}$$

Cette vitesse est maximum lorsque $p_2 = 0$, ou lorsque l'écoulement a lieu dans le vide.

On a alors

$$V = c\sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}}.$$

Pour l'air, à la température zéro, V vaut environ 735^m par seconde. Le débit de l'orifice est proportionnel au produit $V\rho_2$; on a d'ailleurs

$$\rho_2 = \rho_1\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}},$$

et en substituant à V sa valeur ci-dessus,

$$V\rho_2 = C\rho_1\sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}}\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Le maximum du débit ne répond plus à $p_2 = 0$. Si l'on pose $p_2 : p_1 = u$ et qu'on applique la règle des maxima, on trouve

$$2u^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - (\gamma + 1) = 0,$$

et par suite

$$u = \left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}, \quad V = C\sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}}.$$

309. — III. Une masse fluide est animée d'une mouvement de rotation autour d'un axe fixe, que l'on prend pour axe des z, et la vitesse angulaire ω de cette rotation varie avec la distance r des molécules à l'axe. Quelle doit être la loi de cette variation pour qu'il existe un potentiel de vitesse?

On a ici

$$u = -\omega y, \quad v = \omega x, \quad w = 0; \quad x^2 + y^2 = v^2;$$

les deux premières équations (15) du chapitre précédent sont vérifiées identiquement; on a d'ailleurs

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \omega + \frac{x^2}{r}\frac{d\omega}{dr} + \omega + \frac{y^2}{r}\frac{d\omega}{dr},$$

à cause des relations

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}.$$

La troisième équation de condition se réduit à

$$2\omega + r\frac{d\omega}{dr} = 0,$$

équation qui, intégrée, donne

$$\omega r^2 = \text{const.} = \mu,$$

d'où

$$\omega = \frac{\mu}{r^2}, \quad V = \frac{\mu}{r}.$$

La vitesse varie donc en raison inverse de la distance à l'axe. On a alors

$$udx + vdy + wdz = \omega(xdy - ydx) = \mu\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2},$$

et par suite

$$\varphi = \mu \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} + C,$$

C désignant une constante. C'est un de ces cas où le potentiel de vitesse est une fonction à détermination multiple, qui admet plusieurs valeurs en un même point de l'espace occupé par le fluide. Les cas où le potentiel n'est pas une fonction simple de x, y, z donnent lieu à des considérations importantes dans lesquelles nous n'entrerons pas ici.

310. — IV. Une masse liquide, homogène, est supposée partir du repos, et remplir un cylindre circulaire droit. Les forces qui sollicitent le fluide ont pour expressions

$$X = -\frac{\mu y}{r^2}, \quad Y = \frac{\mu x}{r^2}, \quad Z = 0,$$

l'axe des z coïncidant avec l'axe du cylindre; μ est une constante, r la distance à l'axe. On suppose que le fluide tourne autour de cet axe, et que la vitesse angulaire ω est une fonction de t et de r seulement. Il faut déterminer cette fonction de manière à vérifier les équations de l'hydrodynamique.

On aura, d'après l'hypothèse,

$$u = -\omega y, \quad v = \omega x, \quad w = 0.$$

L'équation de continuité des liquides

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

devient

$$-y\frac{\partial\omega}{\partial r}\frac{x}{r}+x\frac{\partial\omega}{\partial r}\frac{y}{r}=0,$$

elle est vérifiée. L'équation à la surface est également vérifiée, puisque la vitesse le long du cylindre est normale au rayon r.

Les équations générales (4) du chapitre XXI deviennent, si l'on a toujours égard aux relations

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=\frac{\partial\omega}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r},\ \text{etc...},$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=-\frac{\mu y}{r^3}+y\frac{\partial\omega}{\partial t}+\omega\frac{y^2x}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r}+\omega x\left(\omega+\frac{y^2}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r}\right),$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\mu x}{r^3}-x\frac{\partial\omega}{\partial t}+\omega y\left(\omega+\frac{x^2}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)-\omega\frac{x^2y}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r},$$

la troisième étant vérifiée identiquement. Les deux précédentes se réduisent à

$$(6)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}&=-\frac{\mu y}{r^3}+\omega^2x+y\frac{\partial\omega}{\partial t},\\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}&=\frac{\mu x}{r^3}+\omega^2y-x\frac{\partial\omega}{\partial t}.\end{aligned}\right.$$

Dérivant la première par rapport à y, la seconde par rapport à x et retranchant, on a

$$0=-\frac{2\mu}{r^3}+\frac{2\mu(x^2+y^2)}{r^5}+2\frac{\partial\omega}{\partial t}+\frac{x^2+y^2}{r}\frac{\partial^2\omega}{\partial r\,\partial t},$$

ou, réduisant,

$$r\frac{\partial^2\omega}{\partial r\,\partial t}+2\frac{\partial\omega}{\partial t}=0.$$

Posant

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}=\omega_1,$$

on a d'abord

$$r\frac{\partial\omega_1}{\partial r}+2\omega_1=0,\quad \omega_1=\frac{f(t)}{r^2},$$

$f(t)$ désignant une fonction arbitraire de t seulement. De là on tire

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}=\frac{f(t)}{r^2},\quad \omega=\frac{1}{r^2}\int_0^t f(t)\,dt+\mathrm{F}(r),$$

F (*r*) étant une fonction arbitraire de *r*. Comme ω est nul pour $t = 0$, par hypothèse, il en sera de même de F (*r*), et en posant

$$\lambda = \int_0^t f(t)\, dt,$$

on aura

$$\omega = \frac{\lambda}{r^2}.$$

Comme *p* ne peut être fonction de *z*, en vertu de la dernière équation d'Euler, on a, par les équations (6),

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy\right) = \frac{dp}{\rho} = \mu\frac{xdy - ydx}{r^2} + \lambda^2\frac{xdx + ydy}{r^4} + \frac{d\lambda}{dt}\frac{ydx - xdy}{r^2}$$

ou, en intégrant,

$$\frac{p}{\rho} = \left(\mu - \frac{d\lambda}{dt}\right)\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} - \frac{\lambda^2}{2r^2} + \psi(t),$$

ψ étant une fonction arbitraire de *t*.

La fonction λ est déterminée par la valeur de *p*, car la pression ne pouvant être qu'une fonction simple de *x*, *y*, il faut que le coefficient de $\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$ soit nul, donc

$$\frac{d\lambda}{dt} = \mu, \quad \lambda = \mu t,$$

et l'on a enfin

$$\omega = \frac{\mu t}{r^2}, \quad V = \frac{\mu t}{r}, \quad p = -\tfrac{1}{2}\rho\frac{\mu^2 t^2}{r^2} + \psi(t).$$

211. — V. *Mouvement tourbillonnant.* — Considérons un fluide animé d'un mouvement *symétrique* autour d'un axe OZ, de sorte que, en tous les points situés sur une même circonférence autour de cet axe, la pression, la densité, la vitesse du fluide soient les mêmes. Les forces extérieures sont censées rencontrer l'axe OZ. Cherchons les propriétés d'un semblable mouvement. Les équations générales

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = X - j_x, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = Y - j_y,$$

donnent

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy\right) = (Xdx + Ydy) - (j_x dx + j_y dy).$$

Les différentielles dx, dy se rapportent à un déplacement quelconque; supposons qu'il s'effectue sur la circonférence de rayon r autour de OZ. On aura, p étant alors constant,

$$\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy = 0.$$

On aura aussi $Xdx + Ydy = 0$ puisque la direction de la force motrice est normale à cette circonférence. On en conclut

$$j_x\,dx + j_y\,dy = 0. \tag{7}$$

Mais si l'on pose

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

on aura

$$dx = -r\sin\theta d\theta, \quad dy = r\cos\theta d\theta,$$

car r ne varie pas dans le déplacement adopté.

D'autre part, on trouve sans peine, en regardant actuellement r et θ comme propres à une même particule fluide,

$$j_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\cos\theta - 2\sin\theta\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} - r\cos\theta\frac{dr^2}{dt^2} - r\sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

$$j_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\sin\theta + 2\cos\theta\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} - r\sin\theta\frac{dr^2}{dt^2} + r\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

et la relation (7) deviendra, $d\theta : dt$ étant représenté par ω,

$$2\,\omega\frac{dr}{dt} + r\frac{d\omega}{dt} = 0, \quad \text{d'où} \quad \omega^2 r = a,$$

a désignant une quantité constante pour une même particule fluide. Il résulte de là

$$\omega = \frac{a}{r^2},$$

c'est-à-dire que *dans le mouvement d'un fluide qui tourbillonne autour d'un axe de symétrie, la vitesse angulaire d'une même molécule varie, pendant son mouvement, en raison inverse du carré de sa distance à l'axe,* théorème dû à M. Swanberg. L'équation

$$r^2 d\theta = a dt$$

fait voir aussi que le rayon vecteur de la particule, projeté sur un plan normal à l'axe, décrit des aires proportionnelles aux temps.

Il est bon d'observer que le théorème ci-dessus est une conséquence immédiate des équations (22) du chapitre précédent. On a, en effet, pour la seconde équation du mouvement en coordonnées cylindriques,

$$\frac{d(r^2\theta')}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \theta}, \quad \Omega = U - \frac{p}{\rho};$$

or, d'après l'hypothèse, on a

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{p}{\rho}\right) = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = X\frac{\partial x}{\partial \theta} + Y\frac{\partial y}{\partial \theta} = 0,$$

donc

$$\frac{d}{dt}(r^2\theta') = 0, \quad r^2\theta' = a, \quad \theta' = \frac{a}{r^2}.$$

Exercice.

1. Un fluide incompressible et homogène, renfermé dans un cylindre circulaire à axe OZ et soumis à l'action des forces

$$X = Ax + By, \quad Y = B'x + Cy, \quad Z = 0,$$

part du repos. On sait que l'on a

$$u = -\omega y, \quad v = \omega x, \quad w = 0,$$

ω étant fonction de t seulement. Il s'agit de déterminer ω.

R. On trouve

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{B' - B}{2}, \quad \omega = \frac{B' - B}{2}t,$$

et ensuite

$$\frac{p}{\rho} = \tfrac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) + \tfrac{1}{2}[Ax^2 + (B + B')xy + Cy^2] + \text{const.}$$

LIVRE CINQUIÈME.

THÉORIE DE L'ATTRACTION ET DU POTENTIEL.

CHAPITRE XXIII.

LE POTENTIEL ET SES RELATIONS AVEC L'ATTRACTION.

312. Les phénomènes de la gravitation, de l'électricité et du magnétisme s'expliquent par des forces qui s'exercent entre les derniers éléments matériels, proportionnellement à leurs masses et en raison inverse du carré de leur distance. De là l'utilité de déterminer les résultantes de semblables actions entre des masses de grandeur finie, ce à quoi l'on arrive le plus simplement par l'étude des propriétés d'une fonction à laquelle nous conserverons le nom, donné par Gauss, de *potentiel*.

Considérons d'abord l'action d'un système de points matériels isolés M, M', M'', ... sur un point P, de masse m, ayant pour cordonnées x, y, z. Soient μ la masse, ξ, η, ζ les coordonnées d'un point quelconque M de la masse active, u la distance MP, f une constante exprimant l'action de l'unité de masse sur l'unité de masse, à l'unité de distance, et qui sera affectée du signe $+$ ou du signe $-$ selon que l'action sera attractive ou répulsive. D'après la loi énoncée plus haut, l'action du point M sur le point P aura pour expression

$$\frac{fm\mu}{u^2},$$

et les cosinus directeurs de PM étant

$$\frac{\xi - x}{u}, \quad \frac{\eta - y}{u}, \quad \frac{\zeta - z}{u},$$

les composantes de cette action seront

$$fm\mu\frac{\xi - x}{u^3}, \quad fm\mu\frac{\eta - y}{u^3}, \quad fm\mu\frac{\zeta - z}{u^3}.$$

Ce calcul s'appliquant à chacun des points M, M', M'', ... si nous désignons par X, Y, Z les composantes de l'action totale de la masse active sur le point P, par Σ une somme qui s'étend à tous les points de cette masse, nous aurons

$$(1) \quad X = fm\sum\mu\frac{\xi - x}{u^3}, \quad Y = fm\sum\mu\frac{\eta - y}{u^3}, \quad Z = fm\sum\mu\frac{\zeta - z}{u^3}.$$

Mais la relation

$$u^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2$$

donne

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\xi - x}{u}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{u^2}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\xi - x}{u^3}, \quad \text{etc.},$$

d'où l'on peut écrire

$$X = fm\sum\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{u}\right) = fm\frac{\partial}{\partial x}\sum\frac{\mu}{u}.$$

Si donc nous posons

$$(2) \qquad V = \sum\frac{\mu}{u},$$

nous aurons

$$X = fm\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = fm\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = fm\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Dans le cas de la gravitation newtonnienne, les masses m, μ sont toujours positives et il en est de même de f. Dans les applications à l'électricité et au magnétisme, il y a lieu de distinguer deux natures de masses actives, et d'attribuer aux masses m, μ, soit le signe +, soit le signe —; mais dans ce cas, l'action étant attractive ou répulsive selon que m et μ seront de même signe ou de signes contraires, f aura une valeur négative.

Nous supposerons m égal à l'unité, et comme f peut aussi se réduire à $\pm$ 1 par un choix convenable de l'unité de force, nous remplacerons ce facteur par l'unité, sauf à nous rappeler dans l'application à des problèmes concrets, que ce facteur doit être rétabli avec son signe dans les valeurs de X, Y, Z. D'après ces conventions, on aura simplement

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z},$$

et les composantes de l'action sur le point P seront les dérivées partielles d'une même fonction V par rapport à x, y, z. La fonction V, égale à la somme des masses actives divisées par leurs distances respectives au point P, s'appelle le *potentiel du système des masses* μ *sur le point* P.

312. Nous supposerons maintenant que la masse active, au lieu d'être concentrée en des points isolés, remplisse d'une manière continue un volume E. Soit ρ la densité de cette masse au point M (ξ, η, ζ); ce sera une fonction donnée de ces variables, toujours finie et déterminée, et qui pourra être, soit positive, soit négative suivant la nature de l'agent qui occupe ce point (ξ, η, ζ). Décomposant l'espace E en éléments infiniment petits $d\omega$, on aura, au lieu des formules (2) et (1), celles-ci :

$$V = \int_E \frac{\rho d\omega}{u}, \tag{3}$$

$$X = \int_E \rho \frac{\xi - x}{u^3} d\omega, \quad Y = \int_E \rho \frac{\eta - y}{u^3} d\omega, \quad Z = \int_E \rho \frac{\zeta - z}{u^3} d\omega, \tag{4}$$

et ces intégrales auront évidemment des valeurs finies et déterminées si le point P est situé en dehors de l'espace E, comme nous le supposons d'abord, puisque u ne devient nul pour aucun élément $d\omega$ de cet espace. Elles représentent donc des fonctions déterminées de x, y, z.

Soient u', V' ce qui deviennent respectivement la distance u et le potentiel V pour un point P', ayant pour coordonnées $x + \Delta x$, y, z. On aura

$$V' - V = \int_E \rho d\omega \left(\frac{1}{u'} - \frac{1}{u}\right).$$

Mais la fonction 1 : u' est développable suivant les puissances de Δx par la formule de Taylor, ce qui nous donne

$$\frac{1}{u'} = \frac{1}{u} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{u}\right) \Delta x + Q \Delta x^2,$$

Q étant une quantité qui ne peut surpasser une valeur fixe dans l'étendue de l'intégration. De là nous tirons

$$\frac{V'-V}{\Delta x}=\int_E \rho \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{u}\right) d\omega+\Delta x \int_E \rho\, Q d\omega.$$

Faisons tendre Δx vers zéro, le dernier terme aura zéro pour limite, et nous aurons

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\int_E \rho \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{u}\right) d\omega, \quad \frac{\partial V}{\partial y}=\int_E \rho \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{u}\right) d\omega, \quad \frac{\partial V}{\partial z}=\int_E \rho \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{u}\right) d\omega.$$

Remplaçons les dérivées de $1 : u$ par leurs valeurs, nous aurons, d'après les formules (4),

$$(5) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x}=\displaystyle\int_E \rho \frac{\xi-x}{u^3} d\omega=X, \\ \dfrac{\partial V}{\partial y}=\displaystyle\int_E \rho \frac{\eta-y}{u^3} d\omega=Y, \\ \dfrac{\partial V}{\partial z}=\displaystyle\int_E \rho \frac{\zeta-z}{u^3} d\omega=Z. \end{cases}$$

Il suit de là que *le potentiel* V *est une fonction continue des coordonnées* x, y, z *dans tout l'espace non occupé par la masse active, fonction qui a pour dérivées partielles, par rapport à* x, y, z *respectivement, les composantes* X, Y, Z *de l'action de cette masse sur l'unité de masse concentrée au point* P.

314. Si nous désignons par X' la valeur de X au point P', par v la dérivée de $1 : u$ par rapport à x, un calcul semblable au précédent donnera

$$X'-X=\int_E \rho\,(v'-v)\, d\omega, \quad v'-v=\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+Q_1 \Delta x^2,$$

Q_1 désignant une quantité qui reste finie quand Δx tend vers zéro, d'où

$$\frac{X'-X}{\Delta x}=\int_E \rho \frac{\partial v}{\partial x} d\omega+\Delta x \int_E \rho\, Q_1\, d\omega,$$

d'où enfin

$$\frac{\partial X}{\partial x}=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\int_E \rho \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{u}\right) d\omega.$$

Cette intégrale ayant une valeur finie et déterminée (P est toujours

supposé en dehors de l'espace E), on conclut de cette formule et d'autres qui s'obtiennent de même, que *les composantes* X, Y, Z de l'action de la masse sur un point (x, y, z) *sont des fonctions continues des coordonnées de ce point* en dehors de la masse active, fonctions qui admettent des dérivées partielles déterminées par rapport à x, y, z.

Remarquons, en outre, que l'on a

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{u}\right)=\frac{\xi-x}{u^3}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{u}\right)=-\frac{1}{u^3}+\frac{3(\xi-x)^2}{u^5},$$

et de même

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{u}\right)=-\frac{1}{u^3}+\frac{3(\eta-y)^2}{u^5}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{u}\right)=-\frac{1}{u^3}+\frac{3(\zeta-z)^2}{u^5},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{u}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{u}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{u}\right)=0,$$

et par suite

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0.$$

La fonction qui figure au premier membre se représente par $\Delta_2 V$. *La fonction potentielle* V *satisfait donc, dans tout l'espace non occupé par la matière active, à l'équation aux dérivées partielles du second ordre*

$$\Delta_2 V = 0.$$

215. Les équations (5) donnent

$$dV = X dx + Y dy + Z dz,$$

V est la *fonction des forces* que les masses actives exercent sur le point P. Soit F la résultante de ces forces. Si le point P éprouve un déplacement infiniment petit ds dans une direction quelconque, le travail élémentaire de la force F dans ce déplacement sera donc égal à dV, et l'on aura

$$\frac{dV}{ds} = F \cos(F, ds). \tag{6}$$

Pour un déplacement fini, déterminé par des valeurs s_0, s_1 de s, on aura

$$\int_{s_0}^{s_1} F \cos(F, ds)\, ds = V_1 - V_0,$$

en sorte que l'*accroissement du potentiel, quand le point* P *passe d'une*

position à une autre suivant un chemin quelconque, mesure le travail développé par la force F *dans ce déplacement.*

La fonction V étant continue, le lieu des points de l'espace pour lesquels V conserve une valeur donnée est une surface, que l'on appelle *Surface de niveau;* les trajectoires orthogonales des surfaces de niveau sont les *Lignes de force.* D'après l'équation (6), en chaque point, la direction de la force F est normale à la surface de niveau passant par ce point, ou tangente à la ligne de force; l'intensité de la force est mesurée par la dérivée du potentiel prise suivant la normale à la surface de niveau. Le signe de cos (F, ds) étant le même que celui de cette dérivée, il s'ensuit que, f étant positif, l'*action est dirigée, en un point* P, *du côté de la surface de niveau passant en* P *où le potentiel va en croissant.* On connaît ainsi, en chaque point situé hors de l'espace E, la direction, l'intensité et le sens de la force F.

316. *Action sur un point éloigné.* — Soient r, δ les distances respectives du point P et du point (ξ, η, ζ) à l'origine O des coordonnées, γ l'angle $\overline{\delta r}$. De l'équation

$$u^2 = r^2 - 2\delta r \cos\gamma + \delta^2$$

on tire, en développant en série convergente,

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{r}\left[1 - \frac{1}{r}\left(2\delta\cos\gamma - \frac{\delta^2}{r}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} + \frac{\delta\cos\gamma}{r^2} + \frac{h}{r^3},$$

h restant toujours fini lorsque r croît indéfiniment. Donc

$$V = \frac{1}{r}\int\rho d\omega + \frac{1}{r^2}\int\rho\delta\cos\gamma\, d\omega + \frac{1}{r^3}\int\rho h d\omega,$$

ou

$$V = \frac{M}{r} + \frac{M\delta_1}{r^2} + \frac{1}{r^3}\int\rho h d\omega,$$

M désignant la masse agissante et δ_1 la projection, sur OP, du rayon vecteur de son centre de gravité. Si l'on fait croître r indéfiniment, on a lim $V = 0$, lim $rV = M$; si l'on place l'origine O au centre de gravité, $\delta_1 = 0$ et $V = M : r$ en négligeant les quantités de l'ordre de $1 : r^3$. Donc 1° *le potentiel s'annule pour un point infiniment éloigné;* 2° *son produit par la distance de l'origine au point actionné* P *a une limite finie égale à la masse active;* 3° *le potentiel sur un point très éloigné est sensiblement le même que si toute la masse active était réunie à son centre de gravité.*

Si l'on transforme de même

$$X = \int \rho \frac{\xi - x}{u^3} d\omega = \frac{1}{r^3} \int \rho (\xi - x) \left[1 - \frac{2\delta \cos \gamma}{r} + \frac{\delta^2}{r^2} \right]^{-\frac{3}{2}} d\omega,$$

on trouvera, ξ_1 se rapportant au centre de gravité,

$$X = \frac{M(\xi_1 - x)}{r^3} + \frac{h'}{r^4},$$

h' restant fini lorsque r croît indéfiniment. Le rapport $\frac{\xi_1 - x}{r}$ restant toujours fini, X, et de même Y, Z, sont de l'ordre de $1 : r^2$ lorsque r devient infini. On en conclut que *le produit* Fr^2 *ne peut surpasser une limite finie lorsque r croît indéfiniment, et en plaçant l'origine* O *au centre de gravité,* ξ_1, η_1, ζ_1, *sont nuls, et l'action a sensiblement la même valeur et la même direction que si la masse active était réunie à son centre de gravité.*

317. *Cas où le point sollicité est intérieur à la masse active.* — Lorsque le point P est dans l'intérieur de l'espace E occupé par la matière active, u passe par zéro dans les limites de l'intégration et les valeurs de V, X, Y, Z pourraient devenir infinies. Pour s'assurer qu'il n'en est rien, considérons d'abord une masse sphérique, de rayon α; soient u, θ, ψ les coordonnées sphériques du point M de l'élément $d\omega$, le pôle étant au point P et θ désignant l'angle MPX que fait le rayon vecteur MP avec le diamètre PX. L'élément de volume $d\omega$ aura pour expression $u^2 \sin \theta du d\theta d\psi$, et l'on aura, par suite,

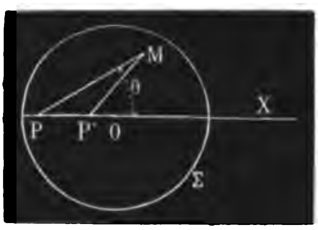


Fig. 127.

$$V = \iiint \rho u \sin \theta \, du d\theta d\psi.$$

L'intégration relative à ψ se fait entre o et 2π; posons

$$H = \int_0^{2\pi} \rho d\psi,$$

intégrale finie et déterminée qui ne peut surpasser une valeur fixe H_0 pour aucune valeur de u et de θ. D'ailleurs $u du d\theta$ représente l'élément $d\sigma$ de l'aire Σ du cercle de rayon α. Nous avons donc

$$(\alpha) \qquad V = \int_\Sigma H \sin \theta d\sigma,$$

et cette intégrale a évidemment une valeur finie et déterminée. De plus, $\sin\theta$ étant moindre que l'unité en valeur absolue, si η désigne une fraction comprise entre $+1$ et -1, on aura évidemment

$$(\beta) \qquad V = \eta H_o \int_\Sigma d\sigma = \pi\eta H_o \alpha^2,$$

donc, si α est très petit, V sera une quantité très petite de l'ordre de α^2.

On aura, par une transformation analogue,

$$X = \int \rho \frac{\zeta - x}{u^3} d\omega = \int \rho \frac{\cos\theta}{u^2} d\omega = \iiint \rho \sin\theta \cos\theta du d\theta d\psi,$$

d'où

$$X = \iint H \sin\theta \cos\theta du d\theta,$$

valeur finie et déterminée. Mais on a

$$\text{VA}\, H < H_o, \quad \text{VA} \sin\theta\cos\theta < 1, \quad \iint du d\theta < 2\pi\alpha,$$

la plus grande valeur de u étant moindre que le diamètre de la sphère, donc

$$(\gamma) \qquad X = 2\pi\eta_1 H_o \alpha, \quad -1 < \eta_1 < 1.$$

Ainsi X décroît indéfiniment avec α, et le même raisonnement s'applique aux valeurs de Y, Z.

Enfin, si l'on considère un point P′ situé à une distance infiniment petite Δx du point P, mais toujours intérieur à la sphère, et si u', θ', V′ sont les valeurs de u, θ, V se rapportant au point P′, l'élément $d\omega$ restant le même, on aura encore, par l'équation (α),

$$V' = \int_\Sigma H \sin\theta' d\sigma, \quad V' - V = \int_\Sigma H (\sin\theta' - \sin\theta)\, d\sigma.$$

Mais le triangle PMP′ donne les relations

$$\frac{\sin\theta'}{u} = \frac{\sin\theta}{u'} = \frac{\sin\theta' - \sin\theta}{u - u'},$$

d'où

$$\frac{V' - V}{\Delta x} = \int_\Sigma H \frac{u - u'}{\Delta x} \sin\theta' \frac{d\sigma}{u}.$$

Observant que le second et le troisième facteur sous le signe $\int$ ont des valeurs absolues moindres que l'unité; que $d\sigma = u du d\theta$, on aura encore

$$(\delta) \qquad \frac{V' - V}{\Delta x} = 2\pi\eta_2 H_o \alpha, \quad -1 < \eta_2 < 1.$$

On voit par cette équation 1° que $V' - V$ tend vers zéro avec Δx,

quel que soit α; 2° que le rapport $\frac{V' - V}{\Delta x}$ tend vers zéro en même temps que α, quel que soit Δx.

318. Ces points admis, soient M une masse agissante quelconque, V son potentiel, X son action parallèle à l'axe des x, sur un point P de son intérieur. Décrivant autour de P comme centre une surface sphérique de rayon très petit α, appelons M_1, V_1, X_1 les valeurs de M, V, X qui se rapportent à la portion de la masse active comprise dans la petite sphère, et M_2, V_2, X_2 celles qui se rapportent au reste de la matière agissante. En sorte que nous aurons

$$M = M_1 + M_2, \quad V = V_1 + V_2, \quad X = X_1 + X_2.$$

Relativement à la masse M_2, le point P est un point *extérieur*, le potentiel V_2 et le composante X_2 ont des valeurs finies et déterminées, comme on l'a établi au numéro **313**. Pour la petite sphère M_1, P est un point intérieur, mais il résulte des calculs du numéro précédent que V_1 et X_1 ont aussi des valeurs finies et déterminées. D'où il suit que V et X ont des valeurs finies et déterminées.

Pour un déplacement $PP' = \Delta x$ du point P parallèlement à l'axe des x dans l'intérieur de la petite sphère, le potentiel V_2 de la masse M_2 prendra un accroissement $V'_2 - V_2$ qui sera infiniment petit avec Δx (**312**); V_1 prendra un accroissement $V'_1 - V_1$ jouissant de la même propriété (**317**). L'accroissement $V' - V$ du potentiel de la masse totale tendra donc vers zéro avec Δx, ce qui montre que V est une fonction continue de x dans l'intérieur de la masse M. Toutes ces conclusions s'appliquent au cas où le point P est situé sur la surface même qui limite la masse M, car, dans les calculs relatifs à la petite sphère, nous n'avons fait aucun hypothèse sur la loi de la densité ρ.

De même, pour ce déplacement Δx du point P, l'accroissement $X'_2 - X_2$ de la composante d'action de la masse M_2 sera infiniment petit avec Δx, d'après ce qui a été établi au n° **314**, P ne faisant pas partie de la masse M_2. D'autre part, la composante X_1 de l'action de la petite sphère M_1 peut être supposée aussi petite qu'on le veut, d'après l'équation (γ), si l'on prend le rayon α de cette sphère suffisamment petit, et il en est de même de la composante X'_1 relative au point P', puisque l'équation (γ) s'y applique parfaitement; donc, il en est de même de l'accroissement $X'_1 - X_1$ de X_1.

Il suit de là que l'accroissement

$$X' - X = (X'_2 - X_2) + (X'_1 - X_1)$$

pourra être rendu moindre que toute grandeur donnée en prenant Δx et α suffisamment petits, et comme cet accroissement ne peut dépendre de α, on voit que $X' - X$ tend vers zéro en même temps que Δx. Le raisonnement s'applique aux composantes Y, Z, et aux accroissements infiniment petits Δy, Δz. Il s'applique aussi au cas où le point P est sur la surface qui limite la masse M.

219. Enfin, les relations entre les dérivées de V et les composantes X, Y, Z subsistent quand le point P appartient à la masse M. Nous avons en effet

$$\frac{V' - V}{\Delta x} = \frac{V'_2 - V_2}{\Delta x} + \frac{V'_1 - V_1}{\Delta x}.$$

D'après ce qui a été démontré au n° **218**, le point P étant extérieur à l'espace occupé par la masse M_2, on a

$$\frac{V'_2 - V_2}{\Delta x} = X_2 + \varepsilon,$$

ε tendant vers zéro en même temps que Δx. L'équation (δ) nous donne

$$\frac{V'_1 - V_1}{\Delta x} = 2\pi\eta_2 H_0 \alpha,$$

η_2 étant compris entre -1 et $+1$, H_0 étant inférieur à une limite fixe. Enfin, il résulte de l'équation (γ) que

$$X_2 = X - X_1 = X - 2\pi\eta_1 H_0 \alpha, \quad -1 < \eta_1 < 1.$$

Donc nous aurons

$$\frac{V' - V}{\Delta x} = X + 2\pi H_0 \alpha (\eta_2 - \eta_1) + \varepsilon,$$

et comme nous pouvons faire décroître les deux derniers termes du second membre au-dessous de toute grandeur donnée en attribuant à Δx et à α des valeurs très petites, que le premier membre ne peut dépendre de α, il est clair que nous aurons

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{V' - V}{\Delta x} = \frac{\partial V}{\partial x} = X,$$

et de même

$$\frac{\partial V}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = Z.$$

On conclut de tout ce qui précède que *le potentiel* V *d'un système de masses actives sur un point* P, *les composantes* X, Y, Z *de l'action* F *de ces masses et cette action elle-même sont des fonctions continues des coordonnées* x, y, z *du point* P, *quelle que soit la position de ce point dans l'espace; et que les dérivées partielles de* V, *par rapport à* x, y, z, *représentent respectivement les composantes* X, Y, Z *de l'action de ces masses sur l'unité de masse au point* P.

320. Appliquons ces propriétés générales du potentiel à déterminer le potentiel et l'action d'une masse M, comprise entre deux surfaces sphériques de même centre O, sur un point quelconque P, en admettant que la densité ρ soit la même en tous les points d'une surface sphérique de centre O, et soit, par conséquent, une fonction de la distance du point (ξ, η, ζ) au centre de la sphère. A cause de la symétrie autour de OP, le potentiel V ne peut être ici qu'une fonction de la distance r du point P au centre O. Or, on a

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \dots$$

d'où

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{dV}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}\frac{dV}{dr}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{d^2 V}{dr^2}\frac{x^2}{r^2} + \frac{dV}{dr}\left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right).$$

Calculant de même les dérivées par rapport à y et à z, on a

$$\Delta_2 V = \frac{d^2 V}{dr^2}\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2} + \frac{dV}{dr}\left(\frac{3}{r} - \frac{x^2+y^2+z^2}{r^3}\right) = \frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dV}{dr}.$$

Si le point P ne fait pas partie de la masse active, l'équation $\Delta_2 V = 0$ doit être vérifiée et l'on a

$$\frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dV}{dr} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dV}{dr}\right) = 0.$$

Cette équation ne peut être vérifiée, quel que soit r, que si l'on pose

$$r^2 \frac{dV}{dr} = C, \quad \frac{dV}{dr} = \frac{C}{r^2}, \quad V = -\frac{C}{r} + C_1,$$

C et C_1 étant des constantes à déterminer, et qui peuvent avoir des

valeurs différentes dans la cavité interne et en dehors de la couche sphérique.

Supposons d'abord que P soit dans la cavité interne. C sera nul, sans quoi V serait infini au centre de la couche. On a $V = C_1$: le potentiel est constant, et par suite X, Y, Z sont nuls dans tout cet espace vide de matière active. Donc, pour déterminer C_1, il suffit de chercher la valeur de V au point O. Soient r_1, r_2 les rayons de la surface interne et de la surface externe de la couche. Le volume de la couche infiniment mince comprise entre deux sphères de rayons r, $r + dr$ est $4\pi r^2 dr$; sa densité ρ est une fonction donnée de r, donc

$$C_1 = 4\pi \int_{r_1}^{r_2} \rho \frac{r^2 dr}{r} = 4\pi \int_{r_1}^{r_2} \rho r dr.$$

Telle est la valeur constante du potentiel V dans le vide intérieur de la couche.

Si P est en dehors de la surface externe, on déterminera les constantes C et C_1 en observant 1° que V devient nul pour r infini, ce qui donne $C_1 = 0$; 2° que Vr ou $-C$ a pour limite la masse M de la couche, donc $C = -M$. Il résulte de là, si P est en dehors de la masse active,

$$V = \frac{M}{r};$$

en sorte que le potentiel, et par suite l'action, est le même que si la masse de la couche était réunie à son centre. On a d'ailleurs

$$M = 4\pi \int_{r_1}^{r_2} \rho r^2 dr, \quad F = \frac{M}{r^2}.$$

A cause de la continuité de V, X, Y, Z, ces résultats subsistent quand le point P est situé sur la surface externe de la couche. On a donc ce théorème : *Une couche sphérique composée de couches concentriques homogènes a un potentiel constant et une action nulle sur tout point placé dans sa cavité interne; sur un point extérieur, le potentiel varie en raison inverse de la distance de ce point au centre de la couche, et l'action de la couche a la même valeur et la même direction que si toute la masse active était réunie au centre de la couche.*

321. Si le point P est placé dans l'épaisseur de la couche, on décomposera celle-ci en deux par une surface sphérique de centre O passant par le point P. Par rapport à la couche interne, le point P sera sur la

surface externe; on aura, d'après ce qui précède, pour la masse M_1 et le potentiel V_1 de cette couche,

$$M_1 = 4\pi \int_{r_1}^{r} \rho r^2 dr, \quad V_1 = \frac{M_1}{r}.$$

Par rapport à la couche externe, le point P est sur la surface interne, et en appliquant la formule du premier cas, on aura pour le potentiel V_2 de cette couche

$$V_2 = 4\pi \int_{r}^{r_2} \rho r dr.$$

Donc, on trouve pour le potentiel de la couche entière sur un point intérieur

$$(7) \qquad V = V_1 + V_2 = \frac{4\pi}{r} \int_{r_1}^{r} \rho r^2 dr + 4\pi \int_{r}^{r_2} \rho r dr.$$

La couche externe a une action nulle; la couche interne agit comme si sa masse était réunie à son centre; l'action totale est donc dirigée vers ce centre et a pour expression

$$F = \frac{M_1}{r^2} = \frac{4\pi}{r^2} \int_{r_1}^{r} \rho r^2 dr.$$

Ces formules renferment celles qui conviennent à une sphère pleine et homogène de rayon R. On a ρ constant, $r_1 = 0$, $r_2 = R$,

$$M = \frac{4}{3} \pi \rho R^3.$$

Pour un point extérieur on a

$$V = \frac{4}{3} \pi \rho \frac{R^3}{r}; \quad F = \frac{4}{3} \pi \rho \frac{R^3}{r^2};$$

pour un point intérieur

$$V = 4\pi\rho \left(\frac{r^2}{3} + \frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right) = 2\pi\rho \left(R^2 - \frac{r^2}{3} \right).$$

L'action varie proportionnellement à la distance au centre. Si l'on construit une courbe dont r soit l'abscisse et V l'ordonnée, cette courbe est une parabole pour $r < R$, une hyberbole pour $r > R$.

On a, dans le cas du point P intérieur,

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{4}{3}\pi\rho r, \quad \frac{d^2V}{dr^2} = -\frac{4}{3}\pi\rho,$$

$$\Delta_2 V = \frac{d^2V}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dV}{dr} = -4\pi\rho.$$

On voit donc que $\Delta_2 V$ n'est plus nul quand le point P est intérieur à la masse active. L'équation (7) conduit à la même valeur de $\Delta_2 V$ pour une densité fonction de r, et nous verrons plus loin que cette propriété est générale.

222. Il nous reste à examiner si, et dans quelles conditions, les dérivées partielles secondes du potentiel sont déterminées pour un point P intérieur à une masse active quelconque. Reprenons l'équation

$$X = \int_E \rho \frac{\xi - x}{u^3} d\omega = -\int_E \rho \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{u}\right) d\omega,$$

à cause de la relation

$$u^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2.$$

Supposons d'abord que P soit en dehors de la masse active. En vertu du théorème d'Ostrogradsky, si nous désignons par S la surface qui limite la masse, par $d\sigma$ un élément de cette surface, par $\overline{nx}$ l'angle que fait la normale *intérieure* à $d\sigma$ avec l'axe des x positifs, nous aurons

$$(8) \qquad X = -\int_E \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\rho}{u}\right) d\omega + \int_E \frac{\partial \rho}{\partial \xi}\frac{d\omega}{u} = \int_E \frac{d\rho}{\partial \xi}\frac{d\omega}{u} + \int_S \frac{\rho \cos \overline{nx}}{u} d\sigma.$$

Cette équation suppose évidemment que ρ ait une dérivée et soit, par suite, fonction continue de ξ.

L'équation (8) subsiste si le point P est intérieur à la masse active, car si l'on partage celle-ci en deux autres M_1 et M_2 comme au n° **218**, par une sphère Σ de centre P et de rayon très petit α, l'équation (8) s'appliquera à la masse M_2 puisque P est en dehors de cette masse, on aura

$$X_2 = \int_{E_2} \frac{\partial \rho}{\partial \xi}\frac{d\omega}{u} + \int_{S+\Sigma} \frac{\rho \cos \overline{nx}}{u} d\sigma,$$

E_2 étant le volume hors de la petite sphère, et la seconde intégrale s'étendant à la surface S qui limite la masse et à la surface Σ de la petite sphère *considérée, pour le signe de* cos $\overline{nx}$, *comme surface interne de* M_2.

Quant à X_1, d'après ce qui a été dit au n° **217**, il a une valeur très petite s'évanouissant avec α. L'intégrale

$$\int_\Sigma \frac{\rho \cos \overline{nx}}{u} d\sigma < \frac{\rho_0}{\alpha}\int d\sigma \quad \text{ou} \quad 4\pi\rho_0\alpha,$$

où ρ_0 désigne la limite maximum de ρ sur la sphère, tend aussi vers zéro avec α. Enfin, en remplaçant ρ par $\partial\rho : \partial\xi$ dans la démonstration du n° **217**, on prouverait de même que l'intégrale

$$\int_{E_1} \frac{\partial\rho}{\partial\xi}\frac{d\omega}{u}$$

a une valeur infiniment petite avec α, donc on tirera, de l'équation $X = X_1 + X_2$, la relation

$$X = \int_S \frac{\rho \cos \overline{nx}}{u} d\sigma + \int_E \frac{\partial\rho}{\partial\xi}\frac{\partial\omega}{u} + \varepsilon,$$

ε désignant une quantité qu'on peut rendre moindre que toute grandeur donnée en attribuant a α des valeurs suffisamment petites, et qui est nulle, par conséquent, puisque X ne peut dépendre de la valeur du rayon α. On a donc, que le point P soit extérieur ou intérieur, la formule

$$X = \int_S \frac{\rho \cos \overline{nx}}{u} d\sigma + \int_E \frac{\partial\rho}{\partial\xi}\frac{d\omega}{u}.$$

De là on déduit

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\int_S \frac{\rho \cos \overline{nx}}{u} d\sigma + \frac{\partial}{\partial x}\int_E \frac{\partial\rho}{\partial\xi}\frac{d\omega}{u}.$$

Si le point P est *intérieur* à la masse, u ne devient nul pour aucun élément $d\sigma$ de la surface S, et le raisonnement du n° **212** s'appliquant donne pour le premier terme du second membre

$$\int_S \rho \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{u}\right) \cos \overline{nx}\, d\sigma = \int_S \rho\, \frac{\xi - x}{u^3} \cos \overline{nx}\, d\sigma.$$

Quant à l'intégrale qui figure au second terme, elle représente le potentiel sur le point P d'une masse dont la densité serait égale à $\dfrac{\partial\rho}{\partial\xi}$; on prouverait donc comme au numéro **219** que sa dérivée par rapport

à x est égale à la composante de l'action parallèlement à x, c'est-à-dire que l'on a

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_E \frac{\partial \rho}{\partial \xi}\frac{d\omega}{u} = \int_E \frac{\partial \rho}{\partial \xi}\frac{\xi - x}{u^3}\,d\omega.$$

On a donc enfin

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \int_S \rho\frac{\xi - x}{u^3}\cos\overline{nx}\,d\sigma + \int_E \frac{\partial \rho}{dx}\frac{\xi - x}{u^3}\,d\omega.$$

Un raisonnement semblable s'appliquerait aux autres dérivées partielles secondes de V, et il est ainsi démontré que, *dans tout espace où la densité de la masse active varie d'une manière continue, les dérivées partielles du second ordre du potentiel par rapport à x, y, z ont des valeurs finies et déterminées.* Ces conclusions ne s'appliquent pas, par conséquent, au cas où le point P est sur la surface S.

CHAPITRE XXIV.

THÉORÈMES DE GAUSS, DE GREEN, DE POISSON. PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DU POTENTIEL.

323. *Théorème de Gauss.* — Soit M un point de masse μ; l'action qu'il exerce sur l'unité de masse placée en un point quelconque P d'une surface fermée S est égale à $\mu : u^2$, la composante de cette action suivant la normale intérieure n à la surface S est égale à

$$\frac{\mu \cos\overline{un}}{u^2}.$$

Multiplions cette composante par l'élément $d\sigma$ de la surface S et faisons la somme pour tous les éléments de la surface, nous aurons, d'après le théorème d'Ostrogradsky en coordonnées sphériques (1),

$$\mu\int_S \frac{\cos\overline{un}}{u^2}\,d\sigma = 0 \quad \text{ou} \quad 4\pi\mu$$

---

(1) Voir la note II.

suivant que le point M est extérieur ou intérieur à l'espace enveloppé par la surface S.

Si l'action émane d'un système de masses μ, l'action résultante suivant la normale intérieure, pour chaque élément $d\sigma$, sera la somme algébrique des actions émanant de toutes les masses, l'intégrale ci-dessus considérée pour la masse entière, sera la somme des intégrales relatives à chacune des masses μ; donc, si F désigne l'action d'un système de masses M, continu ou discontinu, sur un point quelconque P; Q la portion de la masse M comprise sous la surface S, on aura en général

$$(1) \qquad \int_S F \cos \overline{Fn}\, d\sigma = 4\pi Q.$$

Le second membre se réduit à zéro ou à $4\pi M$, suivant que la masse active est tout entière extérieure, ou tout entière intérieure à la surface S. Cette équation s'exprime autrement si l'on se rappelle (**215**) que la composante de l'action suivant une direction est la dérivée du potentiel suivant cette direction. On a

$$(A) \qquad \int_S \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = 4\pi Q,$$

dn désignant un arc élémentaire normal à l'élément $d\sigma$ et dirigé vers l'intérieur de la surface S.

224. *Théorème de Green.* — Soient U, V deux fonctions des coordonnées x, y, z d'un point P, qui restent continues ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre dans un espace Ω limité par une surface Σ. Appliquons la formule d'Ostrogradsky à la fonction $U\dfrac{\partial V}{\partial x}$. Nous aurons

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right) d\omega = \int_\Omega U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} d\omega + \int_\Omega \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} d\omega = -\int_S U \frac{\partial V}{\partial x} \cos \overline{nx}\, d\sigma.$$

Transformant de la même manière les intégrales

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial y}\left(U\frac{\partial V}{\partial y}\right) d\omega, \quad \int_\Omega \frac{\partial}{\partial z}\left(U\frac{\partial V}{\partial z}\right) d\omega,$$

et ajoutant les équations membre à membre, on aura, en observant que

$$\frac{\partial V}{\partial x}\cos \overline{nx} + \frac{\partial V}{\partial y}\cos \overline{ny} + \frac{\partial V}{\partial z}\cos \overline{nz} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} + \cdots = \frac{\partial V}{\partial n},$$

l'équation qui constitue la formule de Green

$$\text{(B)} \quad \int_\Omega U\Delta_2 V d\omega = -\int_S U\frac{\partial V}{\partial n}d\sigma - \int_\Omega \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right)d\omega.$$

Il faut bien remarquer, d'après la généralité de la formule d'Ostrogradsky sur laquelle celle de Green est fondée, que cette équation (B) s'applique à un espace Ω compris sous une surface fermée simple comme l'ellipsoïde, ou entre plusieurs surfaces extérieures ou intérieures l'une à l'autre (groupe de sphères isolées, sphère pleine présentant des cavités, etc....), mais qu'il faut avoir soin dans l'intégrale superficielle, de tenir compte de toutes les nappes de la surface Σ qui enveloppent l'espace Ω et du sens dans lequel est dirigée la normale *intérieure*, par rapport à l'espace Ω, en chaque point de cette surface.

225. *Théorème de Poisson.* — Supposons, dans l'équation (B), que U soit égal à l'unité et que V soit le potentiel, sur le point P (x, y, z), d'un système de masses actives quelconques. Les conditions de l'équation (B) sont vérifiées quel que soit l'espace Ω : appliquons-la à une surface fermée Σ très petite décrite autour du point P. Nous aurons, le dernier terme de (B) étant nul,

$$\int_\Omega \Delta_2 V \,.\, d\omega = -\int_\Sigma \frac{\partial V}{\partial n}d\sigma = -4\pi Q,$$

Q étant la masse active comprise sous la surface Σ. Mais on a

$$Q = \int_\Omega \rho d\omega,$$

donc

$$\int_\Omega (\Delta_2 V + 4\pi\rho)\, d\omega = 0.$$

Cette égalité doit subsister quel que petit que soit l'espace Ω, ce qui ne peut être vrai que si le coefficient de $d\omega$ est nul en chaque point de cet espace; donc on a, en un point quelconque P de l'espace,

$$\text{(C)} \qquad \Delta_2 V = -4\pi\rho,$$

équation importante qui est due à Poisson.

Lorsque le point P ne fait pas partie de la masse active, ρ est nul; l'équation (C) devient l'équation de Laplace (**214**)

$$\Delta_2 V = 0.$$

L'équation (C) suppose d'ailleurs (**322**) que la densité ρ soit continue au point P. Elle ne s'applique pas à un point situé sur la surface S qui limite la masse active, où ρ varie brusquement et où les dérivées secondes de V n'ont plus une valeur déterminée.

326. *Cas particuliers de la formule de Green.* — Si dans l'équation (B) nous prenons $U = V$, V désignant le potentiel de masses actives quelconques, nous aurons, en observant que $\Delta_2 V = -4\pi\rho$ et que l'on a la relation

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = F^2,$$

l'équation

$$\text{(D)} \qquad 4\pi\int_\Omega V\rho d\omega = \int_\Sigma V\frac{\partial V}{\partial n}d\sigma + \int_\Omega F^2 d\omega.$$

Dans la formule (B), les fonctions U et V sont supposées satisfaire aux mêmes conditions générales; on peut donc les permuter l'une dans l'autre sans difficulté. Si l'on retranche de l'équation (B) celle qui résulte de cette permutation, le dernier terme, qui est symétrique en U et V, disparaît par la soustraction, et l'on a cette autre formule importante donnée par Green

$$\text{(E)} \qquad \int_\Omega (U\Delta_2 V - V\Delta_2 U)\, d\omega = -\int_\Sigma \left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right) d\sigma,$$

qui a la même généralité que la première.

Supposons, par exemple, que l'on prenne

$$U = \frac{1}{r},$$

r étant la distance du point P (x, y, z) à un point p (a, b, c) qui est donné, en sorte que

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2.$$

Il faut supposer p *hors de l'espace* Ω, sans quoi U deviendrait infini entre les limites de l'intégrale. Dans ce cas, U satisfait aux conditions de l'équation (B), et V y satisfera si nous prenons pour V le potentiel d'un système de masses actives quelconques. Nous aurons d'ailleurs, d'après l'équation (C),

$$\int_\Omega U\Delta_2 V d\omega = -4\pi\int_\Omega \rho\frac{d\omega}{r} = -4\pi V'_p,$$

V'_p désignant le potentiel, sur p, de la partie des masses actives comprise dans l'espace Ω; $\Delta_2 U$ est nul, car U peut être regardé comme le potentiel d'une masse 1 placée en p sur le point extérieur P, et l'équation de Laplace s'applique. Donc l'équation deviendra

$$(\alpha) \qquad \int_\Sigma \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\right) d\sigma = 4\pi V'_p.$$

327. On a observé plus haut que cette équation ne s'applique plus si le point p est intérieur à Ω. Dans ce cas, nous décrirons du point p comme centre une sphère σ de rayon α aussi petit que nous voudrons, nous appliquerons l'équation (α) à l'espace Ω' compris entre cette surface σ et la surface Σ, ce qui sera évidemment permis puisque p ne fait pas partie de cet espace, et nous aurons

$$\int_\Sigma \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\right) d\sigma + \int_\sigma \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\right) d\sigma = 4\pi\int_{\Omega'} \rho\frac{d\omega}{r}.$$

Pour chaque élément $d\sigma$ de la surface sphérique, r a la valeur constante α, dn n'est autre chose que dr; donc, en vertu de l'équation (A),

$$\int_\sigma \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = \frac{1}{\alpha}\int_\sigma \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = -\frac{4\pi q}{\alpha}, \quad \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dn} = -\frac{1}{\alpha^2},$$

q étant la masse active comprise dans la petite sphère. L'intégrale qui figure dans le second membre est égale au potentiel V'_p de la masse active comprise dans l'espace Ω, moins celui de la masse q sur le même point p, soit v_p. Donc on aura

$$\int_\Sigma \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\right) d\sigma = \frac{4\pi q}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\int_\sigma V d\sigma + 4\pi(V'_p - v_p).$$

Mais, en chaque point de la surface σ, on a, à cause de la continuité de V,

$$V = V_p + \varepsilon,$$

V_p étant le potentiel de la masse totale sur le centre p de la sphère et ε une quantité qui décroît indéfiniment en même temps que α. Donc

$$\int_\sigma V d\sigma = 4\pi\alpha^2 V_p + \int_\sigma \varepsilon d\sigma,$$

le dernier terme étant infiniment petit par rapport à α^2. Comme le premier membre de l'équation ci-dessus ne saurait dépendre de la valeur de α, on peut faire décroître α indéfiniment; le rapport $q : \alpha$ tend vers

zéro, v_p est dans le même cas; le second membre a donc pour limite

$$-4\pi V_p + 4\pi V'_p = -4\pi V''_p,$$

V''_p désignant le potentiel, sur le point p, de la portion de la masse active non comprise dans l'espace Ω. De là résulte le théorème exprimé par *l'équation*

$$\text{(F)} \qquad \int_\Sigma \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\right) d\sigma = \begin{cases} 4\pi V'_p, \\ -4\pi V''_p, \end{cases}$$

suivant que le point p est extérieur ou intérieur par rapport à l'espace enveloppé par la surface fermée Σ. En voici quelques conséquences :

1° Si toute la masse active est comprise dans l'espace Ω, on a

$$V'_p = V_p, \quad V''_p = 0,$$

et par suite

$$\int_\Sigma \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\right) d\sigma = \begin{cases} 4\pi V_p, \\ 0, \end{cases}$$

selon que p est extérieur ou intérieur à Ω.

2° Si, au contraire, l'espace Ω est entièrement vide de matière active, on aura $V'_p = 0$, $V''_p = V_p$, et par suite

$$\int_\Sigma \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\right) d\sigma = \begin{cases} 0 \\ -4\pi V_p, \end{cases}$$

selon que le point p est extérieur ou intérieur à Ω.

Dans ces deux cas, la formule (F) offre cette propriété remarquable, que l'on peut déterminer la fonction V dans tout l'espace, si l'on connaît V et $\frac{\partial V}{\partial n}$ sur toute l'étendue d'une surface fermée. Mais ces deux quantités ne peuvent être données arbitrairement, comme on le verra plus loin.

3° Prenons pour surface Σ une surface sphérique de rayon R, ayant son centre au point p. Nous aurons ici, pour chaque élément $d\sigma$ de cette surface,

$$r = R, \quad dn = -dr, \quad \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r} = \frac{1}{R^2},$$

$$\int_\Sigma \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = \frac{1}{R}\int_\Sigma \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = \frac{4\pi Q}{R},$$

Q désignant la portion de masse active comprise dans l'espace Ω;

l'équation (F) deviendra, p étant intérieur à Ω,

$$\int_\Sigma V d\sigma = 4\pi R^2 \left(\frac{Q}{R} + V''_p\right).$$

Si toute la masse active est comprise sous la surface de la sphère, on a $V''_p = 0$, $Q = M$, et

$$\int_\Sigma V d\sigma = 4\pi R M.$$

Si la sphère ne renferme aucune partie de la masse active, on a

$$Q = 0, \quad V''_p = V_p,$$

$$\int_\Sigma V d\sigma = 4\pi R^2 V_p = V_p \int_\Sigma d\sigma,$$

d'où

$$\text{(G)} \qquad \int_\Sigma (V - V_p)\, d\sigma = 0.$$

Cette formule, due à Gauss, se traduit en théorème si l'on observe que le rapport de l'intégrale

$$\int_\Sigma V d\sigma$$

à $4\pi R^2$ ou $\int d\sigma$ n'est autre chose que la *valeur moyenne* du potentiel V sur la surface Σ, en sorte que, *si une surface sphérique ne renferme aucune portion de la masse active, la valeur moyenne du potentiel sur cette surface est égale à la valeur du potentiel au centre de la sphère.*

228. *Conséquences des formules précédentes.* — Appliquons la formule (D) à une surface fermée Σ dans laquelle ne se trouve aucune portion de la masse active; ρ sera nul en chaque élément $d\omega$, nous aurons

$$\text{(D')} \qquad \int_\Omega F^2 d\omega = -\int_\Sigma V \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma.$$

Si la surface Σ est une surface de niveau relative au potentiel V, V a une valeur constante V_1 dans la seconde intégrale, et par suite

$$\int_\Omega F^2 d\omega = -V_1 \int_\Sigma \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = 0,$$

d'après la formule (A), puisque Q est ici nul. Mais le premier membre

ne peut se réduire à zéro, tous les éléments de l'intégrale étant positifs, que si l'on a $F = 0$ dans tout l'espace Ω, et par suite

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$

donc V est constant et égal à V_1. Donc, *lorsque le potentiel d'un système de masses a une valeur constante* V_1 *en chaque point d'une surface fermée* Σ *qui ne renferme rien de la masse active, il a cette même valeur constante, et l'action est nulle, dans tout l'espace enveloppé par cette surface.*

Si donc le potentiel est nul sur la surface, il est nul dans tout l'espace Ω. De là on conclut que *si le potentiel* V *est donné sur toute la surface* Σ, *il est déterminé pour tout point intérieur.* Car s'il pouvait exister, en dehors de l'espace Ω, deux distributions de la masse active, caractérisées par les densités ρ' et ρ'', donnant le même potentiel sur chaque point de la surface Σ, et deux potentiels différents V' et V'' sur chaque point intérieur, la masse active formée avec la densité $\rho' - \rho''$ aurait un potentiel

$$V = \int \frac{\rho' d\omega}{u} - \int \frac{\rho'' d\omega}{u} = V' - V'',$$

qui serait nul, par conséquent, sur chaque élément de la surface Σ, et qui serait nul, en vertu du théorème ci-dessus, sur tout point intérieur. On aurait donc $V' = V''$ dans tout l'espace enveloppé, ce qui est contre l'hypothèse.

Il résulte de la même équation que, si $\frac{\partial V}{\partial n}$ est donné pour chaque point de la surface Σ, V est déterminé, à une constante près, dans tout l'espace intérieur à Σ. Supposons d'abord que $\frac{\partial V}{\partial n}$ soit nul sur la surface. La formule (D') donnera $F = 0$ et V constant dans tout l'espace Ω; V aura donc une valeur constante V_1 sur la surface Σ. Si $\partial V : \partial n$ a une valeur donnée, constante ou variable, sur la surface Σ, un raisonnement conforme à celui qui précède montrera que la différence $V' - V''$ est constante dans l'espace Ω.

329. Nous avons supposé l'espace Ω vide de matière active; supposons maintenant qu'il la renferme toute, et appliquons la formule (D') à l'espace Ω' compris entre la surface Σ et une surface sphé-

rique Σ' de rayon R arbitrairement grand, qui enveloppe la première. Nous aurons, en observant que, sur la surface Σ, la normale *intérieure* à Ω, est *extérieure* par rapport à Ω,

$$\int_{\Omega'} F^2 d\omega = \int_{\Sigma} V \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma - \int_{\Sigma'} V \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma.$$

La dernière intégrale peut être rendue aussi petite qu'on le veut, en prenant R suffisamment grand; car sur la surface Σ' les valeurs de V et de $\partial V : \partial n$ différeront aussi peu qu'on le voudra de $M : R$ et de $M : R^2$ (**216**) en plaçant l'origine au centre de gravité de la masse active. L'intégrale aura donc la valeur approchée

$$\frac{M^2}{R^3}\int_{\Sigma'} d\sigma = \frac{4\pi M^2}{R},$$

quantité dont la valeur décroît indéfiniment lorsque R devient infini. On aura donc, avec autant d'approximation qu'on voudra,

$$\int_{\Omega'} F^2 d\omega = \int_{\Sigma} V \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma \cdot$$

Si V est contant ($= V_1$) sur la surface Σ, on aura

$$\int_{\Omega'} F^2 d\omega = 4\pi M V_1,$$

en vertu de l'équation (A). Si $V_1 = 0$, l'intégrale est nulle, et par suite $F = 0$ et $V = 0$ en chaque point de l'espace Ω'. De là ce théorème : *Si le potentiel est nul en chaque point d'une surface fermée qui renferme toute la masse active, il est nul en tout point de l'espace extérieur à cette surface.*

Dans ce cas, si l'on applique à la surface l'équation (A), en observant que $\frac{\partial V}{\partial n}$ est nul en chaque point de Σ, on a $Q = 0$, la somme de la masse active est nulle.

Cette masse est donc composée, par parties égales, de matière à densité positive et de matière à densité négative.

On déduirait de là ce théorème plus général, que si le potentiel est donné pour tous les points d'une surface fermée Σ, qui renferme la totalité de la masse active, il est déterminé, par cela même, pour un point quelconque de l'espace extérieur à cette surface. La surface peut être composée de plusieurs surfaces fermées distinctes.

220. Considérons encore un espace Ω limité par une surface fermée, ne renfermant aucune partie de la masse active, et *admettons que le potentiel ait une valeur constante* A *dans une portion finie a, quelque petite qu'elle soit, de cet espace : il aura la même valeur constante dans tout l'espace a.* Car, dans l'hypothèse contraire, il existera un espace b, contigu à a, dans lequel le potentiel aura une valeur différente de A et où la différence V — A sera partout de même signe, à cause de la continuité de V. D'un centre p, pris dans la région a, on pourra décrire une surface sphérique Σ comprenant une portion de la région a et une portion de la région b, et lui appliquer la formule (G), ce qui donnera, à cause de $V_p = A$,

$$\int_\Sigma (V - A)\, d\sigma = o.$$

Mais V — A est nul pour la portion de Σ comprise dans l'espace a; il a un signe constant dans la région b; tous les éléments de l'intégrale étant de même signe, il est impossible que celle-ci soit nulle. L'hypothèse est donc absurde.

Deux cas peuvent se présenter dans l'application de ce théorème : 1° Si l'espace Ω est enveloppé de toutes parts par la masse active, la constante A peut avoir une valeur quelconque ; 2° si, au contraire, cet espace n'est pas enveloppé par la masse active, de sorte qu'une ligne continue puisse passer de l'espace Ω à l'infini, où le potentiel est nul, il il est clair que A sera égal à zéro.

221. *En dehors de l'espace occupé par la masse active le potentiel ne peut acquérir une valeur maximum ou minimum.* En effet, soit p un point où V serait maximum ou minimum, en sorte que, du point p comme centre, on pourrait décrire une surface sphérique d'un rayon assez petit pour que, en tous les points de cette surface, on ait $V < V_p$ ou $V > V_p$. Cette sphère ne renfermant pas de matière active, on appliquerait l'équation (G), on aurait

$$\int_\Sigma (V - V_p)\, d\sigma = o,$$

ce qui est absurde, puisque $V - V_p$ a le même signe pour tous les éléments $d\sigma$.

Il suit de là que, si une surface fermée Σ enveloppe un espace vide de matière active, la plus grande et la plus petite valeur que le poten-

tiel V puisse acquérir dans l'espace enveloppé sont respectivement égales à la plus grande et à la plus petite des valeurs qu'il acquiert sur la surface Σ; d'où l'on conclut de nouveau ce théorème (**328**), que si V est constant sur la surface, il est constant dans son intérieur.

332. Reprenons l'hypothèse d'une surface de niveau fermée enveloppant toute la masse active, et excluons le cas où, sur cette surface et dans tout l'espace extérieur, V serait nul. V_1 étant la valeur de V sur la surface, en dehors de celle-ci V sera partout de même signe que V_1. Car si, en un point p, V était de signe contraire à V_1, soient $V_1 > o$ et $V_p < o$, $-k$ une constante comprise entre V_p et zéro. Menons du point p une droite quelconque rencontrant la surface Σ : il y aura sur cette droite un point où $V = -k$, car V est continu et passe de la valeur V_p à V_1 qui est positif. Sur une droite menée du point p à l'infini sans rencontrer Σ, V passera de V_p à zéro et atteindra encore en un point la valeur $-k$. Le lieu de ces points où $V = -k$ sera, vu la continuité de V, une surface fermée entourant complètement le point p et ne renfermant, d'ailleurs, aucun élément de la masse active puisqu'elle est tout entière en dehors de Σ. Donc, d'après un théorème énoncé (**328**), le potentiel aurait la valeur $-k$ dans tout l'intérieur de cette surface; par suite, au point p, ce qui est impossible, puisque $V_p < -k$.

Un raisonnement analogue montrerait qu'en aucun point de l'espace extérieur V ne peut acquérir une valeur de même signe que V_1, mais numériquement plus grande. Donc, *en tout point extérieur à la surface Σ, le potentiel a une valeur comprise entre V_1 et zéro.*

On peut donc se faire l'idée suivante de la marche du potentiel V en dehors de la surface Σ où il a la valeur constante V_1 et qui renferme toute la masse active. Si l'on s'éloigne sur la normale extérieure, à partir d'un point quelconque de Σ, le potentiel décroît en valeur absolue, et acquiert une valeur V_2 de même signe que V_1, mais plus petite. Le lieu des points où V a la même valeur V_2 sera une nouvelle surface de niveau enveloppant la première Σ, et à laquelle on pourra appliquer les mêmes raisonnements qu'à celle-ci. On verra de la sorte que les surfaces de niveau relatives au potentiel V se succèdent, chacune renfermant la précédente et ayant un *niveau potentiel* de même signe et de valeur absolue moindre, jusqu'à l'infini où le niveau potentiel est égal à zéro.

333. On peut encore démontrer, en s'appuyant sur les formules (B),

(C) et (D), le théorème suivant dû à Dirichlet : *Soient* M *une constante et* ρ *une fonction de* x, y, z *donnée dans tout l'espace. Si une fonction* V *de* x, y, z *est continue, ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre, dans tout l'espace; si elle satisfait à la condition* $\lim rV = M$ *pour* $r = \infty$, *et si elle vérifie en chaque point de l'espace, sauf peut-être en certaines surfaces ou lignes sur lesquelles la fonction* ρ *est discontinue, l'égalité*

$$\Delta_2 V = -4\pi\rho,$$

cette fonction V *n'est autre chose que le potentiel d'une masse répandue dans l'espace suivant la loi de densité représentée par* ρ, *et cette masse est égale à* M.

Ce théorème ne nous étant pas nécessaire, nous nous bornerons à l'énoncer.

CHAPITRE XXV.

POTENTIEL D'UNE COUCHE SANS ÉPAISSEUR RÉPARTIE SUR UNE SURFACE.

224. Dans plusieurs questions importantes se présente le cas où la matière active, au lieu d'être répartie dans un espace à trois dimensions, se trouve distribuée en couche d'épaisseur absolument inappréciable sur une surface donnée S, ce qui suppose qu'elle y possède une densité ρ très considérable. Dans ce cas, au lieu d'introduire dans les calculs cette épaisseur très petite et inconnue e et la densité ρ, on préfère généralement assimiler le problème à celui d'une masse *sans épaisseur*, et l'on appelle *densité superficielle* de la couche en un point M, le rapport h de la masse qui couvre un élément de surface $d\sigma$ autour du point M à cet élément $d\sigma$ lui-même. Au fond, h est la limite du produit ρe de la densité de la couche par son épaisseur, lorsqu'on suppose que cette épaisseur décroisse indéfiniment en même temps que la densité ρ croît à l'infini.

Quoique cette manière de présenter les choses entraîne quelques difficultés spéciales, comme sur d'autres points elle procure des simplifications notables, nous croyons devoir l'adopter dans la suite.

Dans l'hypothèse admise, la masse Q de la matière agissante et son potentiel V sur un point P (x, y, z) ont pour expressions

$$(1) \qquad Q = \int_S h d\sigma, \quad V = \int_S \frac{h d\sigma}{u},$$

u ayant toujours la signification connue, de la distance du point P au point M.

Nous admettrons, dans tout ce qui suit, que la densité h, constante ou variable, est une fonction de ξ, η, ζ finie et continue sur la surface, et que celle-ci a, en chacun de ses points, un plan tangent déterminé et une courbure finie.

225. Lorsque le point actionné P ne fait pas partie de la couche active, il n'y a aucune difficulté à démontrer, par les mêmes moyens que nous avons employés dans le même cas, pour le potentiel d'une masse active à trois dimensions, que le potentiel V de la couche est une fonction finie, continue des coordonnées x, y, z, ainsi que ses dérivées partielles du premier et du second ordre, et que les premières représentent respectivement les composantes X, Y, Z de l'action F de la couche sur le point P, savoir

$$(2) \quad X = \int_S h \frac{\xi - x}{u^3} d\sigma, \quad Y = \int_S h \frac{\eta - y}{u^3} d\sigma, \quad Z = \int_S h \frac{\zeta - z}{u^3} d\sigma;$$

que si le point P s'éloigne indéfiniment de l'origine O des coordonnées, on aura encore

$$\lim_{r=\infty} V = 0 \quad \text{et} \quad \lim rV = Q,$$

(r = distance OP), et que $r^2 F$ ne pourra pas surpasser une limite finie; qu'enfin on aura toujours la relation

$$\Delta_2 V = 0.$$

Mais si le point P fait partie de la couche active, ces diverses propriétés ne sont plus démontrées, et la question demande un examen plus attentif. Nous allons démontrer d'abord que le potentiel V conserve une valeur déterminée, et varie d'une manière continue quand le point P se déplace soit sur la surface, soit au dehors.

Du point P comme centre, dans le plan tangent à la surface en ce point, décrivons un cercle d'un rayon α arbitrairement petit; soient V_1 le potentiel de la petite portion S_1 de la surface active qui se projette dans

l'intérieur de ce cercle, V_2 celui du reste S_2 de la surface, en sorte que

$$V = V_1 + V_2.$$

Décomposons l'aire du cercle en éléments infiniment petits par des rayons r et des cercles concentriques; soient $rdrd\theta$ l'aire d'un de ces éléments, $d\sigma$ l'élément de la surface S_1 dont il est la projection, ν l'angle de la normale à $d\sigma$ avec la normale en P, angle qui sera très voisin de zéro puisque nous supposons α très petit. Nous aurons

$$d\sigma = \frac{rdrd\theta}{\cos\nu}, \quad V_1 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\alpha} \frac{hrdr}{u\cos\nu}.$$

Le rapport $r : u$ est un cosinus, numériquement moindre que l'unité; le rapport $h : \cos\nu$, que nous désignerons par k, reste toujours inférieur en valeur absolue à un nombre k_1; nous aurons donc

$$\mathrm{VA}\ V_1 < \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\alpha} k_1 dr \quad \text{ou} \quad \mathrm{VA}\ V_1 < 2\pi k_1 \alpha.$$

Ainsi V_1 *a une valeur finie, déterminée, et qui décroît indéfiniment lorsque* α *tend vers zéro.*

Si l'on suppose que le point actionné soit, non au point de contact P, mais en un point voisin P′ placé, soit sur la surface S_1, soit près de cette surface et se projetant dans l'intérieur du petit cercle de rayon α, on prendra pour origine des coordonnées la projection du point P′ sur le plan tangent en P; l'expression de $d\sigma$ restera la même, l'intégration relative à r se fera entre zéro et une limite supérieure toujours moindre que 2α, et l'on arrivera à la même conclusion.

Relativement à la portion S_2 de la surface, P est un point extérieur, V_2 a donc une valeur déterminée et finie, il s'ensuit que la somme $V_1 + V_2 = V$ jouit de la même propriété.

Supposons maintenant que du point P on passe à un point infiniment voisin P′, soit sur la surface S, soit en dehors de celle-ci. Appelons V'_1, V'_2 les valeurs de V_1 et V_2 pour cette nouvelle position du point actionné. Les points P, P′ ne faisant pas partie de la surface S_2, la continuité du potentiel en dehors de la masse active exige que $V'_2 - V_2$ décroisse indéfiniment avec la distance PP′. D'autre part, les potentiels V_1, V'_1 peuvent être supposés aussi petits que l'on veut, d'après les remarques faites plus haut, puisque nous pouvons prendre α aussi petit que nous voulons. A plus forte raison, la différence $V'_1 - V_1$ peut

être censée moindre numériquement qu'une grandeur donnée quelconque. Il en résulte que la somme

$$V'_2 - V_2 + V'_1 - V_1 = V' - V$$

peut être rendue aussi petite qu'on le veut, et par conséquent tend vers zéro avec PP′. Nous concluons de là que *le potentiel* V *est une fonction continue de x, y, z dans tout l'espace indéfini.*

326. Mais cette propriété ne s'étend pas aux dérivées partielles de V, qui généralement éprouvent une variation brusque lorsque le point P traverse la surface. Cherchons d'abord si l'action F conserve une valeur et une direction déterminées quand le point P est sur la surface. Nous supposerons, pour plus de simplicité, que l'origine soit au point P et l'axe des z positifs dirigé suivent la normale dans un sens déterminé. Partageant comme plus haut la surface en deux parties S_1 et S_2 et désignant par X_1, Y_1, Z_1 les composantes de l'action F_1 exercée par la partie S_1, nous aurons

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

$$X_1 = \int_{S_1} \frac{h\xi d\sigma}{u^3}, \quad Y_1 = \int_{S_1} \frac{h\eta d\sigma}{u^3}, \quad Z_1 = \int_{S_1} \frac{h\zeta d\sigma}{u^3}.$$

Nous décomposons S_1 en éléments $d\sigma$ comme ci-dessus, et nous posons toujours $k = h : \cos\nu$. Nous admettons, $\cos\nu$ étant égal à 1 et h à h_0 pour $r = 0$, que k soit développable en une expression de la forme

$$k = h_0 + \lambda r,$$

λ étant une fonction de r et de θ qui ne peut surpasser un nombre donné. Nous développons aussi ζ suivant les puissances de ξ, η en observant que le plan tangent en P coïncide avec le plan XY; ce qui donne

$$\xi = r\cos\theta, \quad \eta = r\sin\theta,$$

$$\zeta = \tfrac{1}{2}(A\xi^2 + B\xi\eta + C\eta^2) + \cdots = \frac{r^2}{2}(A\cos^2\theta + B\sin\theta\cos\theta + C\sin\theta) + \cdots,$$

ou enfin

$$\zeta = r^2(N + \mu),$$

N étant une quantité qui a une valeur limitée sur la surface S_1 et μ une quantité qui tend vers zéro avec r. Enfin

$$u^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = r^2 + r^4(N + \mu)^2,$$

$$\frac{1}{u^3} = \frac{1}{r^3}\left[1 - \frac{3r^2}{2}(N + \mu)^2 + \cdots\right].$$

Substituant, nous trouverons

$$X_1 = \iint \frac{h_0 + \lambda r}{r}\left[1 - \frac{3r^2}{2}(N+\mu)^2 + \cdots\right]\cos\theta d\theta dr$$
$$= \iint \left(\frac{h_0}{r} + \lambda + \varpi r\right)\cos\theta d\theta dr,$$

ϖ restant fini dans les limites de l'intégration. La partie principale de cette intégrale,

$$h_0 \iint \frac{\cos\theta d\theta dr}{r} = h_0 \int_0^\alpha \frac{dr}{r}\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta,$$

est nulle(1). La partie restante est évidemment finie et très petite en même temps que α. Nous conclurons donc, les mêmes considérations s'appliquant à Y_1, que les composantes tangentielles X_1 et Y_1 de l'action de la couche superficielle S_1 sur un de ses points ont des valeurs finies et déterminées.

La valeur de Z_1, transformée de la même manière, deviendra

$$Z_1 = \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} (h_0 + \lambda r)(N+\mu)\left[1 - \frac{3}{2}r^2(N+\mu)^2\right] dr d\theta$$
$$= \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} (h_0 N + \varpi r)\, dr d\theta,$$

et cette intégrale double aura évidemment une valeur finie et déterminée, qui décroîtra indéfiniment avec α. Les composantes X_2, Y_2, Z_2 de l'action de la partie S_2 sur le point P étant nécessairement finies et déterminées,

---

(1) Gauss et Riemann regardent cette intégrale comme indéterminée, et il est certain qu'on a un résultat nul ou infini suivant l'ordre dans lequel on effectue les intégrations. Nous croyons pourtant qu'on doit préférer la valeur zéro, pour les raisons que voici : 1° cette intégrale donne l'action X_1 dans le cas où la surface agissante est un cercle homogène dont P est le centre, cas où il n'y a pas de raison pour que la force soit dirigée dans un sens plutôt que dans un autre; 2° si l'on prend l'intégrale d'abord entre un infiniment petit ε et α par rapport à r, et entre 0 et 2π par rapport à θ, elle est toujours nulle si petit que soit ε; 3° dans l'hypothèse plus voisine de la réalité, où l'épaisseur e de la couche est très petite, mais non pas nulle, X_1 garde toujours une valeur finie, même quand e décroît indéfiniment. Si la fiction des couches superficielles sans épaisseur devait conduire à ce résultat singulier, que la couche n'exerce sur ses propres points que des actions *indéterminées*, il faudrait, nous semble-t-il, la bannir de la théorie du potentiel.

puisque P est un point extérieur par rapport à S_1, on peut conclure de cette analyse que *les composantes* X, Y, Z *de l'action de la couche superficielle* S, *sur un point de sa surface, ont des valeurs déterminées et finies.*

227. Mais ces composantes, qui sont représentées par les dérivées partielles

$$\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z}$$

du potentiel lorsque le point P ne fait pas partie de la surface, et varient d'une manière continue comme ces dérivées, ne jouissent plus des mêmes propriétés lorsque P traverse la surface. Ainsi, la composante normale

$$Z_1 = \int_{S_1} \frac{h(\zeta - z)}{u^3} d\sigma$$

varie brusquement lorsque le point P s'éloigne d'une quantité ε, si petite qu'elle soit, de part ou d'autre de la surface, parce que le rapport $\frac{\zeta - z}{u}$, qui est un cosinus, a pour limite, lorsque ζ tend vers zéro, la valeur $-1, 0$ ou $+1$ selon que le point P est extérieur, sur la surface ou à l'intérieur. Sur la surface même, la dérivée $\frac{\partial V}{\partial z}$ est indéterminée. Sans entrer dans les détails, nous nous bornerons à établir un théorème capital qui met ce résultat en évidence.

Notons d'abord que le théorème de Gauss compris dans l'équation (1) du chapitre précédent reste évidemment applicable au cas où l'action est exercée par une masse active répartie en couche sans épaisseur, à supposer que cette couche ne se confonde pas, en tout ou en partie, avec la surface S. De même, la formule de Green, celles que nous en déduites et leurs conséquences générales, s'appliquent au potentiel d'une couche superficielle dans les conditions où il jouit des propriétés de continuité supposées par les démonstrations; mais il ne faudrait pas les appliquer à des cas qui supposent la continuité de la dérivée du potentiel normalement à une surface, si celle-ci était couverte par la matière active.

228. Concevons une surface ou portion de surface S recouverte de matière active dont la densité h suit une loi donnée. D'un point O, pris sur la surface, décrivons une surface sphérique Σ de rayon arbitraire, et appelons Σ', Σ'' les deux portions de cette surface détachées

respectivement par deux surfaces S′, S″ parallèles à S et infiniment voisines de celle-ci de part et d'autre; Ω′ le volume compris entre Σ′ et S′; Ω″ le volume compris entre Σ″ et S″. Appliquons l'équation (1) du n° 322 successivement à ces deux espaces, et comme ils ne renferment aucune portion de la masse active, nous aurons

$$\int_{\Sigma'} \mathrm{F} \cos \overline{\mathrm{F}n} d\sigma + \int_{S'} \mathrm{F} \cos \overline{\mathrm{F}n} d\sigma = 0,$$

$$\int_{\Sigma''} \mathrm{F} \cos \overline{\mathrm{F}n} d\sigma + \int_{S''} \mathrm{F} \cos \overline{\mathrm{F}n} d\sigma = 0.$$

Soient dn, dn' les éléments pris respectivement sur la normale à la surface S, du côté *intérieur* et du côté *extérieur;* $\partial V : \partial n$, $\partial V : \partial n'$ les dérivées de V suivant ces éléments. La composante normale $\mathrm{F} \cos \overline{\mathrm{F}n}$, sur la surface S′, différera infiniment peu de $\partial V : \partial n$, et sur la surface S″, de $\partial V : \partial n'$. D'autre part, cette composante ayant une valeur finie sur la zône infiniment étroite de Σ comprise entre S′ et S″, l'intégrale de $\mathrm{F} \cos \overline{\mathrm{F}n} d\sigma$ étendue à cette zône peut être négligée. En ajoutant membre à membre les deux équations ci-dessus et ayant égard à ces observations, on a, à la limite,

$$\int_{\Sigma} \mathrm{F} \cos \overline{\mathrm{F}n} d\sigma = -\int_{S} \left(\frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial n'} \right) d\sigma.$$

Mais, d'après le théorème de Gauss, l'intégrale qui figure au premier membre a pour valeur $4\pi \int h d\sigma$, donc enfin

$$\int_{S} \left(\frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial n'} + 4\pi h \right) d\sigma = 0.$$

Cette égalité subsiste, quelle que soit la portion S de la surface découpée par la sphère. Il faut donc que le coefficient de $d\sigma$ soit nul, et l'on arrive à ce théorème :

En chaque point d'une surface recouverte de matière active, la densité h de cette matière satisfait à l'équation.

$$\text{(H)} \qquad \frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial n'} = -4\pi h.$$

Il faut bien observer que les dérivées partielles qui figurent au premier membre sont prises à partir de la surface, dans deux sens

opposés. Cette équation démontre donc que la dérivée du potentiel suivant une ligne qui traverse normalement la surface active éprouve, au point où cette ligne traverse la surface, une solution de continuité. Il en est donc de même de la composante de l'action suivant cette ligne, puisqu'elle est représentée, en dehors de la surface, par la dérivée du potentiel.

CHAPITRE XXVI.

RELATIONS ENTRE LE POTENTIEL D'UNE MASSE A TROIS DIMENSIONS ET LE POTENTIEL D'UNE COUCHE SUPERFICIELLE. COUCHES DE NIVEAU.

339. Nous allons d'abord généraliser la formule de Green, étendue à l'espace Ω compris sous une surface fermée Σ, savoir :

$$(B)\quad \int_{\Omega} U\Delta_2 V.d\omega = -\int_{\Sigma} U\frac{\partial V}{\partial n}d\sigma - \int_{\Omega}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right)d\omega.$$

Appliquons cette formule à l'espace Ω', compris entre la surface Σ et une sphère Σ', d'un rayon arbitrairement grand, qui enveloppe complètement Σ, et remarquons que l'élément normal à la surface Σ, mené vers l'*intérieur* de l'espace Ω', se confond avec l'élément dn' de la normale *extérieure* par rapport à l'espace Ω. Nous aurons donc, en ajoutant membre à membre les deux équations ainsi obtenues,

$$\int_{\Omega+\Omega'} U\Delta_2 V.d\omega = -\int_{\Sigma} U\left(\frac{\partial V}{\partial n}+\frac{\partial V}{\partial n'}\right)d\sigma - \int_{\Sigma'} U\frac{\partial V}{\partial n}d\sigma - \int_{\Omega+\Omega'}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\cdots\right)d\omega.$$

Faisons croître indéfiniment le rayon de la sphère et admettons que U, V soient des potentiels de volumes ou de surfaces occupant un espace fini. D'après des considérations déjà présentées (329) l'intégrale relative à la surface Σ' tendra vers zéro; l'ensemble des espaces Ω et Ω' deviendra l'espace indéfini tout entier qui s'étend des deux côtés de la surface Σ, et nous indiquerons par l'indice ∞ une intégrale triple qui s'étend à tout cet espace. Nous aurons ainsi

$$(1)\quad \int_{\infty} U\Delta_2 V\cdot d\omega = -\int_{\Sigma} U\left(\frac{\partial V}{\partial n}+\frac{\partial V}{\partial n'}\right)d\sigma - \int_{\infty}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right)d\omega.$$

On peut, dans cette égalité, permuter les fonctions U et V qui jouissent des mêmes propriétés, et l'on a, en retranchant,

$$(2)\int_{\infty}(U\Delta_2 V - V\Delta_2 U)\,d\omega = -\int_{\Sigma} U\left(\frac{\partial V}{\partial n}+\frac{\partial V}{\partial n'}\right)d\sigma + \int_{\Sigma} V\left(\frac{\partial U}{\partial n}+\frac{\partial U}{\partial n'}\right)d\sigma.$$

340. Comme première application, supposons que V soit le potentiel d'une couche de densité h sur une surface fermée S, et U le potentiel V′ d'une couche, de densité différente h', répartie sur la même surface. Prenons S pour la surface Σ. Nous aurons par tout l'espace indéfini $\Delta_2 U = 0$, $\Delta_2 V = 0$, puisque toute la matière active d'où émane, soit le potentiel U, soit le potentiel V, est concentrée sur la surface S.

D'autre part on a, en chaque point de cette surface, d'après l'équation (H),

$$\frac{\partial V}{\partial n}+\frac{\partial V}{\partial n'} = -4\pi h, \quad \frac{\partial U}{\partial n}+\frac{\partial U}{\partial n'} = -4\pi h';$$

en substituant dans l'équation (2) on aura donc

$$(3)\qquad \int_S V' h\,d\sigma = \int_S V h'\,d\sigma.$$

Cette équation constitue une réciprocité remarquable entre les deux distributions h et h' sur une même surface.

Il faut remarquer que cette équation, comme les précédentes, subsiste si la surface S est de nature telle qu'une droite puisse la rencontrer en plus de deux points, et si même elle est composée d'un système de plusieurs surfaces fermées disjointes.

Supposons maintenant que V désigne encore le potentiel d'une masse Q répartie sous une densité h sur la surface S, et U le potentiel d'une masse active M répartie dans un espace à trois dimensions E, suivant une loi caractérisée par la densité ρ. Dans l'équation (2), $\Delta_2 V$ sera nul pour tout élément $d\omega$ de l'espace indéfini; $\Delta_2 U$ sera aussi nul, sauf pour les éléments $d\omega$ compris dans l'espace E, où il se réduira à $-4\pi\rho$ en vertu du théorème de Poisson (**325**). On aura donc

$$\int_{\infty} U\Delta_2 V = 0, \quad \int_{\infty} V\Delta_2 U = -4\pi\int_E V\rho\,d\omega.$$

Sur la surface S, on aura en chaque point

$$\frac{\partial V}{\partial n}+\frac{\partial V}{\partial n'} = -4\pi h, \qquad \frac{\partial U}{\partial n}+\frac{\partial U}{\partial n'} = 0.$$

car le potentiel U satisfait à la loi de continuité de la dérivée. L'équation (2) nous donne donc

$$\int_E V\rho\, d\omega = \int_S U h\, d\sigma. \tag{4}$$

Le potentiel total de la couche Q sur la masse M est donc égal à celui de la masse M sur la couche Q, réciprocité analogue à celle ci dessus.

Revenons à l'équation (1), et remplaçons U et V par U + V, dans lequel U et V auront la même signification que ci-dessus. L'équation deviendra d'abord

$$\int_\infty (U+V)(\Delta_2 U + \Delta_2 V)\, d\omega = -\int_S (U+V)\left(\frac{\partial U}{\partial n} + \frac{\partial U}{\partial n'} + \frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial n'}\right) d\sigma$$
$$- \int_\infty \Delta_1 (U+V)\, d\omega,$$

$\Delta_1 \varphi$ désignant, en général, la somme des carrés des dérivées partielles d'une fonction φ par rapport à x, y, z.

Mais on a, par les mêmes raisons que ci-dessus,

$$\Delta_2 V = 0, \quad \Delta_2 U = 0 \quad \text{ou} \quad -4\pi\rho,$$
$$\frac{\partial U}{\partial n} + \frac{\partial U}{\partial n'} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial n'} = -4\pi h,$$

d'où, réduisant,

$$\int_E (U+V)\rho\, d\omega + \int_S (U+V) h\, d\sigma = \frac{1}{4\pi}\int_\infty \Delta_1 (U+V)\, d\omega. \tag{5}$$

Le premier membre n'est autre chose que le potentiel de toute la masse active sur elle-même, et l'équation montre que ce potentiel est exprimable par une intégrale définie triple qui s'étend à tous les éléments de volume de l'espace indéfini.

Si la masse active n'existait que sur la surface S, on aurait partout $\rho = 0$, $U = 0$, et

$$\int_S V h\, d\sigma = \frac{1}{4\pi}\int_\infty \Delta_1 V \cdot d\omega. \tag{6}$$

Si la masse active se réduisait à celle qui occupe l'espace E, on aurait $h = 0$, $V = 0$,

$$\int_E U\rho\, d\omega = \frac{1}{4\pi}\int_\infty \Delta_1 U \cdot d\omega. \tag{7}$$

L'espace E peut se composer de plusieurs volumes distincts et la surface S peut être un groupe de surfaces fermées indépendantes les unes des autres.

241. Au moyen des principes qui précèdent, nous pouvons aborder la démonstration de théorèmes célèbres, dus à Gauss, qui jouent un rôle important dans l'électrostatique.

Désignons par U le potentiel d'un système de masses M, distribuées suivant une densité variable ρ dans un espace à trois dimensions E, qui peut se composer de plusieurs espaces disjoints E', E'',....; par V le potentiel d'une masse Q, distribuée suivant une loi de densité représentée par la fonction h de (x, y, z) sur une surface fermée S. Posons

$$(8) \qquad P = \int_S (V + U)\, h d\sigma + \int_E (V + U)\, \rho d\omega,$$

en sorte que P représente ici le potentiel de toute la masse active sur elle-même.

Les masses M sont supposées fixes, en sorte que ρ est une fonction *donnée* de x, y, z dans l'espace E, et nulle en dehors. La masse totale Q est aussi donnée, mais sa loi de répartition sur S ne l'est pas, en sorte que h est une fonction continue de x, y, z qui est assujettie seulement à vérifier l'équation

$$(9) \qquad \int_S h d\sigma = Q.$$

Nous allons chercher à déterminer cette fonction h de manière que P acquière une valeur *minimum*. En vertu de l'équation (5), nous avons

$$P = \frac{1}{4\pi} \int_\infty \Delta_1 (U + V)\, d\omega.$$

La fonction sous le signe $\int$ étant une somme de carrés multipliée par l'élément de volume $d\omega$, est essentiellement positive, et il en est de même de l'intégrale. La valeur de celle-ci est d'ailleurs inférieure à une limite fixe, d'après sa définition (8); nous admettrons donc qu'elle devienne un minimum, pour une certaine distribution h de la masse Q.

En second lieu, si l'on a égard à l'équation (4), on voit immédiatement que P peut aussi se mettre sous la forme

$$P = \int_S (V + 2U)\, h d\sigma + \int_E U \rho d\omega,$$

et comme le dernier terme ne change pas lorsqu'on fait varier la distribution de la masse Q, puisque ρ est donné ainsi que U, il suffit de calculer l'accroissement du premier terme lorsque h varie, pour avoir la variation δP du potentiel P. On a ainsi, Q étant donné,

$$(\alpha) \qquad \int_S \delta h \, . d\sigma = 0,$$

$$\delta P = \int_S (V + \delta V + 2U)(h + \delta h) d\sigma - \int_S (V + 2U) h d\sigma$$
$$= \int_S (V + 2U) \delta h d\sigma + \int_S \delta V \cdot h d\sigma + \int_S \delta V \cdot \delta h \cdot d\sigma.$$

Nous observons que

$$\delta V = \int_S \frac{(h + \delta h) d\sigma}{u} - \int_S \frac{h d\sigma}{u} = \int_S \frac{\delta h \, . d\sigma}{u};$$

δV est donc le potentiel d'une masse *nulle* (α), répartie avec une densité δh sur la surface S. En appliquant à ce potentiel et à V l'équation de réciprocité (3), nous aurons évidemment

$$\int_S \delta V \cdot h d\sigma = \int_S V \cdot \delta h \cdot d\sigma,$$

et si d'autre part nous appliquons à δV l'équation (6), nous verrons que δP peut se mettre sous l'une ou l'autre de ces deux formes

$$(10) \qquad \delta P = 2 \int_S (V + U) \delta h \, . d\sigma + \int_S \delta V \cdot \delta h d\sigma$$

$$(11) \qquad \delta P = 2 \int_S (V + U) \delta h d\sigma + \frac{1}{4\pi} \int_\infty \Delta_1(\delta V) d\omega.$$

δh, et par suite δV, peuvent être de grandeur finie.

342. Si la densité h est telle que l'on ait, sur chaque point de la surface S, $V + U = const$, la valeur de P deviendra un minimum. En effet, l'intégrale

$$\int_S (V + U) \, \delta h \cdot d\sigma = (V + U) \int_S \delta h d\sigma = 0,$$

en vertu de la relation (α). Comme le dernier terme de l'équation (11) a une valeur essentiellement positive, δP est donc positif quelle que soit la variation δh de la densité, ce qui caractérise bien un minimum de P.

Réciproquement, la condition $V + U = const.$, doit être remplie pour que P soit un minimum. En effet, si $V + U$ variait sur la surface S, en désignant par A une quantité constante comprise entre la plus grande et la plus petite valeur de $V + U$, la fonction $V + U - A$ aurait, sur la surface S, tantôt des valeurs positives, tantôt des valeurs négatives. Comme on a, par l'équation (α), $\int A\delta h d\sigma = 0$, on peut écrire

$$\delta P = 2\int_S (V + U - A)\,\delta h d\sigma + \int_S \delta V \cdot \delta h d\sigma.$$

Prenons $\delta h = \varepsilon h_1$, ε étant une constante positive, aussi petite que l'on voudra, h_1 une fonction encore arbitraire de x, y, z. Il en résultera

$$\delta V = \int_S \frac{\varepsilon h_1 d\sigma}{u} = \varepsilon \int_S \frac{h_1 d\sigma}{u} = \varepsilon V_1,$$

V_1 étant un potentiel de grandeur finie. Donc

$$\delta P = 2\varepsilon \int_S (V + U - A) h_1 d\sigma + \varepsilon^2 \int_S V_1 h_1 d\sigma.$$

Dans le second membre, on sait que le dernier terme a une valeur essentiellement positive; le premier peut être rendu négatif, si l'on choisit la fonction h_1 de manière qu'elle ait, en chaque point de la surface S, un signe opposé à celui de $V + U - A$ au même point, tout en vérifiant la condition (α),

$$\int_S h_1 \delta\sigma = 0,$$

ce qui est évidemment possible d'une infinité de manières. Mais comme ε est arbitrairement petit, on pourra toujours faire en sorte que le second terme de δP soit numériquement moindre que le premier, qui donnera son signe à δP. On aura donc $\delta P < 0$, ce qui montre que P n'était pas un minimum pour la valeur de h qui rend $V + U$ variable sur la surface S. La condition $V + U = const.$ est donc, non seulement suffisante, mais nécessaire.

342. Il n'existe d'ailleurs qu'une loi de densité h qui satisfasse à la condition $V + U = const.$ ou P minimum. Supposons en effet qu'il en existe une seconde, et soient $h + \eta$ la fonction qui exprime la densité dans cette nouvelle distribution, $V + v$ le potentiel correspondant de la couche superficielle, P′ le nouveau minimum de P. On a d'ailleurs nécessairement, d'après (α),

$$\int_S \eta d\sigma = 0, \quad v = \int_S \frac{\eta d\sigma}{u}.$$

D'après l'équation (11), on a aussi

$$P' - P = 2\int_S (V + U)\,\eta d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int_\infty \Delta_1 v . d\omega,$$

ou, puisque $V + U$ est constant sur la surface dans la loi de densité h et que $\int \eta d\sigma = 0$,

$$P' - P = \frac{1}{4\pi}\int_\infty \Delta_1 v . d\omega.$$

Le second membre est essentiellement positif, comme on l'a déjà observé. Donc

$$P' - P > 0.$$

Mais le même raisonnement peut s'appliquer en permutant les deux distributions, et on prouverait de même que l'on doit avoir

$$P - P' > 0.$$

Il faut donc, nécessairement, que l'on ait $P = P'$, et par suite

$$\int_\infty \Delta_1 v \cdot d\omega = 0,$$

ce qui ne peut avoir lieu que si l'on a, en chaque point de l'espace intérieur ou extérieur à S, $\Delta_1 v = 0$, d'où

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad v = \text{const.} = 0.$$

Le potentiel v de la couche superficielle de densité η est donc nul en tous les points de l'espace. L'équation

$$\frac{\partial v}{\partial n} + \frac{\partial v}{\partial n'} = -4\pi\eta,$$

applicable à la surface S, montre alors que η est nul en chaque point de cette surface, en sorte que la seconde distribution est identique à la première.

Nous concluons de tout ce qui précède ce théorème général : *Étant donnés un système de masses actives fixes, et une quantité Q de matière agissante à répartir en couche superficielle sur une surface fermée S, il est toujours possible, et cela d'une seule manière, de répartir la masse*

Q *sur la surface* S *de telle manière que la somme* V + U *des potentiels de la couche et des masses fixes ait une valeur constante sur la surface* S. *Cette distribution est celle qui rend minimum le potentiel* P *de toute la masse agissante sur elle-même.* Ce théorème s'étend sans peine au cas où la surface S se compose d'un système de surfaces fermées distinctes, mais la valeur constante V + U n'est pas nécessairement la même pour les différentes surfaces.

344. Dans le cas particulier où les masses M et leur potentiel U se réduisent à zéro, on a simplement

$$P = \int_S V h d\sigma.$$

La condition V + U = *const.* se réduit à V = *const.*, en sorte que la surface S est une surface de niveau du potentiel V, et d'après un théorème établi (**328**) V sera aussi constant dans tout l'espace enveloppé par la surface S. Donc on a ce théorème, cas particulier du précédent :

Étant donnée une quantité Q *de matière active et une surface fermée* S, *il est toujours possible, et d'une seule manière, de répartir cette masse* Q *sur la surface* S *de façon que le potentiel* V *de la couche ait une valeur constante* A *sur la surface elle-même et dans son intérieur, et dans cette répartition l'intégrale*

$$\int_S V h d\sigma,$$

c'est-à-dire le potentiel de la masse sur elle-même, aura une valeur minimum.

Remarques. — I. *La constante* A *ne peut être nulle,* car d'après les théorèmes démontrés (**328**, **329**), le potentiel V serait nul dans tout l'espace intérieur et extérieur à la surface S, et l'on aurait, en chaque point de S,

$$\frac{\partial V}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial n'} = 0, \quad \text{d'où} \quad h = 0,$$

la densité serait nulle en chaque point, et Q serait nul, ce qui est contre l'hypothèse.

II. La densité h a partout même signe, car V étant constant dans l'intérieur de S, on a

$$\frac{\partial V}{\partial n} = 0, \quad \text{d'où} \quad h = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n'},$$

et nous avons démontré que, S étant une surface de niveau que l'on peut regarder comme enveloppant toute la masse active, V varie partout dans le même sens lorsqu'on s'éloigne de la surface sur la normale extérieure. Donc, $\partial V : \partial n'$ a partout le même signe, ainsi que h.

III. Il suit de la remarque I que l'on peut, en disposant convenablement de la quantité Q, faire acquérir au potentiel A telle valeur que l'on veut sur la surface. Car si l'on multiplie la densité h par une constante α, la masse Q deviendra αQ, et le potentiel deviendra

$$\int_S \frac{\alpha h d\sigma}{u} = \alpha V,$$

donc A sera remplacé par αA. On peut donc choisir la masse Q de manière à élever le niveau potentiel de la couche à une valeur donnée.

245. Démontrons maintenant les deux théorèmes de Gauss. Supposons d'abord une surface fermée S, *en dehors de laquelle* se trouvent des masses données M de densité ρ et de potentiel U. On pourra toujours, d'une seule manière, répartir sur la surface S une quantité donnée Q de matière active, de telle sorte que la différence V — U du potentiel de la couche et du potentiel des masses données soit constante pour tous les points de la surface S. Ceci est une conséquence du théorème du n° **243** : il suffit de concevoir que l'on remplace chaque élément $\rho d\omega$ de la masse fixe M par un élément de masse égale et de signe contraire $-\rho d\omega$, ce qui donnera un potentiel — U, et d'appliquer le principe rappelé. On sait, de plus, que cette répartition est unique et rend minimum l'intégrale $\int_S (V - 2U) h d\sigma$.

Mais le potentiel V — U étant constant sur la surface S, qui n'enveloppe aucune portion de la matière active, est aussi constant dans l'intérieur de S. On aura donc, en chaque point de cet espace,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

De là le premier théorème de Gauss : *Étant donné un système de masses actives fixes* M *et une surface fermée* S *qui ne renferme aucune de ces masses, il est toujours possible, d'une seule manière, de répartir sur la surface* S *une quantité donnée* Q *de matière active suivant une loi telle que l'action de cette couche, sur un point quelconque intérieur*

à S, *coïncide en grandeur et en direction avec celle des masses* M *sur le même point.*

346. Supposons, en second lieu, que la surface fermée S enveloppe au contraire toutes les masses actives M. On démontrera de la même manière, en remplaçant chaque élément $\rho d\omega$ par une élément de masse égale et de signe contraire $-\rho d\omega$, et en appliquant le théorème du n° **344**, qu'il est possible, d'une seule manière, de répartir une masse donnée Q en couche superficielle sur la surface S, de telle manière que l'on ait, en chaque point de cette surface,

$$V - U = A,$$

V étant le potentiel de la couche et A une constante. De plus, on pourra, par un choix convenable de la quantité Q, réduire cette constante A à zéro. En effet, d'après la propriété établie (**344**, III), on peut couvrir la surface S d'une couche dont la masse Q' soit choisie de manière que le potentiel de cette couche ait, sur toute la surface, une valeur constante donnée $-$ A. Superposons, en chaque point de la surface S, la densité h' de cette couche à la densité h de la première : nous formerons une nouvelle distribution dont le potentiel V' aura, sur la surface, la valeur

$$V' = \int_S \frac{h + h'}{u} d\sigma = V - A,$$

et satisfera, par conséquent, à l'équation

$$V' - U = 0.$$

Ainsi, par une répartition convenable de la masse $Q + Q'$, on réduit à zéro, en chaque point de la surface, le potentiel de la couche formée et de la masse $-$ M. Mais comme cette surface S enveloppe toute la masse active $Q + Q' - M$, ce potentiel est nul aussi (**328**) sur un point quelconque de l'espace extérieur, et l'on a, par suite,

$$V' = U, \frac{\partial V'}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial V'}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial V'}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Donc : *Étant donné un système de masses actives* M *et une surface fermée* S *qui les enveloppe entièrement, il est toujours possible d'une seule manière, de répartir sur la surface* S *une quantité de matière active convenablement choisie, de façon que la couche ainsi formée et le système* M *aient même potentiel, et par conséquent même action sur un*

point quelconque de l'espace en dehors de S. *De plus, la masse de la couche est alors égale à la somme* M *des masses actives*, car si l'on considère une surface Σ enveloppant la surface S, et si on lui applique l'équation (A) du n° **323**, on aura

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial (V' - U)}{\partial n} d\sigma = 4\pi (Q + Q' - M).$$

Mais on a, en chaque point de l'espace entre S et Σ, $V' = U$, l'intégrale est nulle, donc

$$Q + Q' = M.$$

Les théorèmes de Gauss s'étendent au cas où, au lieu d'une surface fermée S, on donne plusieurs surfaces fermées disjointes, avec certaines modifications.

347. On a établi (**344**) qu'il est toujours possible, d'une seule manière, de distribuer une masse donnée Q sur une surface fermée S de telle façon que le potentiel V de la couche ainsi formée soit constant sur la surface, et par suite dans son intérieur. La surface S est donc une *surface de niveau* relativement au potentiel V, c'est pourquoi la couche active qui jouit de la propriété énoncée s'appelle une *couche de niveau.*

Si l'on multiplie par un facteur constant λ la densité *h* en tout point de la surface, la masse et le potentiel de la couche deviendront respectivement

$$\lambda \int_S h d\sigma = \lambda Q, \quad \lambda \int_S \frac{h d\sigma}{u} = \lambda V,$$

le potentiel restera donc constant sur la surface S et la nouvelle couche sera encore une couche de niveau. Réciproquement, si le potentiel varie dans un rapport constant λ sur toute l'étendue d'une surface de niveau, ce ne peut être que par la variation dans le même rapport de la densité en chaque point de la surface, car il n'existe qu'une seule distribution de la masse active qui réalise un potentiel donné sur une surface fermée.

348. Le problème de la répartition d'une masse donnée en couche de niveau sur une surface donnée présente, en général, de grandes difficultés, mais il y a un cas où la solution est très facile. Supposons que l'on connaisse le potentiel U d'un système de masses données M, et une surface de niveau S relative à ce potentiel, enveloppant entièrement les masses M. Cherchons à répartir sur la surface S une couche dont le

potentiel V soit égal à celui des masses M pour tout point de S ou extérieur à S. Sur la surface, on devra avoir $V = U$, et comme U est constant, il en sera de même de V, donc la couche sera une couche de niveau. Le potentiel V sera donc constant dans tout l'espace enveloppé par S, et l'on aura

$$\frac{\partial V}{\partial n} = 0.$$

D'autre part, V étant égal à U en tout point de l'espace extérieur, on aura en chaque point de S

$$\frac{\partial V}{\partial n'} = \frac{\partial U}{\partial n'}.$$

L'équation (G) deviendra donc

$$\frac{\partial U}{\partial n'} = -4\pi h, \quad (12) \quad h = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial U}{\partial n'}.$$

Or, U est connu, par hypothèse. Cette équation fera donc connaître la densité h en un point quelconque de la surface donnée.

On voit par là que la connaissance du potentiel d'un système de masses données permet de trouver une infinité de solutions du problème des couches de niveau. De plus, on sait et il est facile de vérifier, par l'équation (12), que la masse de chacune de ces couches sera égale à la masse totale M, mais on pourra lui attribuer une valeur arbitraire en faisant varier la densité dans un rapport λ, comme on l'a vu plus haut. Enfin, d'après le théorème du n° **345**, chacune de ces couches de niveau aura, sur un point extérieur quelconque, un potentiel égal à celui des masses données M sur ce point; les surfaces $U = const.$ seront donc des surfaces $V = const.$, d'où il suit que

Les surfaces de niveau, relatives au potentiel V *d'une quelconque des couches de niveau formées sur les surfaces de niveau qui enveloppent la masse* M, *se confondent avec les surfaces de niveau relatives au potentiel* U *de ces masses.*

349. Nous pouvons même résoudre un problème plus général. La surface de niveau S renfermant une partie M_1 de la masse active M, tandis que la partie M_2 lui est extérieure, soient U_1, U_2 les potentiels respectifs de ces parties; $U = U_1 + U_2$. Si nous couvrons la surface S d'une couche Q telle que son potentiel V soit égal à U_1 sur chaque point de la surface S, on aura aussi $V = U_1$ sur tout point extérieur à la sur-

face, d'après le théorème démontré au n° **329**. Mais sur la surface on a

$$U = U_1 + U_2 = \text{const.} = A,$$

par hypothèse, donc $U_1 = A - U_2$, donc aussi $V = A - U_2$. Il suit de là que le potentiel du système (Q, M_2) formé de la couche et de la masse extérieure M_2 est, sur la surface S, égal à

$$V + U_2 = A,$$

donc constant; il est, par suite, constant dans l'intérieur de S, qui ne renferme aucune portion de la masse (Q, M_2). Donc, en chaque point de cet espace, on a

$$V = A - U_2.$$

Il suit de là que *la couche répartie sur la surface de niveau* S *exerce, sur les points extérieurs, la même action que la masse intérieure* M_1, *et sur les points intérieurs, une action égale et opposée à celle de la masse extérieure* M_2.

De plus, on a évidemment, d'après ces relations,

$$\frac{\partial V}{\partial n'} = \frac{\partial U_1}{\partial n'}, \quad \frac{\partial V}{\partial n} = -\frac{\partial U_2}{\partial n} = \frac{\partial U_2}{\partial n'},$$

d'où

$$h = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial n'}\right) = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial U_1}{\partial n'} + \frac{\partial U_2}{\partial n'}\right)$$

ou

$$h = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial U}{\partial n'}.$$

L'équation (12) donne donc encore la loi de densité dans ce cas, mais couche Q n'est plus une couche de niveau.

350. On appelle *points correspondants*, sur deux surfaces de niveau, les points où une même ligne de force rencontre ces surfaces. Considérons deux surfaces de niveau S_1 et S_2 relatives au potentiel U d'un système de masses M, $d\sigma_1$ un élément pris sur la première, $d\sigma_2$ l'élément découpé sur la seconde par le canal infiniment mince engendré par une ligne de force qui s'appuie sur le contour de $d\sigma_1$. Appliquons l'équation (A) à la surface fermée formée par le canal et les deux éléments correspondants $d\sigma_1$, $d\sigma_2$. La partie de l'intégrale

$$\int \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma$$

qui se rapporte à la surface du canal est nulle, puisque, pour chaque élément $d\sigma$ de cette surface, dn est tangent à une surface de niveau où U est constant. L'équation se réduit donc, q désignant la portion de masse active comprise dans l'intérieur du canal, à

$$\left(\frac{\partial U}{\partial n'}\right)_1 d\sigma_1 - \left(\frac{\partial U}{\partial n'}\right)_2 d\sigma_2 = 4\pi q.$$

On sait que l'action en un point est normale à la surface de niveau en ce point et mesurée par la dérivée du potentiel suivant cette normale. On voit donc que *la différence des actions que le système* M *exerce sur les éléments correspondants de deux surfaces de niveau est égale à la portion de masse active comprise dans le canal orthogonal qui réunit ces deux éléments, multipliée par* -4π. Si les surfaces fermées S_1 et S_2 enveloppent la totalité de la masse M, q est nul, donc

$$(13) \qquad \left(\frac{\partial U}{\partial n'}\right)_1 d\sigma_1 = \left(\frac{\partial U}{\partial n'}\right)_2 d\sigma_2.$$

Les actions sur les deux éléments correspondants sont donc égales.

Concevons maintenant que l'on distribue sur ces surfaces fermées S_1 et S_2 des quantités arbitraires de matière active,

$$Q_1 = \lambda_1 M, \quad Q_2 = \lambda_2 M,$$

de manière à former, d'après la formule (12), deux couches de niveau C_1 et C_2. Les densités h_1, h_2 sur ces couches seront

$$h_1 = -\frac{\lambda_1}{4\pi}\left(\frac{\partial U}{\partial n'}\right)_1, \quad h_2 = -\frac{\lambda_2}{4\pi}\left(\frac{\partial U}{\partial n'_2}\right);$$

mais l'équation (13) donnera

$$\frac{h_1 d\sigma_1}{\lambda_1} = \frac{h_2 d\sigma_2}{\lambda_2} \quad \text{ou} \quad \frac{h_1 d\sigma_1}{h_2 d\sigma_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{Q_1}{Q_2}.$$

C'est-à-dire que *deux éléments correspondants des deux couches de niveau renfermeront des quantités de matière active qui seront dans le même rapport que les masses des deux couches.*

De plus, si nous désignons par U le potentiel des masses M, par V_1, V_2 les potentiels respectifs des deux couches de niveau sur un point extérieur quelconque, on aura, d'après le théorème déjà rappelé (**348**),

$$V_1 = \lambda_1 U, \quad V_2 = \lambda_2 U,$$

d'où

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = \lambda_1 \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial V_2}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial U}{\partial x},$$

d'où

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} : \frac{\partial V_2}{\partial x} = \lambda_1 : \lambda_2 = Q_1 : Q_2,$$

et de même pour les autres dérivées. Il en résulte que *deux couches de niveau exercent, sur un même point extérieur, des actions de même direction et proportionnelles à leurs masses.*

Enfin, les équations

$$V_1 = \lambda_1 U, \quad Q_1 = \lambda_1 M$$

donnent

$$\frac{V_1}{Q_1} = \frac{U}{M},$$

quantité indépendante de la constante λ_1. Donc *le potentiel d'une couche de niveau sur un point extérieur* P, *divisé par la masse de la couche, donne un rapport qui reste le même quelle que soit cette couche.*

251. *Applications.* — La masse active réduite à un point de masse μ admet comme surfaces de niveau des sphères dont ce point est le centre; les couches de niveau ont une densité constante. Ce cas est trop simple pour nous y arrêter.

Pour aborder le problème de deux centres d'action, rappelons d'abord une propriété du cercle. Soient (fig. 128) O le centre, R le rayon; A, A' deux points sur une même droite partant du centre, et tels que l'on ait

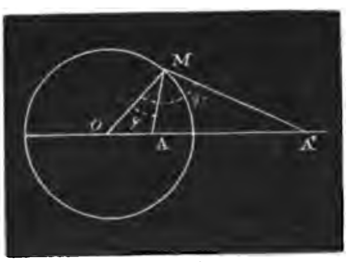


Fig. 128.

$$OA \times OA' = R^2;$$

ces points sont *conjugués*. Joignons un point M de la circonférence aux points A, A'; les triangles OAM, OA'M ont l'angle en O commun, la relation ci-dessus donne

$$\frac{OA}{OM} = \frac{OM}{OA'},$$

ces triangles sont semblables. Donc 1° on a encore

$$\frac{AM}{A'M} = \frac{OA}{OM},$$

le rapport des distances de chaque point de la circonférence à deux points conjugués est constant; 2° les angles OMA, OA'M sont égaux; de même les angles OAM, OMA' : *les rayons menés des points conjugués A et A' à un même point de la circonférence font avec la normale en ce point des angles réciproquement égaux à ceux qu'ils font avec la droite* OAA'.

Si donc on pose

$$AM = u,\quad A'M = u',\quad AA' = \delta,\quad AMO = \varphi,\quad A'MO = \varphi',\quad OA : OM = k,$$

on aura les relations

$$u' \cos\varphi - u \cos\varphi' = \delta,\quad \frac{u}{u'} = k.$$

Cela rappelé, soit une masse active composée de deux masses μ, $-\mu'$, concentrées en deux points A, A'. Le potentiel U de ce système est donné par la formule

$$U = \frac{\mu}{u} - \frac{\mu'}{u'}.$$

Les surfaces de niveau ont pour équation

$$\frac{\mu}{u} - \frac{\mu'}{u'} = \text{const.}$$

Celle qui répond à une constante nulle

$$\frac{\mu}{u} - \frac{\mu'}{u'} = 0,\quad \text{ou}\quad \frac{u}{u'} = \frac{\mu}{\mu'} = k,$$

est une surface de révolution autour de AA', dont la génératrice est un cercle ayant A, A' pour points conjugués; donc, une sphère dont le centre est en O, sur AA', et déterminé par les relations

$$OA = kR,\quad OA' = R : k,\quad OA' - OA = \delta.$$

Pour déterminer la densité h d'une couche répartie sur cette sphère, de manière que la couche agisse sur un point extérieur comme la masse μ placée en A, et sur un point intérieur comme la masse μ' placée en A', nous appliquerons la méthode du n° **349**. L'équation (12) nous donnera

$$h = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\mu}{u^2}\frac{\partial u}{\partial n'} - \frac{\mu'}{u'^2}\frac{\partial u'}{\partial n'}\right) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\mu}{u^2}\cos\varphi - \frac{\mu'}{u'^2}\cos\varphi'\right).$$

Mais on a

$$\mu' = \frac{\mu}{k},\quad u' = \frac{u}{k},$$

d'où

$$h = \frac{\mu k}{4\pi u^2}(\cos\varphi - k\cos\varphi') = \frac{\mu k}{4\pi u^3}(u'\cos\varphi - u\cos\varphi'),$$

ou enfin

$$h = \frac{\mu k \delta}{4\pi u^3}.$$

Cette équation donne la solution du problème : *Il faut que la masse soit répartie sur la sphère de telle manière que la densité varie en raison inverse du cube de la distance au point intérieur A.*

252. On déduit facilement de là les surfaces de niveau relatives au potentiel d'un système de trois points en ligne droite, A, C, A', dont les masses sont dans un certain rapport. On peut toujours construire deux cercles, de centres A et A', se coupant à angle droit, la corde d'intersection rencontrant la droite AA' en C (fig. 129). Soient R, R' les rayons des cercles, h la demi-corde d'intersection; admettons que les masses en A, A', C soient respectivement représentées par les nombres R, R', $-h$. On voit immédiatement par les propriétés des triangles rectangles que les points A' et C sont conjugués relativement au cercle de centre A; les distances u', u'' de ces points, à un point quelconque M de cette circonférence, vérifient donc la relation

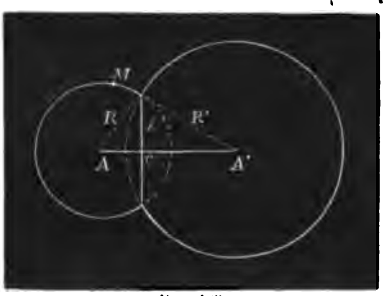


Fig. 129.

$$\frac{u'}{u''} = \frac{R'}{h}, \quad \text{d'où} \quad \frac{R'}{u'} - \frac{h}{u''} = 0,$$

c'est-à-dire que le potentiel du système des deux masses A', C sur un point quelconque de la sphère de centre A et de rayon R est nul. Celui de la masse A sur cette même surface sphérique est constant, égal à R : R = 1. Donc cette sphère est une surface de niveau relativement au potentiel du système des trois masses A, A', C. Il en est de même de la surface sphérique de centre A' et de rayon R'. En conservant du système des deux surfaces sphériques la partie seulement qui serait visible du dehors si elles étaient opaques, on aura une surface fermée, qui sera une surface de niveau relative au potentiel de trois points placés dans

son intérieur, et à laquelle on pourra appliquer la méthode du n° **348**.

352. Considérons encore les couches de niveau sur un ellipsoïde à trois axes inégaux. La solution se trouve d'une manière indirecte, mais très simple, en ayant égard à cette propriété de l'ellipsoïde, facile à démontrer : *Si l'on joint deux points quelconques* M *et* M' *de l'ellipsoïde par une droite, les prolongements de celle-ci font avec les normales extérieures en* M *et* M' *deux angles* ν *et* ν', *dont les cosinus sont entr'eux dans le même rapport que les distances* p *et* p' *du centre aux plans tangents en* M *et* M';

$$(\beta) \qquad \frac{\cos\nu}{\cos\nu'}=\frac{p}{p'}.$$

Cherchons donc la loi de densité h, sur l'ellipsoïde, telle que les masses $hd\sigma$, $h'd\sigma'$ de deux éléments de la couche, compris dans un même cône infiniment étroit qui a son sommet en un point *quelconque* P intérieur à l'ellipsoïde, exercent sur ce point des actions égales et contraires. Appelons $d\epsilon$ l'ouverture du cône, u et u' les distances respectives des éléments $d\sigma$, $d\sigma'$ au point P. La propriété demandée s'exprime par l'équation

$$\frac{hd\sigma}{u^2}=\frac{h'd\sigma'}{u'^2}.$$

Mais on a, d'après une remarque déjà faite,

$$d\epsilon=\frac{d\sigma\cos\nu}{u^2}=\frac{d\sigma'\cos\nu'}{u'^2},$$

donc, l'égalité devient

$$\frac{h}{\cos\nu}=\frac{h'}{\cos\nu'} \quad \text{ou} \quad \frac{h}{h'}=\frac{\cos\nu}{\cos\nu'}=\frac{p}{p'},$$

d'après l'équation (β). On a donc, les éléments $d\sigma$ et $d\sigma'$ étant quelconques,

$$\frac{h}{p}=\frac{h'}{p'}=\text{const.}=k,$$

comme condition nécessaire et suffisante de la propriété énoncée. On déduit de là

$$h=kp$$

pour la loi de densité cherchée, de laquelle il résulte que l'action de la couche sera nulle et son potentiel constant sur tout point intérieur à l'ellipsoïde. Ce sera donc une couche de niveau, et comme, pour une quan-

tité donnée de matière active, il n'existe qu'une seule distribution satisfaisant à cette condition (**344**), on a ce théorème : *Pour qu'une masse donnée, distribuée sur la surface d'un ellipsoïde à trois axes inégaux, ait un potentiel constant sur la surface et dans son intérieur, la condition nécessaire et suffisante est que la densité varie, sur la surface, comme la distance du centre au plan tangent.*

CHAPITRE XXVII.

ATTRACTION ET POTENTIEL D'UN ELLIPSOIDE HOMOGÈNE.

354. On pourrait facilement déterminer les surfaces de niveau relatives au potentiel d'une couche ellipsoïdale et en déduire l'action d'un ellipsoïde homogène sur un point intérieur ou extérieur, mais nous préférons suivre, pour la solution de ce célèbre problème, la méthode proposée par Gauss.

Rappelons d'abord que si, x', y', z' étant les coordonnées d'un point quelconque d'une surface, on met l'équation de cette surface sous la forme

$$x' = f(p, q), \quad y' = f_1(p, q), \quad z' = f_2(p, q),$$

p et q désignant deux variables auxiliaires, et si l'on pose

$$dx' = \lambda dp + \lambda' dq, \quad dy' = \mu dp + \mu' dq, \quad dz' = \nu dp + \nu' dq,$$

l'élément de surface prendra la forme

$$d\sigma = dp\, dq \sqrt{(\mu\nu' - \nu\mu')^2 + (\nu\lambda' - \lambda\nu')^2 + (\lambda\mu' - \mu\lambda')^2}\ (1).$$

Prenons un ellipsoïde

$$\frac{x'^2}{\alpha^2} + \frac{y'^2}{\beta^2} + \frac{z'^2}{\gamma^2} = 1;$$

son équation pourra s'écrire

$$x' = \alpha \cos p, \quad y' = \beta \sin p \cos q, \quad z' = \gamma \sin p \sin q,$$

et l'on voit sans peine que les courbes $p =$ const. sont les sections par

---

(1) Cours d'Analyse, Ch. XXXVII, ex. 7.

des plans normaux à l'axe α; les courbes $q =$ const. les sections par des plans passant par l'axe γ. On a d'ailleurs ici

$$\lambda = -\alpha \sin p, \quad \mu = \beta \cos p \cos q, \quad \nu = \gamma \cos p \sin q,$$
$$\lambda' = 0, \quad \mu' = -\beta \sin p \sin q, \quad \nu' = \gamma \sin p \cos q.$$

On trouve, en substituant dans l'expression de $d\sigma$ ci-dessus,

$$d\sigma = \sin p\, dp\, dq \sqrt{\beta^2\gamma^2 \cos^2 p + \gamma^2\alpha^2 \sin^2 p \cos^2 q + \alpha^2\beta^2 \sin^2 p \sin^2 q},$$

ou

$$(3) \qquad d\sigma = \frac{\alpha\beta\gamma \sin p\, dp\, dq}{\mathrm{P}},$$

en désignant par

$$\mathrm{P} = \left[\frac{x'^2}{\alpha^4} + \frac{y'^2}{\beta^4} + \frac{z'^2}{\gamma^4}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

la distance du centre au plan tangent en (x', y', z').

355. Pour calculer la composante X de l'action de l'ellipsoïde sur un point $\mathrm{P}(x, y, z)$, nous emploierons la formule (8) du numéro (**322**), qui se réduit, ρ étant constant, à

$$\mathrm{X} = \rho \int_{\mathrm{S}} \frac{\cos \overline{nx}\, d\sigma}{u}.$$

On peut aussi, en transformant la formule d'Ostrogradsky en coordonnées polaires et plaçant l'origine des rayons vecteurs au point sollicité P (1), mettre X sous la forme

$$\mathrm{X} = \rho \int_{\mathrm{E}} \frac{d\omega}{u^2} \cos \overline{ux} = -\rho \int_{\mathrm{S}} \frac{\cos \overline{ux} \cos \overline{nu}\, d\sigma}{u},$$

que le point P soit extérieur ou intérieur à la surface S. Pour le cas de l'ellipsoïde, où l'on a

$$\cos \overline{nx} = -\frac{\mathrm{P}x'}{\alpha^2}, \quad d\sigma = \frac{\alpha\beta\gamma \sin p\, dp\, dq}{\mathrm{P}},$$

la première expression devient

$$(4) \qquad \mathrm{X} = -\rho\beta\gamma \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin p \cos p\, dp\, dq}{u};$$

les limites 0 et π relatives à p, 0 et 2π relatives à q, sont déterminées

(1) Voir la note II, où l'on posera $\mathrm{U} = u \cos \overline{ux}$ dans la formule (2) ou (3), selon que P est extérieur ou intérieur, et on observera que $\mathrm{U}_0 = 0$.

par la remarque faite ci-dessus sur les lignes $p=\text{const.}$ et $q=\text{const.}$

Dans la seconde expression, si l'on remplace $d\sigma$ par sa valeur (3), $\cos\overline{ux}$ et $\cos\overline{nu}$ par les valeurs

$$\cos\overline{ux}=\frac{x'-x}{u},\quad \cos\overline{nu}=-\frac{P}{u}\left[\frac{x'(x'-x)}{\alpha^2}+\frac{y'(y'-y)}{\beta^2}+\frac{z'(z'-z)}{\gamma^2}\right],$$

on aura sans peine

$$(5)\quad X=\rho\alpha\beta\gamma\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{x'-x}{u^3}\left[\frac{x'(x'-x)}{\alpha^2}+\frac{y'(y'-y)}{\beta^2}+\frac{z'(z'-z)}{\gamma^2}\right]\sin p\,dp\,dq.$$

356. Cela posé, si nous faisons

$$\frac{X_1}{X}=\frac{Y_1}{Y}=\frac{Z_1}{Z}=\frac{1}{\rho\alpha\beta\gamma},$$

l'équation (4) nous donnera

$$(6)\qquad \alpha X_1=-\iint\frac{\sin p\cos p\,dp\,dq}{u}.$$

Concevons que l'ellipsoïde varie en restant homofocal à lui-même, c'est-à-dire que α, β, γ varient en satisfaisant aux équations

$$\alpha^2-\gamma^2=k^2,\quad \beta^2-\gamma^2=k'^2,$$

k et k' étant des constantes; en sorte que l'on aura

$$(\varepsilon)\qquad \alpha\delta\alpha=\beta\delta\beta=\gamma\delta\gamma.$$

Nous considérerons comme correspondants, sur les ellipsoïdes homofocaux, les points qui répondent aux mêmes valeurs de p et de q, en sorte que nous aurons

$$\delta x'=\cos p\,\delta\alpha,\quad \delta y'=\sin p\cos q\,\delta\beta,\quad \delta z'=\sin p\sin q\,\delta\gamma,$$

$$u\delta u=(x'-x)\,\delta x'+(y'-y)\,\delta y'+(z'-z)\,\delta z'$$
$$=\left[(x'-x)\frac{x'}{\alpha^2}+(y'-y)\frac{y'}{\beta^2}+(z'-z)\frac{z'}{\gamma^2}\right]\alpha\delta\alpha,$$

et par suite,

$$\delta.\alpha X_1=\iint\sin p\cos p\,dp\,dq.\frac{\delta u}{u^2}$$

deviendra

$$\alpha\delta X_1+X_1\delta\alpha=\delta\alpha\iint\frac{x'\sin p\,dp\,dq}{u^3}\left[(x'-x)\frac{x'}{\alpha^2}+(y'-y)\frac{y'}{\beta^2}+(z'-z)\frac{z'}{\gamma^2}\right].$$

Retrachant de cette expression la valeur de X_1 donnée par l'équation (5) et multipliée par $\delta\alpha$, nous aurons

$$\alpha\delta X_1 = x\delta\alpha \iint \left[(x'-x)\frac{x'}{\alpha^2} + (y'-y)\frac{y'}{\beta^2} + (z'-z)\frac{z'}{\gamma^2}\right]\frac{\sin p\,dp\,dq}{u^3}$$

$$= -x\delta\alpha \iint \frac{\cos \overline{nu} \sin p dp\, dq}{Pu^2} = -\frac{x\delta\alpha}{\alpha\beta\gamma}\int_S \frac{\cos \overline{nu}\, d\sigma}{u^2}.$$

Mais on déduit de la formule d'Ostrogradsky

$$\int_S \frac{\cos \overline{nu}\, d\sigma}{u^2} = \begin{cases} 0, \\ -4\pi, \end{cases}$$

suivant que le point (x, y, z) est extérieur ou intérieur à S(1). Donc :

1° Si le point P (x, y, z) est *extérieur* à l'ellipsoïde, on a $\delta X_1 = 0$ et X_1 reste constant;

2° S'il est *intérieur*, on a

(7) $$\partial X_1 = \frac{4\pi x\delta\alpha}{\alpha^2\beta\gamma}.$$

De là découle la conséquence suivante : si le point P est extérieur à l'ellipsoïde, X_1, Y_1, Z_1 restent constants quand on remplace l'ellipsoïde par un ellipsoïde homofocal. On en conclut que pour deux ellipsoïdes homofocaux dont les demi-axes seraient respectivement α, β, γ et α', β', γ', les masses M et M', les densités ρ et ρ', les composantes de l'action sur un même point extérieur P satisferaient aux équations

$$\frac{X}{X'} = \frac{Y}{Y'} = \frac{Z}{Z'} = \frac{\rho\alpha\beta\gamma}{\rho'\alpha'\beta'\gamma'} = \frac{M}{M'}.$$

Donc : *Deux ellipsoïdes homofocaux et homogènes exercent sur un même point extérieur des actions de même direction, et proportionnelles à leurs masses;* c'est le théorème de Maclaurin.

357. Supposons d'abord le point intérieur; remplaçons dans la formule (7) qui se rapporte à ce cas, δ par d, et ayant égard aux relations (ε), nous aurons

$$dX_1 = 4\pi x \frac{d\alpha}{\alpha^2\beta\gamma} = 4\pi x \frac{d\gamma}{\alpha^3\beta}.$$

---

(1) Note II, formule (4).

Pour calculer l'action d'un ellipsoïde homogène dont les demi-axes sont a, b, c, nous poserons

$$\alpha^2 - \gamma^2 = a^2 - c^2 = k^2, \quad \beta^2 - \gamma^2 = b^2 - c^2 = k'^2, \quad \gamma = \frac{c}{t},$$

d'où il viendra

$$\alpha^2 = k^2 + \frac{c^2}{t^2}, \quad \beta^2 = k'^2 + \frac{c^2}{t^2}, \quad d\gamma = -\frac{c\,dt}{t^2},$$

ou encore, en faisant

$$k^2 = \lambda^2 c^2, \quad k'^2 = \lambda'^2 c^2,$$

$$\alpha^2 = \frac{c^2}{t^2}(1 + \lambda^2 t^2), \quad \beta^2 = \frac{c^2}{t^2}(1 + \lambda'^2 t^2),$$

et par suite,

$$dX_1 = -\frac{4\pi x}{c^2} \frac{t^2\,dt}{(1 + \lambda^2 t^2)^{\frac{3}{2}} (1 + \lambda'^2 t^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Intégrons, et observons que dans la formule (6), si l'on fait croître indéfiniment α, et par suite β et γ, l'intégrale double qui figure au second membre conserve nécessairement une valeur finie. Donc X_1 a pour limite zéro; donc X_1 est nul pour $\gamma = \infty$, et nous aurons la valeur de X_1 qui se rapporte à $\gamma = c$ en intégrant la valeur de dX_1 depuis $\gamma = \infty$ jusqu'à $\gamma = c$ ou depuis $t = 0$ jusqu'à $t = 1$. Un calcul semblable s'applique à

$$dY_1 = 4\pi y \frac{d\beta}{\alpha\beta^2\gamma} = 4\pi y \frac{d\gamma}{\alpha\beta^3}, \quad dZ_1 = 4\pi z \frac{d\gamma}{\alpha\beta\gamma^2},$$

et enfin, X, Y et Z s'obtenant en multipliant X_1, Y_1, Z_1 par ρabc, on aura les formules

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} X &= -\frac{4\pi\rho ab}{c^2} x \int_0^1 \frac{t^2\,dt}{(1 + \lambda^2 t^2)^{\frac{3}{2}} (1 + \lambda'^2 t^2)^{\frac{1}{2}}}, \\ Y &= -\frac{4\pi\rho ab}{c^2} y \int_0^1 \frac{t^2\,dt}{(1 + \lambda^2 t^2)^{\frac{1}{2}} (1 + \lambda'^2 t^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ Z &= -\frac{4\pi\rho ab}{c^2} z \int_0^1 \frac{t^2\,dt}{(1 + \lambda^2 t^2)^{\frac{1}{2}} (1 + \lambda'^2 t^2)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \right.$$

On remarquera que λ, λ' et par suite X, Y, Z ne dépendent que des rapports $a : c$, $b : c$, d'où l'on conclut que *deux ellipsoïdes homothétiques, concentriques et homogènes exercent sur un même point intérieur*

des actions de même grandeur et de même direction, en sorte que ***la couche ellipsoïdale comprise entre leurs surfaces est sans action sur un point de sa cavité interne.***

358. Supposons maintenant le point P extérieur. Par ce point, faisons passer un ellipsoïde (a', b', c') homofocal à (a, b, c), en sorte qu'il faudra poser

$$a'^2 - c'^2 = a^2 - c^2 = k^2 = \lambda^2 c^2, \quad b'^2 - c'^2 = b^2 - c^2 = \lambda'^2 c^2,$$

et soit X' la composante de l'action de cet ellipsoïde, supposé de densité ρ, sur le point P. D'après le théorème de Maclaurin, on a

$$X = \frac{abc}{a'b'c'} X',$$

et X' est donné par la première des formules (8) qui s'appliquent évidemment à un point sur la surface. Posant

$$\lambda_1 = \frac{c}{c'}\lambda, \qquad \lambda'_1 = \frac{c}{c'}\lambda',$$

on a ainsi

$$X = -4\pi\rho \frac{abc}{c'^3} x \int_0^1 \frac{t^2 dt}{(1 + \lambda_1^2 t^2)^{\frac{3}{2}} (1 + \lambda'^2_1 t^2)^{\frac{1}{2}}},$$

ou encore, en faisant

$$v = \frac{c}{c'} t, \quad \frac{c}{c'} = \varepsilon,$$

et opérant de même pour Y, Z,

$$(9) \quad \begin{cases} X = -\dfrac{4\pi\rho ab}{c^2} x \displaystyle\int_0^\varepsilon \frac{v^2 dv}{(1 + \lambda^2 v^2)^{\frac{3}{2}} (1 + \lambda'^2 v^2)^{\frac{1}{2}}}, \\ Y = -\dfrac{4\pi\rho ab}{c^2} y \displaystyle\int_0^\varepsilon \frac{v^2 dv}{(1 + \lambda^2 v^2)^{\frac{1}{2}} (1 + \lambda'^2 v^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ Z = -\dfrac{4\pi\rho ab}{c^2} z \displaystyle\int_0^\varepsilon \frac{v^2 dv}{(1 + \lambda^2 v^2)^{\frac{1}{2}} (1 + \lambda'^2 v^2)^{\frac{1}{2}}}. \end{cases}$$

On voit que ces formules ne diffèrent de (8) que par la substitution de la limite ε à l'unité. Cette limite est déterminée par l'équation

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1, \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{1 + \lambda^2 \varepsilon^2} + \frac{y^2}{1 + \lambda'^2 \varepsilon^2} + z^2 = \frac{c^2}{\varepsilon^2},$$

qui exprime que la surface (a', b', c') passe par le point donné P; ε^2 sera la racine positive de cette équation.

359. Nous déduirons encore des formules (8) la valeur du potentiel V de l'ellipsoïde homogène sur un point intérieur. Dans ces expressions de X, Y, Z, les coefficients de x, y, z, sont des constantes; on a donc

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2Ax, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 2By, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 2Cz,$$

d'où

$$V = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + V_0,$$

V_0 étant une constante qui représente le potentiel de l'ellipsoïde sur son centre. Remplaçant A, B, C par leurs valeurs, on a sans peine

$$(10)\quad V = V_0 - \frac{2\pi\rho ab}{c^2}\int_0^1 \left(\frac{x^2}{1+\lambda^2 v^2} + \frac{y^2}{1+\lambda'^2 v^2} + z^2\right)\frac{v^2 dv}{(1+\lambda^2 v^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2 v^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Pour trouver V_0, nous transformerons encore l'expression

$$V_0 = \int_E \rho\frac{d\omega}{u} = \rho\int_E \frac{d\omega}{u}$$

par la formule

$$\int_E \frac{1}{u^2}\frac{\partial U}{\partial u}d\omega = -\int_S \frac{U\cos\overline{nu}\,d\sigma}{u^2}\text{(1)},$$

en posant $U = \frac{1}{2}u^2$, et nous aurons

$$V_0 = -\frac{\rho}{2}\int_S \cos\overline{nu}\,d\sigma = -\frac{\rho}{2}\int_S \frac{P}{u}d\sigma.$$

360. Cette valeur de V_0 se réduit facilement à une intégrale simple, mais nous ne ferons la transformation que pour le cas où l'ellipsoïde est révolution autour de l'axe $2c$, que nous avons supposé le plus petit. Dans ce cas, l'on a

$$a = b, \quad \lambda' = \lambda, \quad a = c\sqrt{1+\lambda^2}, \quad P d\sigma = a^2 c \sin p\, dp\, dq.$$

Rien n'empêche de poser ici

$$x' = a\sin p\cos q, \quad y' = a\sin p\sin q, \quad z' = c\cos p,$$

ce qui ne change rien à la valeur de $d\sigma$. Il viendra

$$u = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{a^2\sin^2 p + c^2\cos^2 p} = c\sqrt{(1+\lambda^2)\sin^2 p + \cos^2 p}$$

(1) Formule (2) de la note II.

ou

$$u = c\sqrt{1+\lambda^2}\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}\cos^2 p},$$

d'où

$$V_0 = \frac{\pi\rho a^2}{\sqrt{1+\lambda^2}}\int_0^\pi \frac{\sin p\, dp}{\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}\cos^2 p}},$$

et en effectuant l'intégration, et éliminant a,

$$V_0 = \frac{2\pi\rho c^2}{\lambda}(1+\lambda^2)\,\text{arc tg}\,\lambda.$$

Remplaçons de même a, b, λ' par leurs valeurs en λ et c dans les équations (8) et observons que

$$\int_0^1 \frac{t^2 dt}{1+\lambda^2 t^2} = \frac{1}{\lambda^2}\int_0^1\left(dt - \frac{dt}{1+\lambda^2 t^2}\right) = \frac{\lambda - \text{arc tg}\,\lambda}{\lambda^3},$$

$$\int_0^1 \frac{t^2 dt}{(1+\lambda^2 t^2)^2} = \frac{1}{2\lambda^2}\int_0^1 t.\frac{2\lambda^2 t dt}{(1+\lambda^2 t^2)^2} = -\frac{1}{2\lambda^2(1+\lambda^2)} + \frac{\text{arc tg}\,\lambda}{2\lambda^3},$$

et nous aurons enfin les formules suivantes :

$$(11)\quad \begin{cases} X = -2\pi\rho(1+\lambda^2)\left[\frac{\text{arc tg}\,\lambda}{\lambda^3} - \frac{1}{\lambda^2(1+\lambda^2)}\right]x, \\ Y = -2\pi\rho(1+\lambda^2)\left[\frac{\text{arc tg}\,\lambda}{\lambda^3} - \frac{1}{\lambda^2(1+\lambda^2)}\right]y, \\ Z = -\frac{4\pi\rho(1+\lambda^2)}{\lambda^3}(\lambda - \text{arc tg}\,\lambda)\,z. \end{cases}$$

En substituant dans l'équation

$$V = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + V_0$$

les valeurs de V_0, A, B, C qui résultent de ces formules, on aura pour V la valeur

$$(12)\quad V = \frac{2\pi\rho(1+\lambda^2)}{\lambda^3}\left[\lambda^2 c^2\,\text{arc tg}\,\lambda - \frac{x^2+y^2}{2}\left(\text{arc tg}\,\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right) - z^2(\lambda - \text{arc tg}\,\lambda)\right].$$

Les formules (11) et (12) donnent les composantes de l'action et le potentiel d'un ellipsoïde de révolution aplati et homogène sur un point de son intérieur. La valeur de V est celle dont nous avons fait usage au numéro **289**.

NOTE PREMIÈRE.

SUR LES CONDITIONS POUR QU'UNE EXPRESSION SOIT UNE DIFFÉRENTIELLE EXACTE.

1. On a démontré (Cours d'An., 403) que si p_1, p_2 sont des fonctions de q_1, q_2, il faut et il suffit, pour que l'expression $p_1 dq_1 + p_2 dq_2$ soit une différentielle exacte, que l'on ait identiquement

$$\frac{\partial p_1}{\partial q_2} = \frac{\partial p_2}{\partial q_1}. \tag{1}$$

Généralisons ce théorème. Pour que

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + p_3 dq_3, \tag{2}$$

p_1, p_2, p_3 étant fonctions de q_1, q_2, q_3, soit une différentielle exacte, il faut d'abord, évidemment, que l'on ait identiquement

$$\frac{\partial p_1}{\partial q_2} = \frac{\partial p_2}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial p_1}{\partial q_3} = \frac{\partial p_3}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial p_2}{\partial q_3} = \frac{\partial p_3}{\partial q_2}; \tag{3}$$

il reste à faire voir que cela suffit. En vertu de la première condition, si l'on considère q_3 comme constant, $p_1 dq_1 + p_2 dq_2$ est une différentielle exacte dV_1 par rapport à q_1, q_2; cherchons s'il existe une fonction V de q_1, q_2, q_3 qui ait pour différentielle totale l'expression (2). Elle ne pourra différer de V_1 que par une fonction de q_3, et l'on aura

$$V = V_1 + \varphi(q_3), \quad \frac{\partial V}{\partial q_3} = \frac{\partial V_1}{\partial q_3} + \varphi'(q_3) = p_3,$$

d'où

$$\varphi'(q_3) = p_3 - \frac{\partial V_1}{\partial q_3}.$$

Il est donc nécessaire et suffisant, pour que $\varphi(q_3)$ existe, que le second membre ne dépende pas de q_1, q_2. Or, on a

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\left(p_3 - \frac{\partial V_1}{\partial q_3}\right) = \frac{\partial p_3}{\partial q_1} - \frac{\partial}{\partial q_3}\frac{\partial V_1}{\partial q_1} = \frac{\partial p_3}{\partial q_1} - \frac{\partial p_1}{\partial q_3} = 0,$$

d'après la seconde condition (3). On verrait de même que cette expression ne dépend pas de q_2. Les conditions (3) sont donc suffisantes. On verrait de même que la règle s'étend à un nombre quelconque de variables indépendantes, et que la condition nécessaire et suffisante pour que

$$p_1\, dq_1 + p_2\, dq_2 + \cdots + p_n\, dq_n$$

soit une différentielle exacte en $q_1, q_2, \ldots q_n$, c'est que les fonctions $p_1, p_2, \ldots p_n$ vérifient les identités

$$(4)\qquad \frac{\partial p_i}{\partial q_k}=\frac{\partial p_k}{\partial q_i},\quad (i, k=1, 2 \ldots n),$$

qui sont en nombre $n(n-1):2$.

2. Supposons qu'au lieu d'être données explicitement, les fonctions p_i soient définies par un système de n équations

$$(5)\qquad H_1(q_1, \ldots q_n, p_1, \ldots p_n)=0,\quad H_2=0, \ldots H_n=0.$$

On aura en général, r et s étant deux des nombres $1, 2, \ldots, n$,

$$\frac{\partial H_r}{\partial q_i}+\sum_k \frac{\partial H_r}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial q_i}=0,$$

$$\frac{\partial H_s}{\partial q_i}+\sum_k \frac{\partial H_s}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial q_i}=0,$$

d'où, multipliant respectivement par $\frac{\partial H_s}{\partial p^i}$, $\frac{\partial H_r}{\partial p_i}$ et retranchant,

$$\frac{\partial H_r}{\partial q_i}\frac{\partial H_s}{\partial p_i}-\frac{\partial H_r}{\partial p_i}\frac{\partial H_s}{\partial q_i}+\sum_k\left(\frac{\partial H_s}{\partial p_i}\frac{\partial H_r}{\partial p_k}-\frac{\partial H_s}{\partial p_k}\frac{\partial H_r}{\partial p_i}\right)\frac{\partial p_k}{\partial q_i}=0.$$

Faisons dans cette équation $i=1, 2, \ldots n$ et ajoutons, nous aurons évidemment

$$(H_r, H_s)+\sum_i\sum_k\left(\frac{\partial H_s}{\partial p_i}\frac{\partial H_r}{\partial p_k}-\frac{\partial H_s}{\partial p_k}\frac{\partial H_r}{\partial p_i}\right)\frac{\partial p_k}{\partial q_i}=0.$$

Dans cette double sommes toutes les dérivées $\partial p_k : \partial q_i$ ont $k=i$ ou k diffèrent de i. Dans le premier cas, le coefficient de la dérivée s'évanouit identiquement; dans le second, il y a un autre terme affecté de la dérivée $\partial p_i : \partial q_k$ pour lequel le coefficient est égal, mais de signe contraire, en sorte que l'équation peut s'écrire comme suit, en désignant par $\underset{i,k}{S}$ une somme qui s'étend à toutes les combinaisons différentes des nombres

$$i=1, 2, \ldots n,\quad k=1, 2, \ldots n:$$

$$(6)\qquad (H_r, H_s)+\underset{i,k}{S}\left(\frac{\partial H_s}{\partial p_i}\frac{\partial H_r}{\partial p_k}-\frac{\partial H_s}{\partial p_k}\frac{\partial H_r}{\partial p_i}\right)\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}-\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right)=0.$$

Cela posé, pour que l'expression

$$p_1\,dq_1+\cdots+p_n\,dq_n$$

soit une différentielle exacte, les valeurs de $p_1, \ldots p_n$ étant fournies par les égalités (5), il faut, d'après la règle (4), que l'équation (6) se réduise à

$$(H_r, H_s)=0,$$

ce qui donne $n(n-1):2$ relations auxquelles devront satisfaire $H_1, H_2, \ldots H_n$.

Réciproquement, si l'on a entre deux quelconques des fonctions $H_1, H_2 \dots H_n$ la relation

$$(H_r, H_s) = o,$$

l'équation (6) se réduira à

$$\underset{i,k}{S}\left(\frac{\partial H_r}{\partial p_i}\frac{\partial H_s}{\partial p_k} - \frac{\partial H_r}{\partial p_k}\frac{\partial H_s}{\partial p_i}\right)\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i} - \frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right) = o,$$

En donnant à r, s toutes les valeurs $1, 2, \dots n$, on formera un système de $n(n-1) : 2$ équations du premier degré par rapport aux $n(n-1) : 2$ quantites

$$(\gamma) \qquad \frac{\partial p_k}{\partial q_i} - \frac{\partial p_i}{\partial q_k},$$

équations dont les seconds membres seront nuls, les coefficients étant de la forme

$$(\delta) \qquad \frac{\partial H_r}{\partial p_i}\frac{\partial H_s}{\partial p_k} - \frac{\partial H_r}{\partial p_k}\frac{\partial H_s}{\partial p_i};$$

il en résultera évidemment que les quantites (γ) seront toutes nulles ou que l'on aura

$$\frac{\partial p_k}{\partial q_i} = \frac{\partial p_i}{\partial q_k}, \quad (i, k = 1, 2, \dots n),$$

ce qui est identique avec l'équation (4), à moins que le déterminant formé avec les coefficients (δ) ne soit nul. On peut établir que cette circonstance ne se présentera pas si les fonctions $H_1, H_2, \dots H_n$ ne dépendent pas les unes des autres, mais nous renverrons pour ce point spécial à notre mémoire *Sur la fonction de Poisson* (*Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, t. V).

NOTE DEUXIÈME.

SUR LA FORMULE D'OSTROGRADSKY.

1. Cette formule, d'un grand usage dans la physique mathématique, a pour objet de transformer une intégrale triple qui s'étend à tous les éléments $d\omega$ d'un volume Ω, en une intégrale double s'étendant à tous les éléments $d\sigma$ de la surface Σ qui enveloppe ce volume.

Soit U une fonction de x, y, z, supposée continue dans toute la région Ω. L'intégrale

$$\int_\Omega \frac{\partial U}{\partial x} d\omega = \iiint \frac{\partial U}{\partial x} dx\, dy\, dz$$

se transforme en groupant les éléments de l'intégrale qui se rapportent à un même filet parallèle à l'axe des x, ou compris entre les plans $y, y + dy$, z et $z + dz$. Appe-

lons P′, P″, P‴, ... les points successifs où l'intersection des plans y et z perce la surface Σ ; x', x'', x''', ... les valeurs correspondantes de x; $d\sigma'$, $d\sigma''$, $d\sigma'''$ ... les éléments de la surface Σ compris dans le filet; ζ', ζ'', ζ''', ... les angles que fait la normale *intérieure* à chacun de ces éléments avec l'axe des x positifs. La somme des éléments dont il s'agit aura pour expression

$$dy\,dz\int_{x'}^{x''}\frac{\partial U}{\partial x}dx + dy\,dz\int_{x'''}^{x^{\text{iv}}}\frac{\partial U}{\partial x}dx + \cdots = dy\,dz\,(-U' + U'' - U''' + U^{\text{iv}} - \cdots).$$

D'ailleurs, $dy\,dz$ étant la projection commune des éléments $d\sigma'$, $d\sigma''$, ... sur le plan YZ, si l'on observe que l'angle ζ est aigu ou obtus selon que la parallèle à l'axe des x entre dans l'espace Ω ou en sort, on aura

$$dy\,dz = d\sigma' \cos\zeta' = -\,d\sigma'' \cos\zeta'' = d\sigma''' \cos\zeta''' = \ldots,$$

et l'expression ci-dessus peut s'écrire

$$-\,U'\cos\zeta' d\sigma' - U''\cos\zeta'' d\sigma'' - U'''\cos\zeta''' d\sigma''' - \cdots = -\,\mathrm{S}\,U\cos\zeta d\sigma,$$

S désignant une somme qui s'étend à tous les éléments $d\sigma$ compris dans un même filet. Le même raisonnement s'appliquant à tous les filets parallèles à l'axe des x dans lesquels on a décomposé le volome Ω, on a évidemment, en représentant par $\overline{nx}$ l'angle ζ,

$$\text{(1)}\qquad \int_\Omega \frac{\partial U}{\partial x}d\omega = -\int_\Sigma U\cos\overline{nx}\,d\sigma,$$

ce qui est la formule d'Ostrogradsky. On a de même

$$\int_\Omega \frac{\partial U}{\partial y}d\omega = -\int_\Sigma U\cos\overline{ny}\,d\sigma,\qquad \int_\Omega \frac{\partial U}{\partial z}d\omega = -\int_\Sigma U\cos\overline{nz}\,d\sigma.$$

2. La formule correspondante en coordonnées curvilignes orthogonales s'établit facilement (1), mais nous nous bornerons ici aux coordonnées polaires. La fonction U étant toujours supposée continue dans l'espace Ω, supposons le pôle O placé *hors* de cet espace; décomposons Ω en éléments $d\omega$ par des cônes d'ouverture infiniment étroite $d\iota$ et des sphères de rayon u ayant leur centre en O, en sorte que

$$d\omega = u^2 du\, d\iota.$$

Considérons l'intégrale

$$\int_\Omega \frac{1}{u^2}\frac{\partial U}{\partial u}d\omega = \iint \frac{\partial U}{\partial u}du\,d\iota.$$

En groupant tous les éléments de l'intégrale compris dans un même cône élémentaire et désignant ici par ζ l'angle que fait le rayon u partant de O avec la normale à l'élé-

(1) Voir aux *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. XIV, notre note sur *Quelques formules d'un usage général, etc*.

ment $d\sigma$ vers l'intérieur de Ω, on aura

$$d\iota\int_{u'}^{u''}\frac{\partial U}{\partial u}du+d\iota\int_{u'''}^{u^{IV}}\frac{\partial U}{\partial u}du+\dots=d\iota\,(-U'+U''-U'''+\dots).$$

D'autre part, comme ζ est aigu pour les éléments d'entrée $d\sigma'$, $d\sigma'''$, ... et obtus pour les éléments de sortie $d\sigma''$, $d\sigma^{IV}$, ... on a

$$d\iota=\frac{\cos\zeta' d\sigma'}{u'^2}=-\frac{\cos\zeta'' d\sigma''}{u''^2}=\frac{\cos\zeta''' d\sigma'''}{u'''^2}=-\dots;$$

donc, la somme ci-dessus peut s'écrire

$$-\frac{U'\cos\zeta' d\sigma'}{u'^2}-\frac{U''\cos\zeta'' d\sigma''}{u''^2}-\dots=-\mathrm{S}\frac{U\cos\zeta d\sigma}{u^2},$$

S s'étendant à tous les éléments $d\sigma$ compris dans un même cône; on a donc, en opérant de même pour tous les cônes,

$$(2)\qquad \int_{\Omega}\frac{1}{u^2}\frac{\partial U}{\partial u}d\omega=-\int_{\Sigma}\frac{U}{u^2}\cos\overline{nu}\,d\sigma.$$

Il faut remarquer que cette formule ne subsiste plus si le pôle O est dans l'intérieur de l'espace Ω, le rayon vecteur u rencontrant en premier lieu un élément de sortie. Pour ramener ce cas au premier, on décrira autour du pôle O une sphère σ de rayon infiniment petit α, et l'on appliquera la formule (2) à l'espace Ω' compris entre σ et Σ, ce qui sera maintenant permis.

Il faudra donc ajouter au second membre la même intégrale étendue à la petite surface σ; or, on aura, pour cette surface sphérique,

$$\cos\overline{nu}=1,\quad u=\alpha,\quad d\sigma=\alpha^2 d\iota,\quad U=U_0,$$

U_0 désignant la valeur de U au pôle, et par suite

$$\int_{\sigma}\frac{U}{u^2}\cos\overline{nu}\,d\sigma=U_0\int d\iota=4\pi U_0.$$

A la limite, Ω' devient Ω et l'équation (2) est remplacée par celle-ci :

$$(3)\qquad \int_{\Omega}\frac{1}{u^2}\frac{\partial U}{\partial u}d\omega=-4\pi U_0-\int_{\Sigma}\frac{U}{u^2}\cos\overline{nu}\,d\sigma.$$

En faisait $U=1$ dans les formules (2) et (3), on trouve que, quelle que soit la surface Σ, on a

$$(4)\qquad \int_{\Sigma}\frac{\cos\overline{nu}}{u^2}d\sigma=\begin{cases}0\\-4\pi,\end{cases}$$

selon que l'origine O des rayons vecteurs est extérieure ou intérieure à la surface Σ.

FIN.